第27卷 第3期
2001年5月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 3
May, 2001

短文

参数不确定性奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[1)]

徐胜元　牛玉刚　杨成梧
（南京理工大学动力工程学院　南京　210094）
（E-mail: syxu@mail.com）

摘　要　利用线性矩阵不等式，通过引入广义二次可镇定且具有 H_∞ 性能指标的概念，得到了在状态反馈作用下，参数不确定性奇异系统鲁棒 H_∞ 控制律的存在条件. 所得的状态反馈控制律保证闭环系统正则、无脉冲、稳定且满足给定的 H_∞ 性能指标.

关键词　参数不确定性，奇异系统，鲁棒 H_∞ 控制，状态反馈，线性矩阵不等式.

ROBUST H_∞ CONTROL FOR SINGULAR SYSTEMS WITH PARAMETER UNCERTAINTY

XU Sheng-Yuan　NIU Yu-Gang　YANG Cheng-Wu
(*School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)
(E-mail: syxu@mail.com)

Abstract　This paper is concerned with the problems of robust H_∞ control for uncertain singular systems. The system under consideration is subjected to time-varying norm-bounded uncertainties in both state and input matrices. The problem we address is the design of state feedback controllers such that the closed-loop system is regular, impulse-free, as well as satisfying a prescribed H_∞ norm bound constraint for all admissible uncertainties. In the light of the notion of 'generalized quadratic stabilizability with H_∞ performance index', the robust H_∞ control problem is solved; furthermore, the desired robust H_∞ state feedback control law can be constructed in terms of solutions to a certain linear matrix inequality.

Key words　Uncertain singular systems, robust H_∞ control, state feedback, linear matrix inequalities.

1　引言

近年来，奇异系统的 H_∞ 控制问题引起了人们的关注，并取得了一定的研究成果. 文

1) 南京理工大学科研发展基金及国家教委博士点基金资助项目.
收稿日期　1999-02-11　　收修改稿日期　2000-04-05

[1]将正常系统 H_∞ 控制中的 J-谱分解法推广到了广义系统的情形；文[2]利用矩阵不等式得到了奇异系统的 H_∞ 控制问题可解的充要条件.但所有这些结论都是在假定系统的参数完全确定的情形下得到的.考虑到一个实际控制系统在多种因素作用下其不确定性总是存在的,因此,研究参数不确定性奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题是很有必要的.

所谓参数不确定性奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制,就是要设计控制器,使对所有容许的不确定参数,闭环系统正则、无脉冲、稳定且满足给定的 H_∞ 性能指标.本文考虑由状态反馈作用的奇异不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制问题.对所考虑的系统,引入广义二次可镇定且具 H_∞ 性能指标的概念,利用线性矩阵不等式,得到了广义二次可镇定且具有 H_∞ 性能指标的充要条件;而且,鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律的设计可通过求解一给定的线性矩阵不等式而得到.

2　问题描述

考虑具有如下形式的参数不确定性奇异系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+\Delta A(t))\boldsymbol{x}(t)+(B+\Delta B(t))\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{\omega}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+D\boldsymbol{u}(t), \tag{1b}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$,$\boldsymbol{\omega}(t)\in R^l$,$\boldsymbol{z}(t)\in R^s$ 分别是系统的状态向量、控制输入向量、干扰输入向量及被控输出向量;$E\in R^{n\times n}$,$\mathrm{rank}E=r\leqslant n$,且 $E=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,其中 I_r 是 $r\times r$ 单位阵;A,B,B_1,C,D 是已知的适维阵;$\Delta A(t)$,$\Delta B(t)$表示时变不确定阵,且具如下形式

$$[\Delta A(t)\quad \Delta B(t)]=GF(t)[E_a\quad E_b], \tag{2}$$

其中矩阵 $F(t)\in R^{j\times k}$的元素 Lebegue 可测且满足[3~5]

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I_k \tag{3}$$

对所有的 $t\in R$ 都成立,这里 I_k 是 $k\times k$ 单位阵,G,E_a 和 E_b 是已知的适维阵.

假设1. E_b 列满秩.下面对奇异不确定系统(1)作如下的状态反馈

$$\boldsymbol{u}(t)=F\boldsymbol{x}(t), \tag{4}$$

得闭环系统为

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_c(t)\boldsymbol{x}(t)+B_1\boldsymbol{\omega}(t),\quad \boldsymbol{z}(t)=C_c\boldsymbol{x}(t), \qquad (5\mathrm{a}),(5\mathrm{b})$$

其中 $A_c(t)=A+BF+GF(t)(E_a+E_bF)$,$C_c=C+DF$.

定义1. 若闭环系统(5)满足

1)对所有满足式(2),(3)的 $\Delta A(t)$,$\Delta B(t)$,式(5)正则,无脉冲且稳定;

2)$\|\boldsymbol{z}\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_2$,这里 γ 是给定的正常数且假定 $\boldsymbol{x}(0)=0$.

则称奇异不确定系统(1)广义可镇定且具 H_∞ 性能指标 γ,并称式(4)为式(1)的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律.这里 $\boldsymbol{\omega}\in L_2[0,\infty]$,$L_2[0,\infty]$表二次可积函数空间,$\|\cdot\|_2$表通常的 $L_2[0,\infty]$范数.

所谓奇异不确定系统(1)的鲁棒 H_∞ 控制问题是指:给定一正常数 $\gamma>0$,寻求鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律,使系统(1)广义可镇定且具 H_∞ 性能指标 γ.

定义2. 若存在常数阵 P 及正定阵 Q 使得奇异不确定系统(1)在状态反馈(4)作用下的闭环系统(5)满足

$$A_c^{\mathrm{T}}(t)P + P^{\mathrm{T}}A_c(t) + C_c^{\mathrm{T}}C_c + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}P \leqslant -Q \tag{6}$$

对所有形如式(2)和(3)的 $\Delta A(t)$,$\Delta B(t)$成立,且 P 具有以下形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中 $P_1\in R^{r\times r}$,$P_2\in R^{(n-r)\times r}$,$P_3\in R^{(n-r)\times(n-r)}$,且 $P_1>0$,P_3可逆.则称奇异不确定系统(1)广义二次可镇定且具 H_∞性能指标 γ.

引理1. 若奇异不确定系统(1)广义二次可镇定且具有 H_∞性能指标 γ,则系统(1)广义可镇定且具 H_∞性能指标 γ.

注.当奇异不确定系统(1)中 $E=I$ 时,定义2即为正常系统中所谓的二次可镇定且具 H_∞性能指标的概念[3,4].因此,定义2可看成是二次可镇定且具 H_∞性能指标的概念向广义系统的合理推广.考虑到引理1,下面的任务就是要寻找广义二次可镇定且具 H_∞性能指标 γ 的条件,以期得到鲁棒 H_∞状态反馈控制律.

3 鲁棒 H_∞控制问题的解

定理1. 参数不确定性奇异系统(1)广义二次可镇定且具有 H_∞性能指标 γ 的充要条件是存在常数 $\delta>0$及如下形式的矩阵 $S\in R^{n\times n}$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

这里 $S_1\in R^{r\times r}$,$S_2\in R^{r\times(n-r)}$,$S_3\in R^{(n-r)\times(n-r)}$,且 $S_1^{\mathrm{T}}=S_1$,$S_1>0$,S_3可逆,使得线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} SA_l^{\mathrm{T}} + A_lS^{\mathrm{T}} - B(D^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}B^{\mathrm{T}} & SU^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}}, \\ US^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ V & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

成立.上式中 I 是 $n\times n$ 单位阵;$A_l=A-B(D^{\mathrm{T}}D+\frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}(D^{\mathrm{T}}C+\frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_a)$;$U\in R^{n\times n}$,$V\in R^{n\times n}$且

$$U^{\mathrm{T}}U = C^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\delta}E_a^{\mathrm{T}}E_a - \left(C^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_a^{\mathrm{T}}E_b\right)\left(D^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b\right)^{-1}\left(D^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_a\right), \tag{10}$$

$$V^{\mathrm{T}}V = \delta GG^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

在此情形下,鲁棒 H_∞状态反馈控制律可取为

$$\boldsymbol{u}(t) = -(D^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}(B^{\mathrm{T}}S^{-\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}C + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_a)\boldsymbol{x}(t). \tag{12}$$

证明. 充分性.考虑状态反馈(12),将其作用于系统(1)得到具有形式(5)的闭环系统,且

$$A_c(t) = A + BK + GF(t)(E_a + E_bK), \quad C_c = C + DK,$$

其中 $K=-(D^{\mathrm{T}}D+\frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}(B^{\mathrm{T}}S^{-\mathrm{T}}+D^{\mathrm{T}}C+\frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_a)$.下面令 $P=S^{-\mathrm{T}}$,则 P 具有式(7)

的形式，于是可以证明

$$A_l^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_l + P^{\mathrm{T}}[V^{\mathrm{T}}V - B(D^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}B^{\mathrm{T}}]P + U^{\mathrm{T}}U < 0.$$

由定义2，即知广义不确定系统(1)广义二次可镇定且具有 H_∞ 性能指标 γ.

必要性. 若广义不确定系统(1)广义二次可镇定且具有 H_∞ 性能指标 γ，则存在形如式(7)的矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 及正定阵 Q 使得式(6)成立. 令

$$Z = (A + BF)^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}(A + BF) + C_c^{\mathrm{T}}C_c + \gamma^{-2}P^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}P,$$

于是类似于文[3]中定理3.1的证明知，存在常数 $\delta>0$ 使得

$$\delta Z + \delta^2P^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}P + (E_a + E_bF)^{\mathrm{T}}(E_a + E_bF) < 0,$$

即

$$A_l^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_l + P^{\mathrm{T}}[V^{\mathrm{T}}V - B(D^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}B^{\mathrm{T}}]P + U^{\mathrm{T}}U < 0.$$

定义 $S=P^{-\mathrm{T}}$，则由 P 的定义可知 S 具有式(8)的形式，于是由上式得

$$SA_l^{\mathrm{T}} + A_lS^{\mathrm{T}} - B(D^{\mathrm{T}}D + \frac{1}{\delta}E_b^{\mathrm{T}}E_b)^{-1}B^{\mathrm{T}} + SU^{\mathrm{T}}US^{\mathrm{T}} + V^{\mathrm{T}}V < 0,$$

从而由 Schur 补引理知线性矩阵不等式(9)成立. 证毕.

4 结论

本文针对参数不确定性奇异系统提出了广义二次可镇定且具 H_∞ 性能指标 γ 的概念，得到了所考虑的系统广义二次可镇定且具 H_∞ 性能指标 γ 的充要条件；而且，鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律的设计可通过求解一给定的线性矩阵不等式而得到. 本文给出的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律保证闭环系统正则、无脉冲、稳定且满足给定的 H_∞ 性能指标.

参 考 文 献

1 Takaba K N, Morihara N, Katayama T. H_∞ control for descriptor systems——a J-spectral factorization approach. In: Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, 1994, 2251～2256

2 Msubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 1997, **33**(4): 669～673

3 Xie L, de Souza C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(8): 1188～1191

4 Shi G, Zou Y, Yang C. An algebraic approach to robust H_∞ control via state feedback. *Systems and Control Letters*, 1992, **18**(3): 365～370

5 Xu S, Yang C. An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems. *International Journal of Systems Science*, 2000, **30**(1): 55～61

徐胜元 1968年生，2000年在南京理工大学获博士学位. 主要研究方向为广义系统、鲁棒控制和自适应控制.

牛玉刚 1965年生，现为南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为神经网络、离散事件动态系统和自适应控制.

杨成梧 1936年生，1961年毕业于哈尔滨军事工程学院，现为南京理工大学教授，博士生导师. 主要研究方向为2D 系统、广义系统、高速采样控制、H_∞控制和离散事件动态系统.