短文

利用LQ逆问题参数化解研究鲁棒控制系统稳定界[1)]

王耀青
(武汉科技大学信息学院 武汉 430081)
(E-mail: Y.Q.Wang@263.net)

摘 要 研究了具有非线性扰动控制系统鲁棒稳定界的定义、优化等问题,而且分析了鲁棒控制稳定界与Riccati矩阵方程解的关系,给出了基于LQ最优控制逆问题参数化解的极大化鲁棒控制稳定界的优化算法.通过对上述问题的研究,使得约束条件下鲁棒控制系统稳定界与LQ最优控制逆问题的解法相联系.

关键词 鲁棒稳定界,Riccati矩阵方程,优化,LQ逆问题
中图分类号 TP273.1

STUDIES ON ROBUST STABLE BOUNDS OF CONTROL SYSTEMS VIA PARAMETRIC SOLUTION TO THE LQ INVERSE PROBLEM

WANG Yao-Qing
(*College of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan* 430081)
(E-mail: Y.Q.Wang@263.net)

Abstract The definitions and optimization problem of robust stable bounds, as well as the relations between robust stable bounds and the solution of Riccati matrix equation, are studied for a class of systems with nonlinear disturbance. Related optimization algorithms are presented for maximizing the robust stable bounds based on the parametric solution to the LQ inverse problem. By the results provided here, the robust stable bounds of control systems with constraints are related to the solution of LQ inverse problem.

Key words Robust stable bounds, Riccati matrix equation, optimization, LQ inverse problem

1) 湖北省自然科学基金(99J042)和湖北省教育厅科学研究计划(99B024)资助.
收稿日期 1999-10-20 收修改稿日期 2001-08-21

1 引言

目前,设计鲁棒控制系统的方法一般是依据系统的稳定条件定义适当形式的鲁棒稳定界,然后求解鲁棒控制解[1],主要目的是保证系统稳定.而对解的存在性、鲁棒稳定界的大小等问题研究较少[2].一般来说,这种控制系统的稳定性是以牺牲控制系统能量为代价的,以致于闭环控制系统特征值的实部可以无限制的小,具有很大的保守性.文献[3,4]提出了具有最小鲁棒控制器增益的设计思想和方法,文献[5]则利用插值法研究了极大化鲁棒稳定界的算法.它们在很大程度上降低了设计鲁棒控制系统的保守性,对研究鲁棒稳定界的优化方法具有一定的指导意义.但由于缺乏约束条件,其"最小"或"最优"特征也只是相对的,在没有极点约束下的鲁棒稳定界的优化缺乏实际意义.

鲁棒控制系统设计不只是定义一种鲁棒稳定界并给出相应算法,更重要的是在保证系统稳定的同时克服控制系统设计的保守性.本文将研究一类具有非线性扰动系统的鲁棒控制稳定界的定义和优化方法.在分析系统鲁棒性与 Riccati 方程解之间联系的基础上,利用最优控制系统的自由参数,给出确定鲁棒控制稳定界的优化命题及其算法,以获得切合实际应用的尽可能大的鲁棒稳定界.

2 问题的描述及主要结论

设具有非线性扰动控制系统的状态空间表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \in \mathfrak{R}^n$ 为包含了不确定参数在内的非线性扰动,$\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{R}^m$ 分别是系统的状态变量和控制变量,A,B 均为适当维数的实数矩阵.在状态反馈 $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}$ 控制下的闭环控制系统可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},K) \triangleq A_c\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},K) \tag{2}$$

其中 $f(\boldsymbol{x},K)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|_{\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}}$,它表示系统的非线性扰动与状态变量 $\boldsymbol{x}$ 和状态反馈系数矩阵 K 有关.本文所要研究的问题是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},K)$满足什么条件系统(2)能够稳定.

假设系统的状态完全可控,$\|\boldsymbol{x}\|$ 是矢量 $\boldsymbol{x}$ 的 2-范数,$\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$,定义鲁棒稳定指数

$$\kappa_w = \lambda_{\min}[Q]/\lambda_{\max}[P] \tag{3}$$

也可以称 κ_w 为鲁棒稳定界.式(3)中 P 是 Riccati 方程(4)的唯一对称正定解

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0, \quad Q = Q^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \quad R = R^{\mathrm{T}} > 0 \tag{4}$$

引理 1. 对于由方程(1)~(3)所描述的控制问题,如果 $K=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P$,则闭环控制系统(3)稳定的充分条件是 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},K)\| \leqslant \frac{1}{2}\kappa_w\|\boldsymbol{x}\|$.

证明略(参见文献[1,2,5]).

系统的鲁棒稳定界 κ_w 与(4)式中的矩阵 Q 以及与之对应的对称正定解 P 有关.如何利用矩阵 Q,P 优化 κ_w 是研究的重点.但是,研究没有极点约束的鲁棒稳定界的优化方法是没有实际意义.为了阐明这一观点,必须研究矩阵 Q,P 的关系.

众所周知,矩阵 P 是随着矩阵 Q 的增大而增大的.当矩阵 Q 变化时,考查矩阵 P 的变

化率对研究 κ_w 的极值具有实际意义.

定理 1. 设矩阵 P_1, P_2 分别是方程 $A^{\mathrm{T}}P_i+P_iA-P_iBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_i+Q_i=0$, $Q_i=Q_i^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, $i=1,2$ 的唯一对称正定解. 如果 Q_1, Q_2 满足 $Q_2=2Q_1$ 时,则不等式 $P_1<P_2\leqslant 2P_1$ 成立.

证明. 设矩阵 $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ 分别是方程(5),(6)的唯一对称正定解.

$$A^{\mathrm{T}}\overline{P}_1+\overline{P}_1A-\overline{P}_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_1+\overline{Q}_1=0,\quad \overline{Q}_1=\overline{Q}_1^{\mathrm{T}}\geqslant 0 \tag{5}$$

$$A_c^{\mathrm{T}}\overline{P}_2+\overline{P}_2A_c-\overline{P}_2BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_2+\overline{Q}_2=0,\quad \overline{Q}_2=\overline{Q}_2^{\mathrm{T}}\geqslant 0 \tag{6}$$

式中 $A_c=A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_1$. 当 $\overline{Q}_1=\overline{Q}_2$ 时,将(5)式减去(6)式,并做适当的变换得

$$A_c^{\mathrm{T}}(\overline{P}_1-\overline{P}_2)+(\overline{P}_1-\overline{P}_2)A_c+\overline{P}_1BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_1+\overline{P}_2BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_2=0 \tag{7}$$

由此可知 $\overline{P}_1\geqslant\overline{P}_2$. 将(5)式和(6)式相加,经过适当变换得

$$A^{\mathrm{T}}(\overline{P}_1+\overline{P}_2)+(\overline{P}_1+\overline{P}_2)A-(\overline{P}_1+\overline{P}_2)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(\overline{P}_1+\overline{P}_2)+2\overline{Q}_1=0 \tag{8}$$

由于矩阵 A_c 稳定,且 $\overline{P}_1\geqslant\overline{P}_2$,从而有 $\overline{P}_1<(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\leqslant 2\overline{P}_1$. 定义 $P_1=\overline{P}_1, P_2=(\overline{P}_1+\overline{P}_2)$, $Q_1=\overline{Q}_1$, $Q_2=2\overline{Q}_1$, 由式(5),(8)可知 $Q_2=2Q_1$,且有 $P_1<P_2\leqslant 2P_1$. 证毕.

定理 1 表明增大 Q,P 并没有同步增大,这有利于优化鲁棒稳定界 κ_w. 另一方面,由于 Q 的增大导致 P 的增大,进而增大了控制系统的反馈增益,从而使得系统的闭环特征值的实部变得更小. 所以,用增大 Q 扩大鲁棒稳定界的研究方法是保守的,是以增大控制器增益、充分减小闭环控制系统特征值的实部为代价的. 如果不加约束地通过 Q 对 κ_w 进行优化是没有实际意义的. 根据这一观点,本文首先给出有关最优极点配置方面的结论,进而研究在最优闭环极点约束条件下 κ_w 的优化命题及其求解方法.

3 关于最优极点配置

最优极点配置就是确定满足闭环特征值要求得矩阵 Q,从而优化 κ_w. 定义

$$\psi_i=CH\Lambda_i^{+}(HC\Lambda_i^{-})^{\mathrm{T}}=\psi_i^{+}(\psi_i^{-})^{\mathrm{T}},$$

$$\Lambda_i^{\pm}=[I_m\ \ \pm\lambda_{ci}I_m\cdots(\pm\lambda_{ci})^{n-1}I_m]^{\mathrm{T}},\quad \alpha_i=a(\lambda_{ci})a(-\lambda_{ci}),\quad C=(B\ \ AB\ \ \cdots\ \ A^{n-1}B),$$

其中 H 是第一行为 $[a_1I_m\ \ a_2I_m\ \ \cdots\ \ a_nI_m]$ 的左上三角 Toeplitz 矩阵,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为系统(1)的开环特征多项式

$$a(\lambda)=\det(\lambda I-A)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,\quad a_n=1$$

的系数. I_τ 为 $\tau\times\tau$ 维的单位矩阵, 在不致于混淆的情况下,文中将以 I 代替 I_τ.

定理 2[6,7]. 矩阵 Q(在 $R=I$ 的条件下)参数化表示为

$$Q=-(\alpha_1\xi_1\ \ \alpha_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n\xi_n)(\psi_1\xi_1\ \ \psi_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \psi_n\xi_n)^{-1} \tag{9}$$

的充要条件是闭环控制系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=(A-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}$ 的特征值为 λ_{ci}, $\lambda_{ci}\in C_{opt}^{-}$, $i=1,2,\cdots,n$, 且 λ_{ci} 的几何重根个数等于它的代数重根个数. 其中 $\xi_i\in C^n(i=1,2,\cdots,n)$ 为使得 $Q=Q^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ 的自由参数,以及 $\psi_i\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在复数空间 C^n 上线性独立;且当 $\lambda_{ci}=\lambda_{cj}^{*}$ 时,$\xi_i=\xi_j^{*}$, * 表示复数共轭.

定义 $\lambda_{ci}\in C_{opt}^{-}$[6,7] 是为了保证矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$.

定理 3[7,8]. 当 $R=I$ 时,矩阵 Q 由式(9)确定,则方程(4)的唯一对称、正定解 P 可以表示为

$$P=(\varphi_1\xi_1\ \ \varphi_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \varphi_n\xi_n)(\psi_1\xi_1\ \ \psi_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \psi_n\xi_n)^{-1} \tag{10}$$

式中 $\psi_i,\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$的定义同定理 2,$\varphi_i=-(\lambda_{ci}I+A^{\mathrm{T}})^{-1}$, $i=1,2,\cdots,n$.

根据上述结论,只要求得满足 $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$ 时的解 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$,就可以实现最优极点配置. 同时利用自由参数 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$的自由度,优化鲁棒稳定界 κ_w.

性质 1. 对于$\forall\ \varepsilon\neq 0,\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$扩大或缩小 ε 倍,不改变矩阵 Q,P 的计算结果.

4 κ_w 的优化命题

由于最优极点配置决定了矩阵 Q 对称正定性,且 $\lambda_{\min}[Q]=\lambda_{\max}[Q^{-1}]$. 定义 $J=\kappa_w^{-1}$,则有 $J=\lambda_{\max}[P]\lambda_{\max}[Q^{-1}]$. 因此,可以定义优化命题

$$\begin{cases}\min\limits_{Q} \quad J=\min\limits_{Q}\{\lambda_{\max}[P]\times\lambda_{\max}[Q^{-1}]\}, \\ \text{s.t.} \quad A^{\mathrm{T}}P+PA-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q=0, \quad Q=Q^{\mathrm{T}}>0.\end{cases} \tag{11}$$

定义 $X=(X_1\ \ X_2\ \ \cdots\ \ X_n)=(\psi_1\xi_1\ \ \psi_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \psi_n\xi_n)$, $Y=(\alpha_1\xi_1\ \ \alpha_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n\xi_n)$, $Z=(Z_1\ \ Z_2\ \ \cdots\ \ Z_n)=(\varphi_1\xi_1\ \ \varphi_2\xi_2\ \ \cdots\ \ \varphi_n\xi_n)$,则式(9),(10)可以分别表示为

$$Q=-YX^{-1}, \quad P=ZX^{-1} \tag{12}$$

为了保证矩阵 Q,P 的对称、正定性,增加约束条件 $Q-Q_s=0$. 其中矩阵 $Q_s=U\mathrm{diag}[\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \cdots\ \ \sigma_n]U^{\mathrm{T}}$,矩阵 $U=[U_1\ \ U_2\ \ \cdots\ \ U_n]$, $U_i(i=1,2,\cdots,n)$为矩阵$[Q^{\mathrm{T}}Q]$属于其特征值 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$的特征矢量[9].

在求得最优解之前,矩阵 Q,P 是不对称的. 在实现优化时,将 $\lambda_{\max}[P]\lambda_{\max}[Q^{-1}]$表示为 $\lambda_{\max}[P^{\mathrm{T}}P]\times\lambda_{\max}[Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1}]$. 同时考虑到性质 1,不妨对优化参数 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$取为模 1,因此,对 κ_w 的优化命题最终可以表示为

$$\begin{cases}\min\limits_{\xi_i} \quad J=\min\limits_{\xi_i}\{\lambda_{\max}[P^{\mathrm{T}}P]\times\lambda_{\max}[Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1}]+\mathrm{Tr}[(Q-Q_s)^{\mathrm{T}}(Q-Q_s)]\}, \\ \text{s.t.} \quad \|\xi_i\|=1,\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{13}$$

优化命题(13)是在最优极点配置问题解中选取一个能够极大化 κ_w 的解. 由此可见,控制系统鲁棒稳定界与 LQ 最优控制的加权矩阵 Q 的选取有关. 在闭环控制系统特征值约束下的鲁棒稳定界的优化问题正好是 LQ 最优控制问题对自由参数的再次优化问题. 早在几年前,文献[6,7]在研究 LQ 最优控制逆问题解时就已指出了该问题解存在的可能性.

从无限时间线性二次型最优控制的最优性能指标值 $J^*=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}_0$ 来看,式(13)的定义是合理的. 极小化 $\lambda_{\max}[P^{\mathrm{T}}P]$相当于在闭环极点约束条件下进一步极小化 J^*,这也说明了本文方法是 LQ 最优控制问题对自由参数的再次优化问题. 真正实现控制系统的最优.

引理 2[10]. 当系统(A,B)可控,λ_{ci}互异时,几乎对于所有的 $\xi_i\in C^{m\times 1}$,$\psi_i\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$在 $C^{n\times n}$空间上线性独立.

该引理表明在求解上述优化命题的时候,可以认为 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$是完全自由参数.

定理 4. 对于由(13)式所定义的一类优化命题,其一阶梯度函数 $\partial J/\partial\xi_i$ 可以表示为

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_i^{\mathrm{T}}}=(\overbrace{0\ \cdots\ 0\ 1}^{i}\ 0\ \cdots\ 0)X^{-1}(F_1\psi_i+\alpha_iF_2+F_3\varphi_i+F_4)\left[I-\frac{\xi_i\xi_i^{\mathrm{T}}}{\xi_i^{\mathrm{T}}\xi_i}\right] \tag{14}$$

式中

$$F_1 = -4Q^{-1}\boldsymbol{v}_{m2}\boldsymbol{v}_{m1}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{v}_{m1}\boldsymbol{v}_{m2}^{\mathrm{T}}Q^{-\mathrm{T}} - \boldsymbol{v}_{m1}\boldsymbol{v}_{m2}^{\mathrm{T}}Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1}\boldsymbol{v}_{m2}\boldsymbol{v}_{m1}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P \tag{15}$$

$$F_2 = -4Q^{-1}\boldsymbol{v}_{m2}\boldsymbol{v}_{m1}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{v}_{m1}\boldsymbol{v}_{m2}^{\mathrm{T}}Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1} \tag{16}$$

$$F_3 = -4\boldsymbol{v}_{m1}\boldsymbol{v}_{m2}^{\mathrm{T}}Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1}\boldsymbol{v}_{m2}\boldsymbol{v}_{m1}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

$$F_4 = -2(Q - Q_s)^{\mathrm{T}}(\alpha_i I + Q\psi_i) \tag{18}$$

$\boldsymbol{v}_{m1}$,$\boldsymbol{v}_{m2}$分别为矩阵$[P^{\mathrm{T}}P]$,$[Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1}]$属于其最大特征值 $\lambda_{\max}[P^{\mathrm{T}}P]$,$\lambda_{\max}[Q^{-\mathrm{T}}Q^{-1}]$的右特征矢量,$F_1=F_2Q+F_3P$.

证明方法可以仿照文献[9]进行.略.

根据定理 4,适当选取优化步长,利用梯度法可以实现优化问题的求解.

5 算例

设系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)$. 取 $R=I$,$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-4$, 求矩阵 Q,K 和鲁棒控制系统稳定界 κ_w.

解. 系统的开环多项式为 $\alpha(s)=(s+1)(s^2+4)=s^3+s^2+4s+4$. 由此可以求得

$$\alpha(\lambda_1)=-8,\ \alpha(\lambda_2)=-26,\ \alpha(\lambda_3)=-60,\ \alpha_1=-192,\ \alpha_2=-1\,352,\ \alpha_3=-6\,000;$$

$$\psi_1=\begin{pmatrix}64 & 16 & 32\\ -16 & 8 & 16\\ 32 & -16 & -32\end{pmatrix},\ \psi_2=\begin{pmatrix}169 & 39 & 52\\ -39 & 63 & 84\\ 52 & -84 & -112\end{pmatrix},\ \psi_3=\begin{pmatrix}400 & 80 & 80\\ -80 & 224 & 224\\ 80 & -224 & -224\end{pmatrix}.$$

为了比较起见,选取文献[6,7]中的第一种仿真结果作为初始条件,即

$$Y=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=\begin{pmatrix}1.000\,0 & 0.538\,5 & 2.939\,5\\ 0.000\,0 & 1.000\,0 & 9.694\,5\\ 0.000\,0 & 0.000\,0 & 1.000\,0\end{pmatrix}.$$

由此计算的结果是

$$Q=\begin{pmatrix}4.180\,8 & 3.751\,8 & -0.486\,1\\ -0.969\,9 & 31.833\,9 & 8.418\,0\\ -0.486\,1 & 8.418\,0 & 5.181\,8\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1.484\,6 & 0.912\,8 & -0.512\,8\\ 0.912\,8 & 6.516\,4 & 1.432\,9\\ -0.512\,8 & 1.432\,9 & 1.741\,9\end{pmatrix},$$

可以求得 $\lambda_{\min}[Q]=1.677\,9$, $\lambda_{\max}[P]=7.014\,2$, $\kappa_w=\dfrac{\lambda_{\min}[Q]}{\lambda_{\max}[P]}=0.239\,2$.

在此基础上,利用式(14),选取步长 $h=0.000\,001$,经过 215 步计算可得

$$Q=\begin{pmatrix}3.513\,3 & 3.637\,1 & -0.480\,5\\ 3.637\,1 & 32.476\,2 & 6.006\,9\\ -0.480\,5 & 6.006\,9 & 5.924\,6\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1.346\,2 & 0.907\,9 & -0.529\,8\\ 0.907\,9 & 6.653\,7 & 1.577\,5\\ -0.529\,8 & 1.577\,5 & 2.665\,6\end{pmatrix},$$

此时 $\lambda_{\min}[Q]=\{2.435\,5,\ 34.161\,8,\ 5.316\,7\}$, $\lambda_{\max}[Q]=\{0.792\,0,\ 7.282\,6,\ 2.590\,9\}$, $\kappa_w=0.334\,4$.

限于篇幅,在此没有给出文献[6,7]中其它 5 种情况下的比较结果.

仿真结果表明,通过 LQ 逆问题的参数化解,在闭环控制系统特征约束的条件下,对 Q

矩阵的特征问题进行优化，在实现控制系统稳定界的极大化方面是有成效的. 考虑到多变量函数极值问题解的非唯一性，利用较好的优化工具，获得更大的鲁棒控制稳定界是有可能的.

6 结束语

通过以鲁棒控制系统稳定界作为优化指标，对 LQ 逆问题中的自由参数进行再一次优化，不仅使控制系统保持了线性二次型意义下的最优性，而且增加了控制系统鲁棒稳定界. 从 LQ 逆问题的观点出发，分析控制系统的鲁棒性，研究 LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 中的自由参数与控制系统鲁棒性之间的内在联系，对寻求鲁棒控制系统稳定界的极大化方法具有指导意义. 同时，研究直接通过 LQ 逆问题的求解，以及 LQ 逆问题解与系统特征之间的关系，获得具有极大控制系统鲁棒稳定界的鲁棒控制器设计方法更具有理论和实际应用价值.

参 考 文 献

1 Patel R V *et al*. Robustness of linear quadratic state feedback designs in the presence of system uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **22**(4):945～949

2 Qu Z. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. *Systems & Control Letters*, 1992, **18**(2):301～307

3 王耀青. 具有最小增益最优鲁棒控制器的设计. 控制理论与应用, 1995, **12**(3):290～296

4 王耀青. 一类不确定离散时间控制系统的鲁棒性分析. 控制理论与应用, 1997, **14**(4):531～536

5 Chen H G, Han K W. Improved quantitative measures of robustness for multivariable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(4):807～810

6 王耀青. LQ 最优控制系统中加权矩阵的确定. 自动化学报, 1992, **18**(2):213～217

7 王耀青. 线性多变量最优控制的研究——LQ 逆问题及鲁棒控制器的设计[博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 1989

8 Wang Y Q. A note on the solution of the algebraic Riccati equation. *System & Control Letters*, 1989, **12**(2):465～472

9 王耀青. LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 的一种数值算法. 控制与决策, 2000, **16**(6):1～6

10 O'Reilly J, Fahmy M M. The minimum number of degrees of freedom in state feedback control. *Int. J. Control*, 1985, **41**(3):749～768

王耀青 1986 年于中国科学院自动化研究所获得工学硕士学位，1989 年在浙江大学获工学博士学位，1989～1991 在浙江大学能源工程研究所从事博士后研究工作. 现为武汉科技大学信息学院副院长、教授. 主要研究领域为最优控制、鲁棒控制系统设计、控制系统参数化设计方法.