第28卷 第1期
2002年1月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 1
Jan., 2002

研究简报

非线性采样控制系统的稳定性[1)]

邢科义 赵天绪 张东红

(西安电子科技大学应用数学系 西安 710071)

关键词 采样系统，稳定性，混杂系统

中图分类号 TP13

STABILITY THEORY FOR NONLINEAR SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS

XING Ke-Yi ZHAO Tian-Xu ZHANG Dong-Hong

(*Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an* 710071)

Key words Hybrid system, sampled system, stability

1 引言

采样控制系统是一类典型的混杂系统，它是由非线性连续时间对象和数字控制器耦合而成. 其对象可用一阶微分方程描述，而控制器可用一阶差分方程描述. 对这类系统的研究引起了广泛的兴趣. 文献[1～4]分别研究了关于状态，控制为线性或关于控制为线性的系统的定性性质，建立了相应系统的稳定性. 本文研究对象可用非线性微分方程描述的这类混杂动态系统的稳定性理论，给出了这类系统的 Lyapunov 一致渐近稳定的条件及不稳定的条件. 证明了当非线性系统的线性化系统的系数矩阵是 Schur 稳定时，则非线性系统本身是 Lyapunov 一致渐近稳定的.

2 采样数据控制系统的稳定性

非线性采样数据控制系统的对象可用一阶微分方程，控制器可用一阶差分方程描述为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(k)), & t \in [k, k+1), \\ \boldsymbol{u}(k+1) = C\boldsymbol{u}(k) + D\boldsymbol{x}(k), & k \in N. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$，$\boldsymbol{u} \in R^m$，$\boldsymbol{f}: R^n \times R^m \to R^n$ 具有连续的一阶偏导数，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，$C \in R^{m \times m}$，

1) 国家自然科学基金(69974028)、教育部高等学校骨干教师资助计划、西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室基金、陕西省教委专项科研基金(99JK139)资助.

收稿日期 1999-08-20 收修改稿日期 2001-02-24

$D\in R^{m\times n}$，而 R,N 分别是实数和非负整数集.

文献[1～3]针对 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(k))=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(k)$，文献[4]针对 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(k))=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+B\boldsymbol{u}(k)$，建立了相应系统的一致渐近稳定性. 由对系统(1)的假设知 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(k))=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(k))$，其中 $A=[\boldsymbol{f}_x(\mathbf{0},\mathbf{0})]$，$B=[\boldsymbol{f}_u(\mathbf{0},\mathbf{0})]$，而 $\lim\limits_{\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|\to 0}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(k))/\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|=\mathbf{0}$，这里 $\|\cdot\|$ 为 Euclidean 范数. 故系统(1)的线性化系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(k), & t\in[k,k+1),\\ \boldsymbol{u}(k+1)=C\boldsymbol{u}(k)+D\boldsymbol{x}(k), & k\in N.\end{cases}\tag{2}$$

引理 1. 系统(2)的零平衡点$(\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 一致渐近稳定的充分必要条件是 $H\equiv\begin{bmatrix}H_1 & H_2\\ D & C\end{bmatrix}$ Schur 稳定，其中 $H_1=\mathrm{e}^{A}$，$H_2=\int_0^1\mathrm{e}^{A(1-\tau)}\mathrm{d}\tau\cdot B$.

对象方程有解 $\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{A(t-k)}\boldsymbol{x}(k)+\int_k^t\mathrm{e}^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(k)\mathrm{d}\tau+\int_k^t\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(k))\mathrm{d}\tau$，$t\in[k,k+1)$. 故当 $t=k+1$ 时，有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k+1)\\ \boldsymbol{u}(k+1)\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\ \boldsymbol{u}(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{A(k+1-\tau)}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(k))\mathrm{d}\tau\\ 0\end{bmatrix}\tag{3}$$

令 $\boldsymbol{E}(k)\equiv\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{A(k+1-\tau)}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(k))\mathrm{d}\tau$，$\boldsymbol{R}(k)\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}(k)\\ 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w}(t)\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{u}(k)\end{bmatrix}$，$k=[t]$,这里[.]是取整函数. 则式(3)可写为紧凑的形式 $\boldsymbol{w}(k+1)=H\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{R}(k)$.

现在证明本文的主要结果.

定理 1. 设在系统(1)中，$\boldsymbol{f}$ 具有连续的一阶偏导数，$\boldsymbol{f}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$，矩阵 H 是 Schur 稳定的，则系统(1)的平衡点$(\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是一致渐近稳定的.

证明. 由 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{w}(t)\to 0\|}\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}(t))\|/\|\boldsymbol{w}(t)\|=0$ 知，存在 $\delta>0$，当 $\|\boldsymbol{w}(t)\|\leqslant\delta$ 时，有 $\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}(t))\|\leqslant\|\boldsymbol{w}(t)\|$. 如果 $\|\boldsymbol{w}(k)\|<\delta_1\equiv(\|B\|+4)^{-1}\mathrm{e}^{-(\|A\|+1)}\delta$，则 $\|\boldsymbol{w}(k)\|<\delta_1<\delta$. 设 t_0 是$(k,k+1]$中的最大数，使得当 $t\in[k,t_0]$时，$\|\boldsymbol{w}(t)\|\leqslant\delta$. 可以证明 $t_0=k+1$. 对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_0=\varepsilon/[\mathrm{e}^{2\|A\|+1}(\|B\|+3)]$，由 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{w}(t)\|\to 0}\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}(t))\|/\|\boldsymbol{w}(t)\|=0$知,存在 $\delta_2>0(\delta_2<\delta_1)$,当 $\|\boldsymbol{w}(k)\|\leqslant\delta_2$ 时,$\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{w}(t))\|\leqslant\|\boldsymbol{w}(t)\|\varepsilon_0$. 故当 $\|\boldsymbol{w}(k)\|<\delta_3\equiv\delta_2/[\mathrm{e}^{\|A\|+1}(\|B\|+3)]$时,对任意的 $t\in[k,k+1)$，由 Gronwell 不等式，$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant(\|\boldsymbol{x}(k)\|+(\|B\|+1)\cdot\|\boldsymbol{u}(k)\|)\mathrm{e}^{(\|A\|+1)(t-k)}$，$t\in[k,k+1]$. 故

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}(t)\|+\|\boldsymbol{u}(k)\|\leqslant(\|\boldsymbol{x}(k)\|+(\|B\|+2)\cdot\|\boldsymbol{u}(k)\|)\mathrm{e}^{(\|A\|+1)(t-k)}\leqslant\\ (\|B\|+3)\cdot\|\boldsymbol{w}(k)\|\cdot\mathrm{e}^{(\|A\|+1)(t-k)}\leqslant\delta_2,\quad t\in[k,k+1]\end{aligned}\tag{4}$$

而且 $\|\boldsymbol{E}(k)\|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{w}(k)\|$. 由 H 的稳定性知,存在正定矩阵 P 使得 $H^{\mathrm{T}}PH-P=-I$，其中 $P,I\in R^{(n+m)\times(n+m)}$，$I$ 为单位阵. 定义 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{w}(t))=\boldsymbol{w}(t)^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{w}(t)$. 故当 $\|\boldsymbol{w}(k)\|<\delta_3$ 时，对正整数 $k\in N,V(\boldsymbol{w}(k+1))-V(\boldsymbol{w}(k))\leqslant\|\boldsymbol{w}(k)\|^2(-1+2\varepsilon\cdot\|PH\|+\|P\|\cdot\varepsilon^2)$. 当取 $\varepsilon>0$ 使得 $\mu\equiv 2\varepsilon\|PH\|+\|P\|\varepsilon^2<1$ 时，$V(\boldsymbol{w}(k+))-V(\boldsymbol{w}(k))\leqslant(\mu-1)\cdot\|\boldsymbol{w}(k)\|^2<0$，即 $V(\boldsymbol{w}(k))$是单调递减的. 又 $\lambda_1\|\boldsymbol{w}(k+1)\|^2\leqslant V(\boldsymbol{w}(k+1))\leqslant V(\boldsymbol{w}(k))\leqslant\|\boldsymbol{w}(k)\|^2\lambda_m$，其中,$\lambda_1$，$\lambda_m$ 分别是 P 的最大和最小特征值. 当有 k_0 使得 $\|\boldsymbol{w}(k_0)\|\leqslant(\lambda_1/\lambda_m)^{1/2}\delta_3$ 时，$\|\boldsymbol{w}(k_0+1)\|\leqslant\delta_3$，从而也有 $\lambda_1\|\boldsymbol{w}(k_0+2)\|^2\leqslant$

$V(w(k_0+2))\leqslant V(w(k_0))\leqslant \|w(k_0)\|^2\lambda_m$. 故 $\|w(k_0+2)\|\leqslant\delta_3$. 递归可得当 $k\geqslant k_0$ 时，$\|w(k)\|\leqslant\delta_3$，从而

$$V(w(k+1))-V(w(k))\leqslant(\mu-1)\cdot V(w(k))(\lambda_m)^{-1}\leqslant (\mu-1)(\lambda_m)^{-1}V(w(n)),\quad n\geqslant k \tag{5}$$

从 k 到 n 对式(5)两边求和并整理得

$$V(w(n))\leqslant(1-\mu)^{-1}\cdot(V(w(k))-V(w(n+1)))(n+1-k)^{-1}\lambda_m\leqslant (1-\mu)^{-1}\cdot V(w(k))\cdot(n+1-k)^{-1}\lambda_m \tag{6}$$

故当 $k\to\infty$ 时，$V(w(k))\to 0$，即 $\|w(k)\|$ 单调递减以 0 为极限. 又由式(6)知 $\lim\limits_{t\to\infty}\|w(t)\|=0$，所以平衡点 $(\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是系统(1)的一致渐近稳定点.　　证毕.

定理 2. 当矩阵 H 至少有一个特征值在单位圆之外时，系统(1)的平衡点 $(\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是不稳定的.

证明. 由假设存在对称矩阵 P 使得 $H^{\mathrm{T}}PH-P=-I$，而且 P 至少有一个负特征值. 故 Lyapunov 函数 $V(w(t))=w(t)^{\mathrm{T}}Pw(t)$ 在平衡点 $(\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 的任何邻域中都有点 w 使得 $V(w)<0$. 类似定理 1，可以证明存在 $\delta>0$，当 $\|w(k)\|\leqslant\delta$ 时，$V(w(k+1))-V(w(k))<0$. 取 $w(0)$ 为满足 $\|w(0)\|\leqslant d\leqslant\delta$，而使 $V(w(0))$ 在 $\|w(0)\|\leqslant d$（d 是一给定的正数）内达到最小值. 又 $V(w(1))<V(w(0))$. 从而 $\|w(1)\|>d$，即平衡点 $(\mathbf{0}^{\mathrm{T}},\mathbf{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是不稳定的.

证毕.

3　结论

由非线性连续时间对象与数字控制器藕合而成的采样控制系统是一类典型的混杂系统. 本文讨论了这类系统的稳定性，给出了保证系统一致渐近稳定的条件以及不稳定的条件；建立了系统零点与其线性化系统零点的稳定性之间的关系；证明了只要其线性化系统的系数矩阵是 Schur 稳定的；则非线性系统的零平衡点是一致渐近稳定的.

参 考 文 献

1　Iglesias P A. On the stability of sampled-data linear time-varying feedback systems. In: Proc. 33rd Conf. Decision and Control. Lake Buena Vista. FL, 1994. 219～224

2　Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time invariant plants with periodic digital controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1988, **33**(4):820～832

3　Hagiwara T, Araki. Design of a stable feedback controller based on the multirate sampling of the plant output. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1988, **33**(4):812～819

4　Ye H, Michel A N, Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**: 461～474

邢科义　博士. 现为西安电子科技大学教授. 研究方向为 DEDS 调度与控制、Petri 网理论与应用.

赵天绪　博士. 现为西安电子科技大学副教授.

张东红　西安电子科技大学硕士生.