

多台电轴系统的稳定性及非线性振荡问题*

疏 松 桂

(中国科学院自动化研究所)

1 引 言

交流电轴早已得到应用,但以两台电轴为常见,如闸门、吊桥及机床等设备.因电轴系统有它的特殊优点,简单可靠,维护方便,可以代替机械轴,所以随着工业的发展,很多重要的多电动机拖动系统也逐渐采用电轴,电轴在这些多电机拖动系统的采用要求我们深入研究多台电轴系统的稳定性及振荡问题.这里遇到多自由度非线性二次联立方程,包含有三角函数复位力矩,不能化为一个高次非线性微分方程后再求解,而必须直接从多自由度非线性联立方程来解决这样的问题.

回顾讨论多台电轴的文献并不多,比较完善的研究工作应推萨多夫斯基^[1].但是他也只分析过两台电轴系统的稳定性,没有讨论多台电轴系统的稳定性及振荡问题.此外Плис^[2]解过三个一次联立方程,其中只有一个包含有非线性项.

本文主要的目的是要研究解决多台带平衡机的电轴系统之稳定性及非线性振荡问题,阐明有关的运动现象及问题.这项工作中所遇到的关键问题是要求解多自由度非线性联立方程.因此我们工作的重点就不得不转移到这方面来.这里我们提出一个解多自由度非线性联立方程的方法:直接近似求解法,这个方法是从已知起始条件开始,依时间间隔逐点求出解答,不需要利用相平面公式,简单易行.这里还举出一个例题,求出解答.

2 运动方程的建立

设有一带平衡机的 n 台电轴系统如图1所示.

图中 M_1, M_2, \dots, M_n 表示主机转矩,通常是机组滑差率 S_l 的函数(也就是转速的函数), $l=1,2,\dots,n$;

$M_{y_1}, M_{y_2}, \dots, M_{y_n}$ 表示平衡机的转矩,一般是机组的滑差率 S_l 和失调角 θ_k 的函数($k=1,2,\dots,n$);

$M_{c_1}, M_{c_2}, \dots, M_{c_n}$ 表示负载转矩,一般也是机组的滑差率 S_l 和失调角 θ_k 的函数;

J_1, J_2, \dots, J_n 表示各台电轴机组及其负载的转动惯量(折合到电机的轴上).根据牛顿第二定律可以写出上述电轴系统一般运动方程如下:

* 《数学学报》第11卷第2期,170—180页.

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_1}{P} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= M_1(S_1) + M_{y_1}(S_1, \theta_{1l}) - M_{c_1}(S_1, \theta_{1l}), \\ \frac{J_2}{P} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= M_2(S_1) + M_{y_2}(S_1, \theta_{2l}) - M_{c_2}(S_1, \theta_{2l}), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{J_n}{P} \frac{d^2\theta_n}{dt^2} &= M_n(S_1) + M_{y_n}(S_1, \theta_{nl}) - M_{c_n}(S_1, \theta_{nl}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $P =$ 平衡机极对数; $l = 1, 2, \dots, n$; θ_k 表示各台电轴的转角 ($k = 1, 2, \dots, n$, 如图 2 所示).

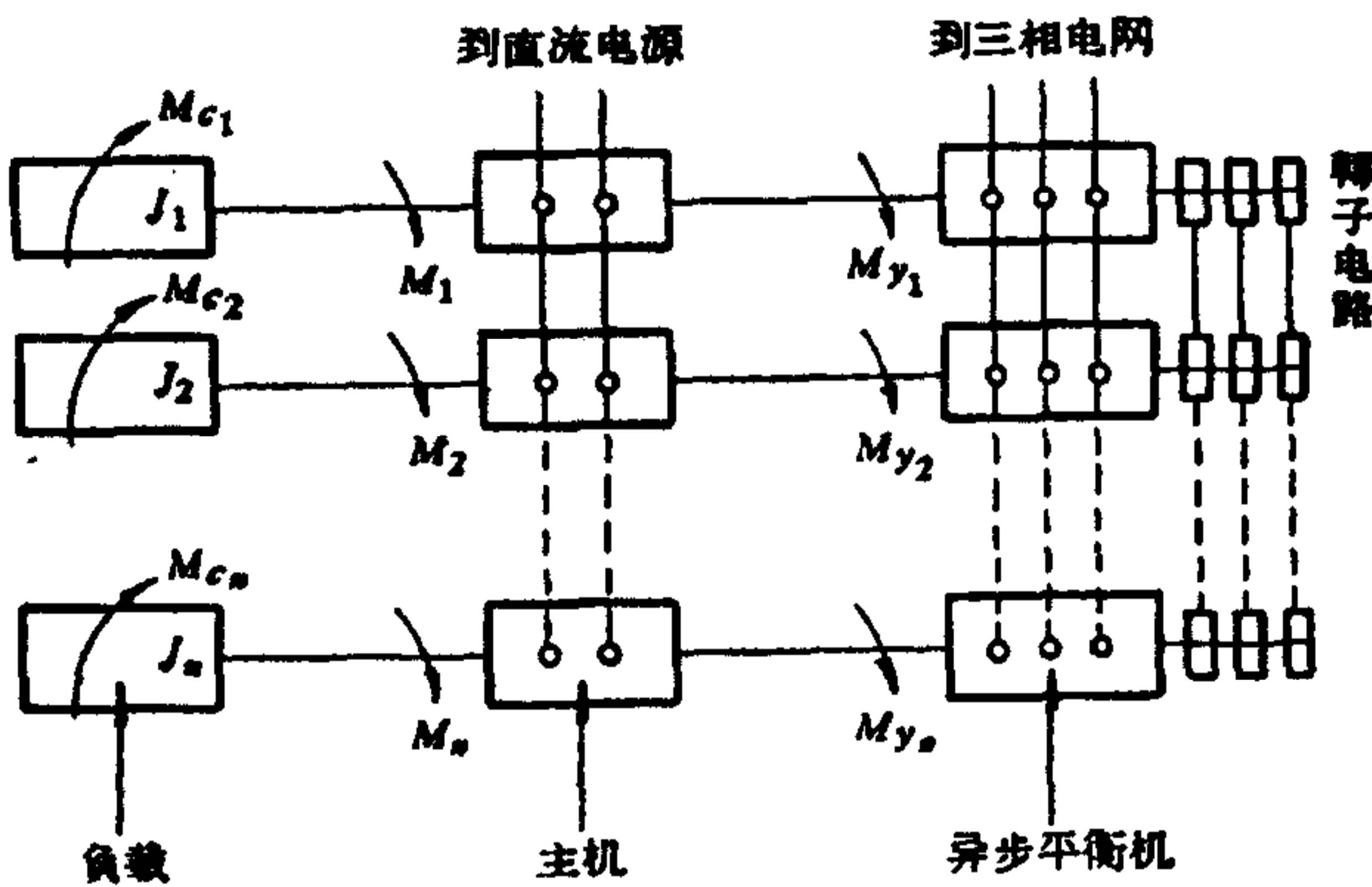


图 1 带平衡机电轴系统示意图

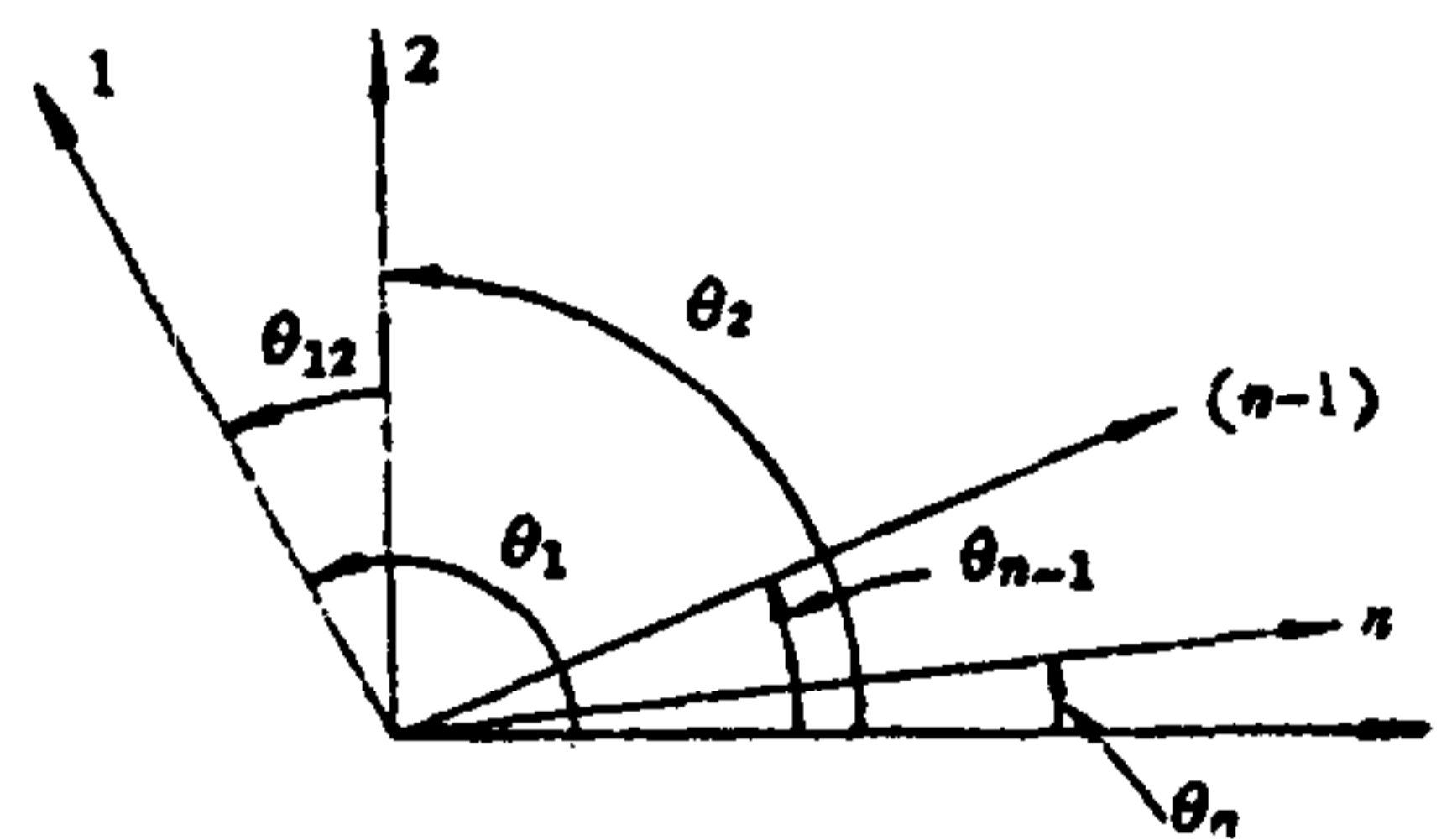


图 2 电轴的转角与失调角

根据某些生产机械的具体情况我们可以引用下面四条假设来简化运动公式:

1. 各个主拖动电机的机械特性是一致的、线性的(不计电枢电感). 在用公共直流电源时, 电源容量是相当大的, 于是发电机电枢电阻可以不计. 在用单独 $\Gamma - \Pi$ 机组时, 发电机的特性是一样的, 这样发电机的电枢电阻可以归并到电动机的电阻中, 不会影响电动机机械特性的一致性. 同时还可以推断在这种情况下, 各个主机的力矩只是自己转速的函数, 不受他组转速的影响, 于是得

$$\left. \begin{aligned} M_1(S_1) &= M_1(S_1) = M_0 - M_s S_1, \\ M_2(S_1) &= M_2(S_2) = M_0 - M_s S_2, \\ &\dots\dots\dots \\ M_n(S_1) &= M_n(S_1) = M_0 - M_s S_n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 S_1, S_2, \dots, S_n 是各个平衡机的滑差率; M_0, M_s 是常数. 由图 3 可以看出在逆磁场旋转时 M_s 为正数(通常电轴是在逆磁场情况下运转), 在顺磁场旋转时 M_s 为负数. 而 M_0 在上述两种情况下的数值各不相同.

实际上各主机机械特性不会完全一致, 此时可以在主机电枢回路中串入电阻调节之, 使之趋于一致.

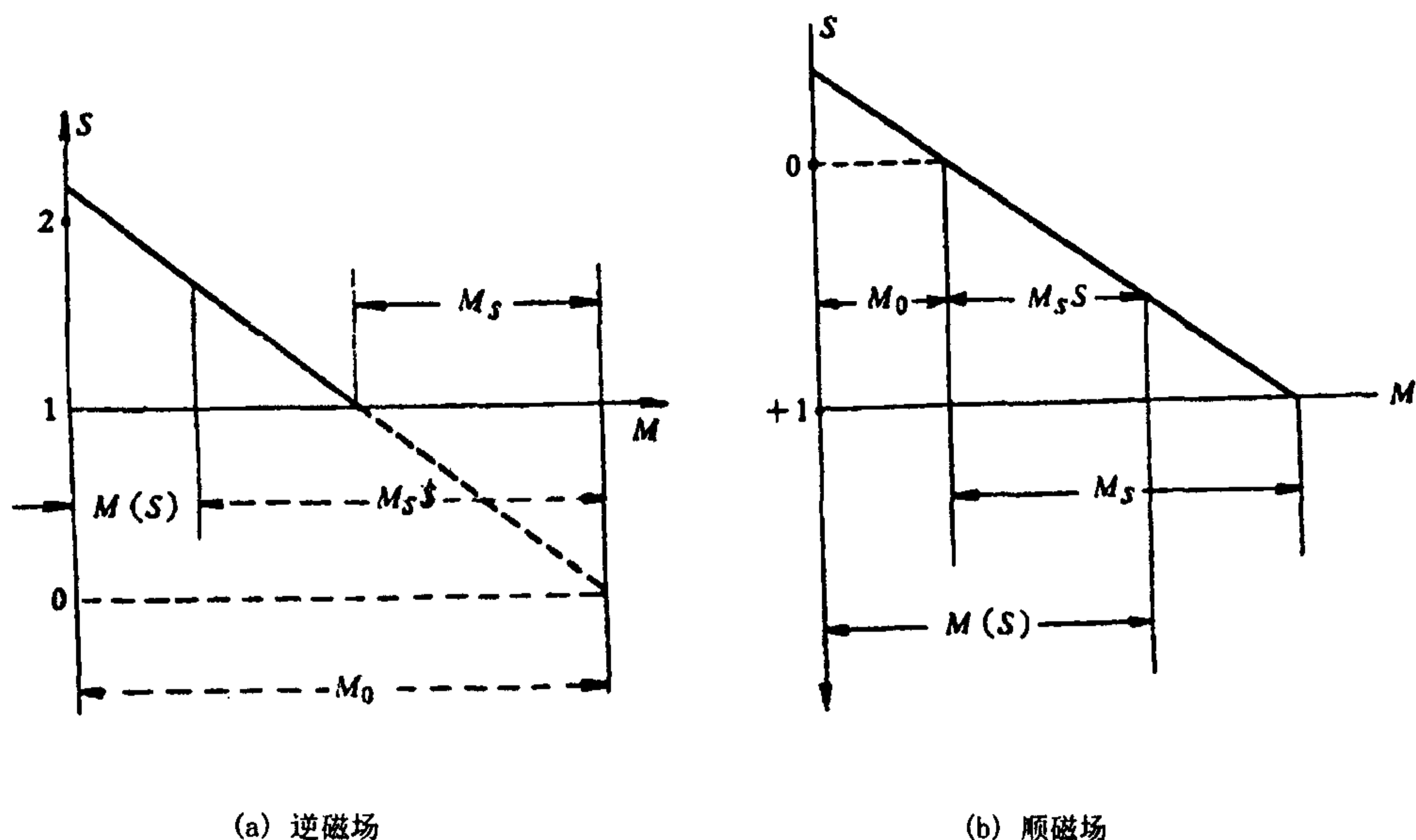


图3 主机的机械特性

2. 在逆磁场旋转的情况下, $\frac{S}{S_m} \gg \frac{S_m}{S}$ (S_m 是感应机的临界滑差率, 约在 0.25 以下),

又由文献[1]得第 K 台平衡机的转矩(忽略定子电阻后的三相总值)为

$$M_{yk} = \frac{2M_m}{n} \frac{n - \sum_{l=1}^n \left[\cos(\theta_k - \theta_l) + \frac{S}{S_m} \sin(\theta_k - \theta_l) \right]}{\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S}}$$

$$= A - \sum_{l=1}^n [B \cos(\theta_k - \theta_l) + C \sin(\theta_k - \theta_l)], \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2M_m}{\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S}} \approx \frac{2S_m M_m}{S}, \\ B &= \frac{2M_m}{n \left(\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S} \right)} \approx \frac{2S_m M_m}{nS}, \\ C &= \frac{2M_m \frac{S}{S_m}}{n \left(\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S} \right)} \approx \frac{2M_m}{n}. \end{aligned} \right\} (3a)$$

公式(3)是在各台电轴以相同的滑差率 S 旋转情况下推导出来的,显然不能直接用于一般的过渡状态.但电轴在不失步的情况下振荡或在失几步的范围内滑差率的变化量 ΔS 对原来的滑差率 S (约为 2) 讲起来都是可以忽略不计的,也就是说滑差率的变化对于平衡机力矩的影响是可以不考虑的,这样 M_{yk} 只是失调角的函数 (A, B, C 都可视为常数),因此将(3)式用来解振荡范围内过渡过程还是合理的.

3. 扰动转矩为阶跃函数,负载转矩在过渡过程中与失调角成线性关系,而与滑差率无关,即

$$M_{ck} = M_{ck0} - \sum_{l=1}^n M_{ckl} \theta_{kl}, \quad (4)$$

$$\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l,$$

式中右边第一项 M_{ck0} 表示第 k 台机组轴上的恒定负载,右边第二项表示随失调角而变化部分的负载

4. 各台电轴机组及其负载的转动惯量(折合到电机轴上)彼此相等,即

$$J_1 = J_2 = J_3 = \dots = J_n = \text{常数}. \quad (5)$$

这个假设对于研究某些生产机械讲起来是合理的,因为由于失调角所引起惯量的不平衡对于整体惯量说起来是很小的.生产机械的转动很小,所以转动惯量虽然很大,但在这种运动中还是不必考虑.

这里有一个问题,就是一般生产机械是一整体,严格说起来,它的惯量不一定刚好划成几等分,为了便于计算起见,我们假定它们可以划成几等分,在生产机械倾斜不过大的情况下,应该不致于引起很大的错误.

引用上面四条假设公式(2)到(5),同时考虑到

$$\left. \begin{aligned} S_k &= 1 \pm \frac{w_k}{w_0}, \\ w_k &= \frac{1}{P} \frac{d\theta_k}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(在逆磁场旋转时取正号,顺磁场旋转时取负号;又因机械角度为电角度的 $\frac{1}{P}$,所以等式右边应乘以 $\frac{1}{P}$),则公式(1)化为

$$\frac{J\ddot{\theta}_k}{P} = (M_0 - M_s S_k) + A - \sum_{l=1}^n [B \cos \theta_{kl} + C \sin \theta_{kl}] - \left[M_{ck0} - \sum_{l=1}^n M_{ckl} \theta_{kl} \right],$$

式中 $\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l$, 即

$$\ddot{\theta}_k \pm \frac{M_s \dot{\theta}_k}{Jw_0} + \frac{P}{J} \sum_{l=1}^n [B \cos \theta_{kl} + C \sin \theta_{kl} - M_{ckl} \theta_{kl}] - P \left(\frac{M_0 - M_s + A}{J} \right) + \frac{PM_{ck0}}{J} = 0. \quad (7)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \pm \frac{M_s}{J\omega_0} &= a, \\ \frac{PB}{J} &= b, \\ \frac{PC}{J} &= c, \\ \frac{PM_{ckl}}{J} &= d_k, \\ P\left(\frac{M_0 - M_s + A}{J}\right) &= e, \\ \frac{PM_{ck0}}{J} &= f_k, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(这里正号是应用于逆磁场,负号应用顺} \\ \text{磁场,但 } M_s \text{ 在逆磁场时为正,顺磁场时为} \\ \text{负,所以 } a \text{ 恒为正值)} \end{array} \quad (7a)$$

则(7)式可以写成为

$$\ddot{\theta}_k + a\dot{\theta}_k + \sum_{l=1}^n [b \cos \theta_{kl} + c \sin \theta_{kl} - d_{kl} \theta_{kl}] - e + f_k = 0, \quad (7b)$$

式中 $k = 1, 2, \dots, n$; $\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l =$ 失调角(超前为正).

现在我们要研究的是失调角 θ_{kl} , 而不是绝对的角度 θ_k , 因此可以在(7b)式中令 $k = 1$ 与 $k = k$ 两式相减, 得到

$$\ddot{\theta}_{1k} + a\dot{\theta}_{1k} + \sum_{l=1}^n [b(\cos \theta_{1l} - \cos \theta_{kl}) + c(\sin \theta_{1l} - \sin \theta_{kl}) - d_{1l} \theta_{1l} + d_{kl} \theta_{kl}] + (f_1 - f_k) = 0, \quad (8)$$

式中 $\theta_{1k} = \theta_1 - \theta_k$; $k = 1, 2, \dots, n$.

因 $\theta_{kl} = -\theta_{lk}$ 及 $\theta_{1n} = \theta_{12} + \theta_{23} + \dots + \theta_{(n-1)n}$, 公式(8)中实际上只有 $(n-1)$ 个未知失调角, 所以联立方程式(8)在理论上一定是可以解的.

现以四台电轴为例来简化公式(8), 以便求解; 在由四点拖动的生产机械中, 只有四套机组. 如果假定生产机械是一刚体, 则 $\theta_{12} = \theta_{34}$, 这样四台电轴实际上只有两个自由度了.

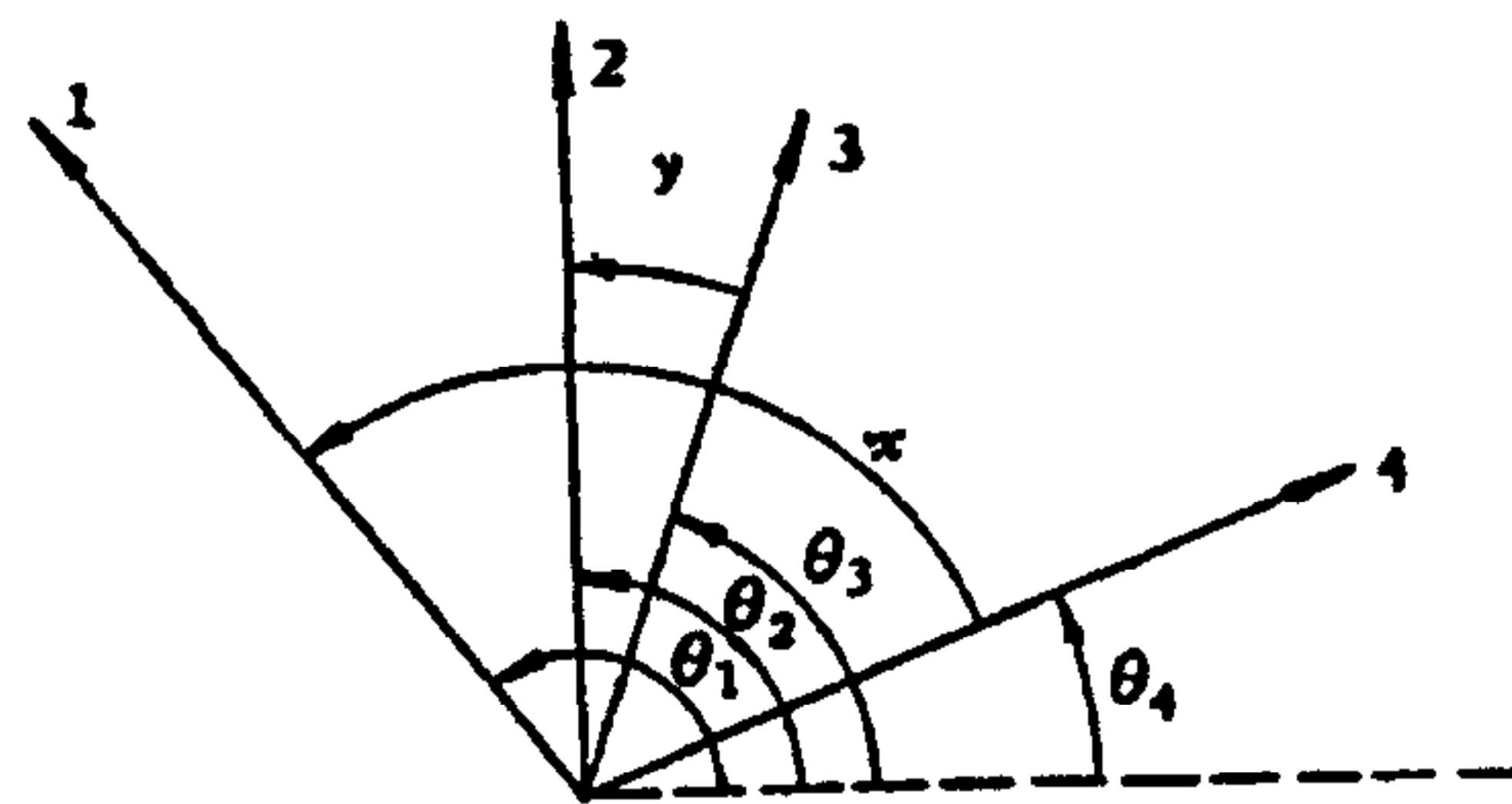


图 4 四台电轴的转角与失调角

令 $x = \theta_{14} = \theta_1 - \theta_4$, $y = \theta_{23} = \theta_2 - \theta_3$, 于是从公式(8)得(余弦项恰巧消去)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + 2c \left[\sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \right] - K_g x - K_h y + (f_1 - f_4) &= 0, \\ \ddot{y} + a\dot{y} + 2c \left[\sin y + 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} \right] - K'_g y - K'_h x + (f_2 - f_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上式中所有 a_1, b_1, \dots, n_1 等系数都是 x_1, x_2, \dots, x_n 及其 $m-1$ 次以下导数的函数(包括 $m-1$ 次导数在内), a_2, b_2, \dots, n_2 是 x_1, x_2, \dots, x_n 及其 $m-2$ 次以下导数的函数, 余此类推, 所以这个联立方程组是最一般化的.

方程(11)可以改写为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(m)} &\equiv \frac{d^m x_1}{dt^m} = -F_1, \\ x_2^{(m)} &\equiv \frac{d^m x_2}{dt^m} = -F_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(m)} &\equiv \frac{d^m x_n}{dt^m} = -F_n, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= a_1 \frac{d^{m-1} x_1}{dt^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{dx_1}{dt} + a_m, \\ \dots\dots\dots \\ F_n &= n_1 \frac{d^{m-1} x_n}{dt^{m-1}} + \dots + n_{m-1} \frac{dx_n}{dt} + n_m, \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

联立方程组(12)可以依照下列步骤逐步求解之:

1) 设已知 x_1, x_2, \dots, x_n 及其 $m-1$ 次以下导数的起始条件(在 t_0 时), 于是由(12)式可以求出

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(m)}(t_0) &= -F_1(t_0), \\ x_2^{(m)}(t_0) &= -F_2(t_0), \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(m)}(t_0) &= -F_n(t_0), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2) 设运动从 t_0 到 t_1 , $t_1 = t_0 + \Delta t_0$, Δt_0 是一很短的时间间隔. 于是可得各微增量如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1^{(m-1)}(t_0) &= \Delta t_0 x_1^{(m)}(t_0)^1, \\ \Delta x_1^{(m-2)}(t_0) &= \Delta t_0 \left[x_1^{(m-1)}(t_0) + \frac{\Delta x_1^{(m-1)}(t_0)}{2} \right], \\ \dots\dots\dots \\ \Delta \ddot{x}_1(t_0) &= \Delta t_0 \left[\ddot{x}_1(t_0) + \frac{\Delta \ddot{x}_1(t_0)}{2} \right], \\ \Delta \dot{x}_1(t_0) &= \Delta t_0 \left[\dot{x}_1(t_0) + \frac{\Delta \dot{x}_1(t_0)}{2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

1) 严格说起来(14)式中第一式的 $x_1^{(m)}(t_0)$ 也应该代以 t_0 到 t_1 的平均值, 即

$$\Delta x_1^{(m-1)}(t_0) = \Delta t_0 \left[x_1^{(m)}(t_0) + \frac{\Delta x_1^{(m)}(t_0)}{2} \right].$$

其中 $\Delta x_1^{(m)}(t_0) = \Delta t_0 [x_1^{(m+1)}(t_0)]$. 假如需要的话, 后式括号内的数值还可以再取平均值, 直至误差可以忽略不计为止, 这样我们就把相应的导数起始值 $x_1^{(m+1)}(t_0)$, $x_1^{(m+2)}(t_0)$, \dots 都求出来, 当然这都是可以做到的. 事实上只要取第一个时间间隔 t_0 小一点, 那就可以直接引用(14)式能达到所需的准确度, 不必求高次导数起始值了.

间的长短只需做到能说明问题即可。

这种求解的方法不需要引用相图的概念,直接求出解答.对于任何复杂的非线性联立方程都是适用,当然这里也包括解单个高阶非线性方程。

例如在四点拖动的刚体生产机械中,虽有四台电轴,但由于 $\theta_{12} = \theta_{34}$,实际只需解二自由度二阶非线性方程如下(见公式 9a):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -F_1(\dot{x}_1, x, y), \\ \ddot{y} &= -F_2(\dot{y}, y, x). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

现在只需在前述步骤中,令 $m=2, n=2, x_1=x, x_2=y$,即可求得解答.根据某一生产机械的实际情况,上式化为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -6.23\dot{x} - 666 \left[\sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \right] + 0.714x + 0.529y + 219, \\ \ddot{y} &= -6.23\dot{y} - 666 \left[\sin y + 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2} \right] + 0.714y + 0.529x + 116. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

计算步骤于下:取 $\Delta t_0 = 0.005$ 秒,设 $t_0 = 0$ 时, $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = x(t_0) = y(t_0) = 0$,

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t_0) &= -6.23\dot{x}(t_0) - 666 \left[\sin x_1(t_0) + 2 \sin \frac{x(t_0)}{2} \cos \frac{y(t_0)}{2} \right] + 0.714x(t_0) + \\ &\quad + 0.529y(t_0) + 219 = 219, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t_0) &= \Delta t_0 \ddot{x}(t_0) = 0.005 \times 219 = 1.095, \\ \Delta x(t_0) &= \Delta t \left[\dot{x}(t_0) + \frac{\Delta \dot{x}(t_0)}{2} \right] = 0.005 \times \frac{1.095}{2} = 2.74 \times 10^{-3}, \\ t_1 &= t_0 + \Delta t_0 = 0.005 \text{ 秒}, \\ \dot{x}_1(t_1) &= \dot{x}(t_0) + \Delta \dot{x}(t_0) = 1.095, \\ x_1(t_1) &= x(t_0) + \Delta x(t_0) = 2.74 \times 10^{-3}, \end{aligned}$$

$y(t)$ 和 $x(t)$ 的其它值的计算用相同的办法可以求出。

这样得到的结果,证明系统的过渡过程是减幅振荡,最后 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别趋近稳态解答 0.164 和 0.0872 弧度。

4 四台电轴在对称情况下运转

前面已经指出当生产机械四台电轴运行时,如果假定生产机械是一刚体,则 $\theta_{12} = \theta_{34}$. 这样四台电轴实际上只有两个自由度.本节所谓对称运转是仅指生产机械在 $\theta_{14} = \theta_{23}$ 及 $\theta_{23} = 0$ 两种情况.下面分别讨论这两个问题。

1. 一面倾斜

如果生产机械只有纵向倾斜没有横向倾斜,则 $\theta_{14} = \theta_{23}$,于是在公式(9a)中, $x = y$ 那末 $f_4 - f_1$ 必须等于 $f_3 - f_2$,则两个公式完全相同,可以写为下式:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 4c \sin x - (K_g + K_h)x - (f_4 - f_1) = 0, \quad (18)$$

上式可以用一种简便绘图法解之,这是从 Liénard 绘图法^[3]推导出来的新方法.令

$$u = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \text{ 则}$$

$$\ddot{x} = \frac{du}{dt} = u \frac{du}{dx}$$

于是(18)式,可以化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{-au - [4c \sin x - (K_g + K_h)x - (f_4 - f_1)]}{u} = \frac{-\phi(u) - f(x)}{u}, \quad (19)$$

其中

$$\phi(u) = au,$$

$$f(x) = 4c \sin x - (K_g + K_h)x - (f_4 - f_1).$$

根据(19)式我们就可以很方便地绘出相平面图,其步骤如下:

1) 绘出 $\phi(u) - u$ 及 $f(x) - x$ 曲线,如图 6(a)及(b)所示.

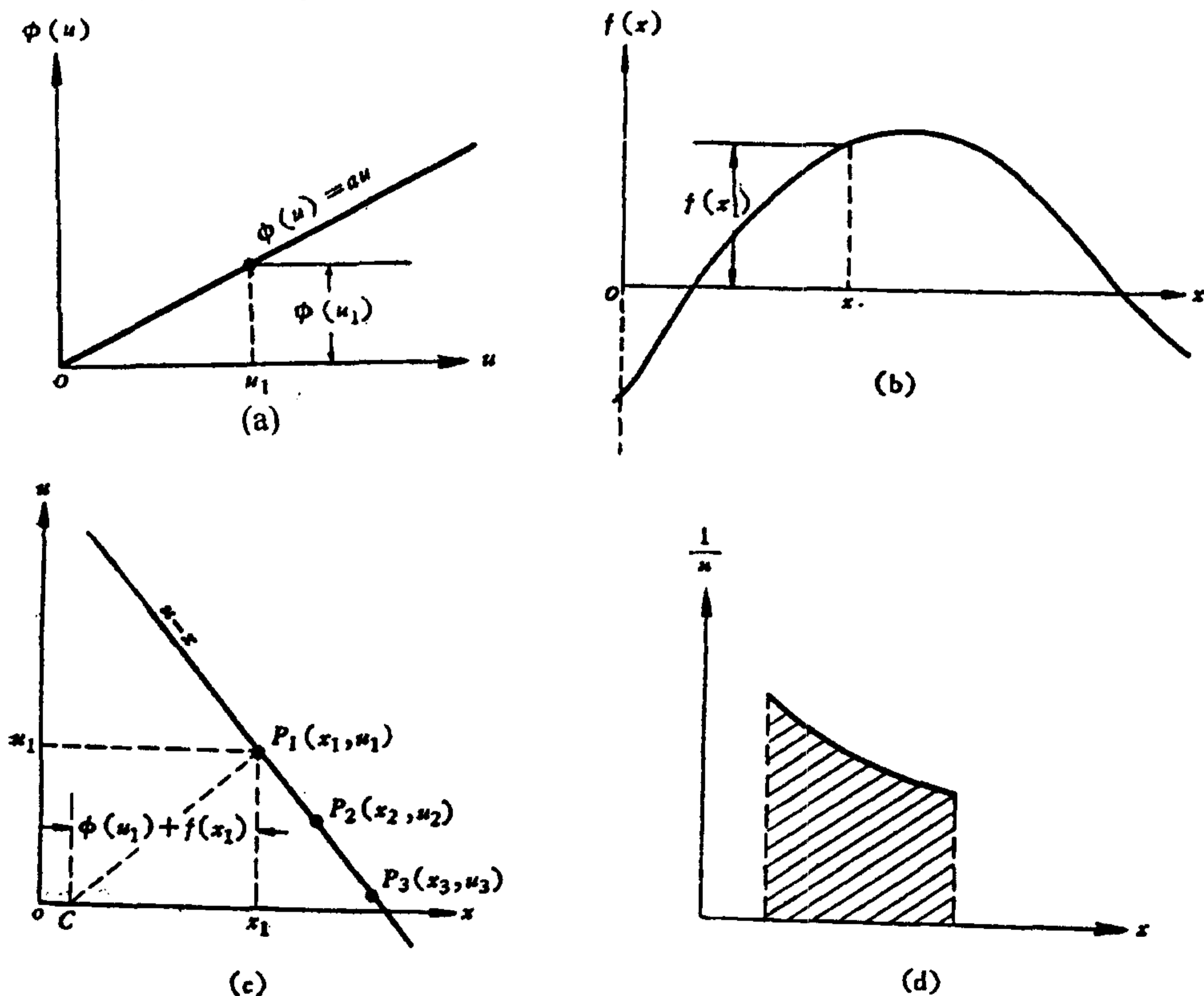


图 6

2) 在 $u - x$ 平面上(图 6(c))过已知点 $P_1(x_1, u_1)$ (第一个已知点可以看为起始条件), 作 u 轴的平行线交 x 轴于 x_1 , 在 x 轴上取 $Cx_1 = \phi(u_1) + f(x_1)$.

3) 以 C 为圆心, CP_1 为半径画一短弧线 P_1P_2 , 则 P_1P_2 即为相道 $u - x$ 曲线的一部分. 因为直线 CP_1 的斜率 $\frac{u_1}{\phi(u_1) + f(x_1)}$ 是 $\frac{du}{dx}(x_1, u_1)$ 的负倒数, 所以过 $P_1(x_1, u_1)$ 点的 $u - x$ 曲线一定与 CP_1 直线相垂直.

4) 再从 P_2 点开始, 重复上面 2), 3) 步骤作出 $P_2 P_3$, 如此继续下去, 则可作出所需的相道, 从这个相平面图我们就不难判定系统的稳定性及振荡问题.

5) 如果需要时间解答, 我们可以从相道曲线, 绘出 $\frac{1}{u} - x$ 曲线, 如图 6(d) 所示, 曲线下的面积是时间 t , 因为

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad \text{所以} \quad t = \int \frac{1}{u} dx.$$

假如生产机械只有横向倾斜而无纵向倾斜, 则 $\theta_{14} = -\theta_{23}$, $f_4 - f_1 = -(f_3 - f_2)$, (9a) 中二式还是相同, 所以上述的解法同样适用.

2. 对角倾斜

如果生产机械运转中只有两对角倾斜(如 $\theta_{14} = x \neq 0$), 另两对角保持平行($\theta_{23} = y$) = 0, 于是公式(9a)化为

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 2c \left[\sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \right] - K_g x - (f_4 - f_1) = 0, \quad (20)$$

上述绘图方法完全适用于解(20)式, 只须在(19)式中, 令

$$f(x) = 2c \left[\sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \right] - K_g x - (f_4 - f_1)$$

即可, 其他作法完全相同.

5 结 论

综上所述可得出下列几条结论:

1) 用直接近似求解法解非线性联立方程简便易行, 准确可靠, 能解一般的高阶非线性方程, 也能解多元的高阶非线性联立方程, 所以对于一般非线性控制系统的分析都是适用的.

2) 过于复杂的问题可以应用数字计算机或模拟计算机求解, 但一般三阶以下的非线性联立方程及单个五阶以下的非线性方程, 直接计算还是很快.

3) 相图及时间解答可以同时由所得数值画出, 不需要像一般相图法那样从相图上逐段积分才能求出时间的解答.

4) 因为阻尼系数 a 与 M_s 成正比, 所以加强主机机械特性可以解决电轴系统的稳定性及非线性振荡问题.

参 考 文 献

1. 萨多夫斯基, 感应电动机的协调旋转, 马成叶译, 科技出版社.
2. Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Издательство Ленинградского Университета, Ленинград, СССР, 1958
3. Stoker J. J., Nonlinear Vibrations, Interscience Publishers, Inc., New York, U. S. A., 1957.