

研究简报

基于凸壳的透视变换下的点模式匹配方法¹⁾

张立华 徐文立

(清华大学自动化系 北京 100084)

关键词 点模式匹配, 透视变换, 凸壳, 射影坐标, 交比

中图分类号 TP391.4

CONVEX HULL BASED POINT PATTERN MATCHING UNDER PERSPECTIVE TRANSFORMATION

ZHANG Li-Hua XU Wen-Li

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

Key words Point pattern matching, perspective transformation, convex hull, projective coordinates, cross ratio

1 引言

点模式匹配是计算机视觉和模式识别领域中的一个重要课题. 它的主要任务是, 将满足一定几何变换关系的同一场景的两幅图像中的点, 进行匹配成对, 从而识别和定位物体. 它适用于解决基于光学传感器的应用中的许多问题, 如图像配准、物体识别、目标跟踪、自主导航和姿态测定等.

鉴于透视变换下点集匹配问题的复杂性, 有些研究者对问题作了某种近似和简化, 如: 当物体的大小和物体与相机的距离相比可忽略不计时, 相机成像的透视变换可用仿射变换来有效近似^[1,2]. 但这种假设在许多实际应用中是难以成立的(文献[3]中专门研究了用仿射不变量近似透视不变量的可能性), 因而直接研究透视变换下的点模式匹配问题是很必要的.

本文利用透视变换保持平面多边形各边有序性的观点^[4], 基于计算几何理论, 首先找到二维点集的凸壳. 如果凸壳的点数大于等于 5, 就利用射影坐标的概念首先实现凸壳上各点的匹配, 再以凸壳上的任意已经匹配好的四点为基, 通过计算凸壳内部各点的射影坐标实现这些凸壳内点的匹配; 如果凸壳的点数为 3 或 4, 则利用凸壳内部任意两点所连直线与凸壳上的两条边的交点所形成的共线四点的交比, 先实现凸壳内的各点的匹配, 再利用射影坐标实现凸壳的匹配. 不论何种情况, 我们都将交比的计算量由穷举法的 $O(N^5)$ 减少为 $O(N^2)$.

1) 清华大学 985 基金资助

2 透视变换下的点模式匹配算法

关于交比、射影坐标系的预备知识请参阅文献[5]. 考察透视变换, 易知它有三种重要性质

- 1) 透视变换不改变平面点集的凸凹性, 即经过透视变换后凸壳上的点仍在凸壳上, 而非凸壳上的内点仍然是内点;
- 2) 透视变换保持凸壳上的点的有序性, 即凸壳上的点的彼此相邻的顺序关系不改变;
- 3) 透视变换不改变点和直线的衔接关系, 即接合性不变.

根据以上三条性质, 我们将透视变换下的平面点集匹配问题分解为匹配凸壳和匹配内点两个子问题来解决. 因此, 整个算法的第一步是搜寻凸壳, 记全体凸壳上的点组成集合 $C = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, 不在凸壳上的点皆为内点, 它们组成集合 $D = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$. 显然 C 和 D 的并集为整个点模式 X .

根据不变量理论, 一般位置的平面点集在射影变换下存在不变量的必要条件是点集至少有 5 个点(从射影坐标系的建立需要四个点也不难理解这一点). 因此, 如果凸壳上的点数大于等于 5, 由于凸壳上的点已经足以构造出不变量, 故可先对凸壳上的点进行匹配, 然后再匹配内点; 而当凸壳上的点数少于 5 点, 即只有 3 点或 4 点时, 凸壳不能单独匹配, 此时需首先匹配内点. 下面将按这两种情形分别加以讨论.

1) 凸壳上含三点或四点情形

对凸壳含三点和四点情形, 本文采用了相同的处理方法, 故仅以三点为例说明匹配方法.

a) 匹配内点

如图 1 所示, 考虑凸壳内部的任一内点 P_i , 过 P_i 和任意一个其它内点 P_j 连接一条直线, 设该直线与凸壳的某两条边的交点为 A_{ij}, B_{ij} . 显然由 A_{ij}, P_i, B_{ij} 和 P_j 这四个共线点决定了一个交比

$$c_{ij} = (A_{ij}P_i; P_jB_{ij}). \quad (1)$$

根据射影变换保持接合性, 易见这样定义的交比在射影变换后的对应点模式中保持不变. 对每个内点 P_i 定义集合 $f_{P_i}^D = \{c_{ik}, k=1, 2, \dots, m, k \neq i\}$, 称 $f_{P_i}^D$ 为内点 P_i 的属性集, 易见, 在射影变换前后对应点的属性集相同. 对于具有一般几何位置分布的二维点集, 显然, 可以通过比较射影变换前后各内点的属性集实现内点的匹配.

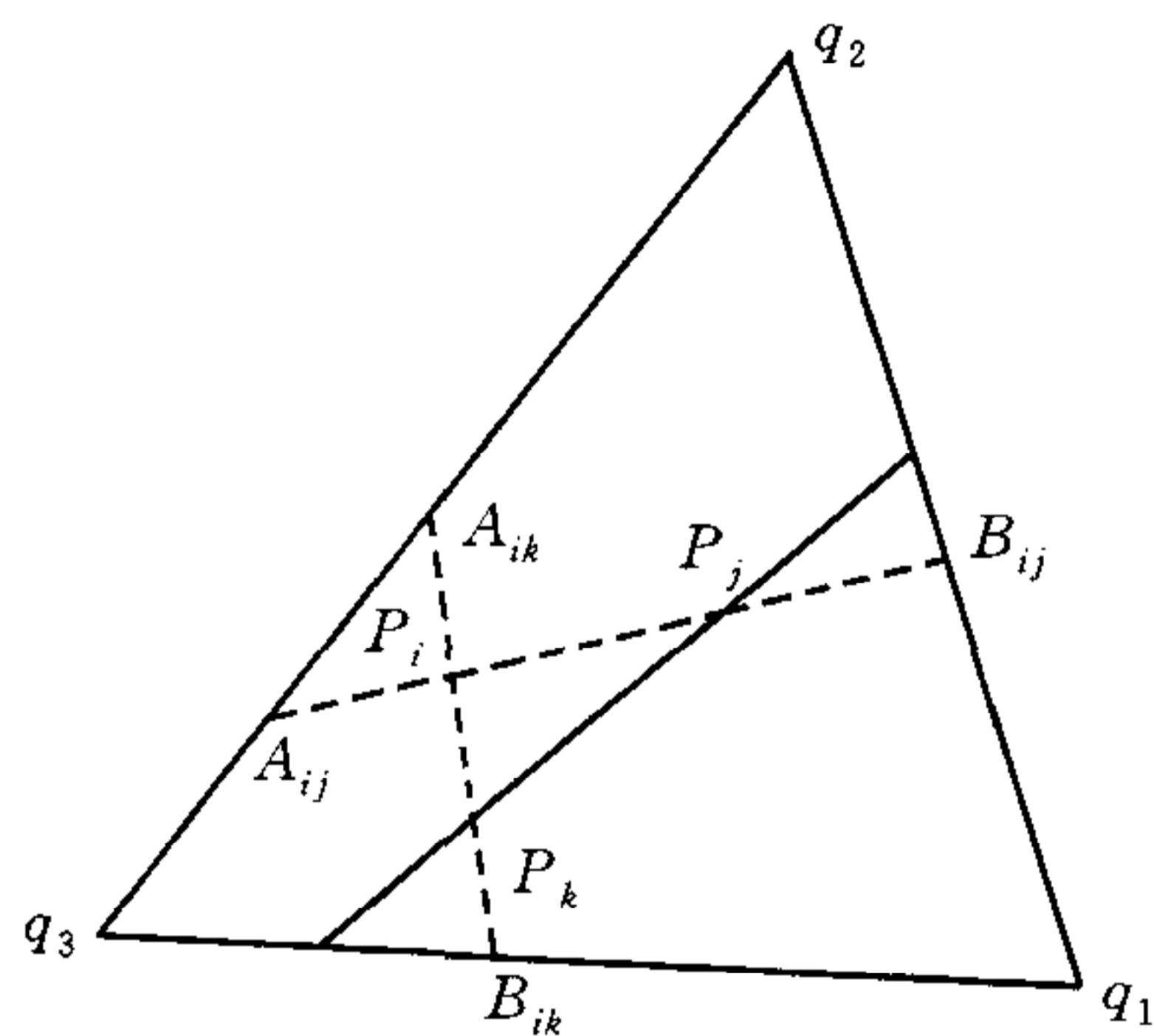


图 1 凸壳上含三点情形

b) 匹配凸壳

由于内点的数目任意, 故不能保证内点的数目足够组成射影坐标系. 任取已匹配好的两个内点作为射影坐标系的 A_1, A_2 , 对凸壳集合 C 中的点从 q_1 开始, 令 $A_3 = q_1, E = q_2$, 计算 q_3 (当凸壳包含 3 点) 或 q_3, q_4 (当凸壳包含 4 点) 的射影坐标, 它们组成集合 $f_{q_1}^C$; 再令 $A_3 = q_2, E = q_3$, 计算 q_1 (当凸壳包含 3 点) 或 q_4, q_1 (当凸壳包含 4 点) 的射影坐标, 它们组成集合 $f_{q_2}^C$; 以此类推, 直到 C 中所有点都充当过 A_3 . 我们称 $f_{q_i}^C$ 为凸壳点 q_i 的属性集. 同理, 可求得 C' 中各点的属性集. 显然, 凸壳 C 和 C' 上对应点的属性集在射影变换下是不变的, 故通过比较射影变换前后各凸壳点的属性集, 可以实现凸壳的匹配.

根据上述原理,不难给出凸壳上含 3 点或 4 点情形的点模式匹配算法.

给定具有相同点数的两个待匹配点模式 X 和 X' ,使用寻找有限平面点集凸壳的 Graham 扫描方法^[6]找到点模式 X 的凸壳 $C = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 和内点集合 $D = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, 以及点模式 X' 的凸壳 $C' = \{q'_1, q'_2, \dots, q'_n\}$ 和内点集合 $D' = \{P'_1, P'_2, \dots, P'_m\}$, 其中 $n=3$ 或 4.

算法 1. (凸壳上含 3 点或 4 点情形的匹配算法)

步骤 1 匹配内点集合 D 和 D' .

I) 对于每一个点 $P_i \in D$, 向 D 中其它点 P_j 作直线 $P_i P_j$, 并计算它与凸壳的边的两个交点, 分别记为 A_i, B_j , 这两个记号的选取应满足有向线段 $A_i B_j$ 与 $P_i P_j$ 同向. 计算交比 $c_{ij} = (A_i P_i; P_j B_j)$, $j=1, \dots, m, j \neq i$, 并按升序将这 $m-1$ 个交比排列成一个向量 $f_{P_i}^D$, 称其为 P_i 的属性向量.

II) 仿照 I), 计算 D' 中的每个点 P'_i 的属性向量 $f_{P'_i}^{D'}$.

III) $\forall f_{P_i}^D, i=1, \dots, m$, 求 $f_{P'_i}^{D'}$, 使得 $\|f_{P'_i}^{D'} - f_{P_i}^D\| \leq \|f_{P'_k}^{D'} - f_{P_i}^D\|$ 对所有 $k=1, 2, \dots, m$ 成立. 至此得到 D 和 D' 的匹配结果 $\{(P_i, P'_i), i=1, \dots, m\}$.

步骤 2 匹配凸壳 C 和 C' . 为方便描述, 令 $q_{n+1} = q_i, \forall i=1, 2, \dots, n$, 取已经匹配好的两个内点对 $(P_1, P'_1), (P_2, P'_2)$.

I) 令 $A_1 = P_1, A_2 = P_2, \forall q_i \in C, i=1, 2, \dots, n$, 再令 $A_3 = q_i, E = q_{i+1}$ 组成射影坐标系, 按照逆时针顺序, 依次计算凸壳上相邻点 $q_{i+2}, q_{i+3}, \dots, q_{i+n-1}$ 的非齐次射影坐标, 并将这些射影坐标按此顺序依次排列组成一个向量 $f_{q_i}^C$, 称为点 q_i 的属性向量.

II) 仿照 I), 令 $A_1 = P'_1, A_2 = P'_2$, 计算 C' 中的点 q'_1 的属性向量 $f_{q'_1}^{C'}$.

III) 求 $f_{q_k}^C$, 使得 $\|f_{q_k}^C - f_{q'_1}^{C'}\| \leq \|f_{q_j}^C - f_{q'_1}^{C'}\|$ 对所有 $j=1, 2, \dots, n$ 成立. 至此得到凸壳的匹配结果: $(q_k, q'_1), (q_{k+1}, q'_2), \dots, (q_{k+n-1}, q'_n)$. 算法结束.

说明: 步骤 II) 中没有计算凸壳 C' 中全部点的属性向量, 而只计算了单个点 q'_1 的属性向量, 并在步骤 III) 中, 从凸壳 C 中寻找与 q'_1 相匹配的点 q_k . 仅从这一个匹配点对 (q_k, q'_1) 出发, 我们就可以断定凸壳上其余点的匹配关系: $(q_{k+1}, q'_2), \dots, (q_{k+n-1}, q'_n)$. 易见, 算法 1 充分利用了射影变换保持凸壳上的点的有序性的性质, 大大减少了计算量.

2) 凸壳上含五点或五点以上情形

由于凸壳上的点数已足够形成射影坐标系, 故可首先匹配凸壳.

a) 匹配凸壳. 从 q_1 开始, 令 $A_1 = q_i, A_2 = q_{i+1}, A_3 = q_{i+2}, E = q_{i+3}$ 组成射影坐标系, 依次计算 q_{i+4}, q_{i+5}, \dots 其它剩余各点的射影坐标, 它们组成凸壳点 q_i 的属性集 $f_{q_i}^C$, 显然, 对应点的属性集在射影变换下是不变的, 据此可实现凸壳的匹配.

b) 匹配内点. 取已匹配好的四个凸壳点组成射影坐标系, 计算各内点的射影坐标. 显然通过简单的比较就可实现内点的匹配.

限于篇幅, 本文不再给出此种情形下完整的点模式匹配算法.

3 算法计算复杂度分析

现在分析本文所给的两个算法的计算量. 由于射影坐标和交比的计算是算法中运算量最大的部分, 故我们主要讨论算法中射影坐标和交比的计算次数. 算法 1 中的步骤 2 在匹配

凸壳时,利用了凸壳上点的有序性顺序考察凸壳上的每一点,而每取一组射影坐标基只需计算不超过 N 个点的射影坐标值,故计算射影坐标的总次数不超过 $O(N^2)$;算法 1 的步骤 1 在匹配内点集时需计算每个内点的属性向量,而属性向量中的每个元素是一个交比,故此步骤总的计算交比的次数不超过 $O(N^2)$. 寻找有限平面点集凸壳的 Graham 扫描方法的算术和比较运算的计算量为 $O(N\log N)$,显然这个计算量要小于 $O(N^2)$ 次交比运算.

综上,并考虑到求解一个点的射影坐标相当于计算两次交比,故本文所给算法计算交比的总的次数不超过 $O(N^2)$. 这与简单地利用交比进行穷举匹配所需计算的 $O(N^5)$ 次交比相比,计算量大大降低.

4 仿真实验及结果

为了验证本文提出的算法,我们进行了大量仿真实验. 仿真结果表明,本文所提算法是有效的,限于篇幅,这里不再详细描述实验.

5 总结与讨论

本文利用计算几何理论,通过寻找待匹配点集的凸壳,将透视变换下的点集匹配问题分解为匹配凸壳和匹配内点两个子问题,利用射影坐标和交比,并利用凸壳上的点在透视变换下保持有序性,我们将透视变换下的点集匹配问题的计算复杂度由穷举法的 $O(N^5)$ 减少为 $O(N^2)$,大大减少了问题求解的计算量. 实验证明此新算法是快速有效的,并且由于射影坐标和交比不仅是透视变换下的不变量,还是一般的射影变换下的不变量,因此该算法不仅适用于求解基于模型的匹配问题,还适用于解决满足射影变换关系的任意两个二维点模式的匹配问题. 如同一平面点集在两个不同相机中的图像,甚至是匹配平面点集的像再次投影所成的像,而且相机不需事先作任何标定,因此具有较广的应用范围.

参 考 文 献

- 1 Jacobs D W. Optimal matching of planar models in 3D scenes. In: Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Press, 1991. 269~274
- 2 Lamdan Y, Schwantz J T, Wolfson H J. Object recognition by affine invariant matching. In: Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Press, 1988. 335~344
- 3 Cheng Y. Analysis of affine invariants as approximate perspective invariants. *Computer Vision and Image Understanding*, 1996, **63**(2):197~207
- 4 徐正伟, 吴成柯. 基于透视投影不变性的空间平面多边形识别. 电子学报, 1993, **21**(7):8~15
- 5 方德植, 陈奕培. 射影几何. 北京:高等教育出版社, 1983
- 6 Preparata F P, Shamos M I 著, 庄心谷译. 计算几何导论. 北京:科学出版社, 1990

张立华 1994年毕业于清华大学自动化系,2000年于该系获博士学位. 研究方向包括自动控制、计算机视觉等.

徐文立 1970年毕业于清华大学电机工程系,1980年于清华大学自动化系获硕士学位,1990年在美国科罗拉多大学电力与计算机工程系获博士学位,现为清华大学教授、博士生导师. 目前研究领域主要涉及自动控制、计算机视觉、机器人等.