第27卷 第3期
2001年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 3
May, 2001

短文

不确定离散时滞系统的保性能控制[1)]

俞 立 冯 浩

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032)

(E-mail: lyu@mail.hz.zj.cn)

摘 要 针对一类具有范数有界不确定性和状态滞后的离散时间线性系统，结合一个二次型性能指标，采用线性矩阵不等式方法，提出了无记忆状态反馈保性能控制律的存在条件，并利用一个线性矩阵不等式的解给出了保性能控制律的一个参数化表示.

关键词 离散时滞系统，保性能控制，不确定性，线性矩阵不等式.

GUARANTEED COST CONTROL OF DISCRETE-TIME UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS

YU Li FENG Hao

(*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310032)

(E-mail: lyu@mail.hz.zj.cn)

Abstract This paper deals with the guaranteed cost control problem for discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and delayed state, together with a given quadratic performance index. A sufficient condition is presented for the existence of memoryless state feedback guaranteed cost control laws and a parametrized representation of the guaranteed cost control laws is given in terms of the feasible solutions to a certain linear matrix inequality.

Key words Discrete time-delay systems, guaranteed cost control, uncertainties, linear matrix inequality.

1 引言

近年来，使得闭环系统同时具有鲁棒稳定性和鲁棒性能的不确定系统保性能控制问题的研究取得了一系列研究成果[1~3]. 不确定连续时滞系统的保性能控制问题也已得到了研究，并提出了无记忆状态反馈保性能控制律的设计方法[4~6]. 然而，不确定离散时滞

1) 国家教育部优秀年轻教师基金和浙江省自然科学基金赞助项目.

收稿日期 1999-02-09 收修改稿日期 1999-06-22

系统保性能控制问题的研究至今未见报道.

在实际研究中，状态扩充的方法[7]已被广泛用来处理离散时滞系统的分析和综合问题，它通过将离散时滞系统转化为一个不含滞后项的离散系统，从而可以应用有关离散系统的结果来解决离散时滞系统的分析和综合问题. 但是，这样的处理方法存在以下问题：1)得到的控制器不仅依赖当前的信息，而且还依赖过去的信息，因此是一个有记忆的控制器；2)由于状态的增维，导致系统模型的阶数大幅度增加（尤其当滞后时间常数较大时），从而使得计算量大幅度增加；3)这种方法不能应用到具有未知滞后或具有滞后不确定的系统.

本文采用线性矩阵不等式处理方法来研究不确定离散时滞系统的保性能控制问题，提出了无记忆状态反馈保性能控制律的存在条件，并用一个线性矩阵不等式的解给出了保性能控制律的一个参数化表示.

2　鲁棒性能分析

考虑系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \overline{A}\boldsymbol{x}(k) + \overline{A}_d\boldsymbol{x}(k-d),$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{v}_0,\quad \boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{x}(-d) = \boldsymbol{v}_d, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$ 是系统的状态向量，d 是系统的滞后时间常数，

$$\overline{A} = A + D\Delta E_1,\quad \overline{A}_d = A_d + D\Delta E_d. \tag{2}$$

上式中 $\Delta\in R^{i\times j}$是满足 $\Delta'\Delta\leqslant I$ 的未知参数矩阵；A,A_d,D,E_1,E_d 是适当维数的常数矩阵.

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{x}'(k)Q\boldsymbol{x}(k) \tag{3}$$

是给定的系统性能指标，其中 $Q>0$是给定的加权矩阵.

本节的目的是给出对所有允许的不确定性，系统(1)渐近稳定，且系统的性能指标值(3)不超过某个确定常数 J_0的条件.

引理1[8]. 给定适当维数的矩阵 Y,H 和 E，其中 Y 是对称的，则 $Y+H\Delta E+E'\Delta' H'<0$对所有满足 $\Delta'\Delta\leqslant I$ 的矩阵 Δ 成立当且仅当存在常数 $\varepsilon>0$，使得 $Y+\varepsilon HH'+\varepsilon^{-1}E'E<0$.

引理2. 如果存在对称正定矩阵 P,S，使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Pi & \overline{A}'P\overline{A}_d \\ \overline{A}'_dP\overline{A} & \overline{A}'_dP\overline{A}_d - S \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

成立，则系统(1)渐近稳定，且对所有允许的不确定性，系统性能指标值满足

$$J \leqslant \boldsymbol{v}_0'P\boldsymbol{v}_0 + \sum_{i=1}^{d}\boldsymbol{v}_i'S\boldsymbol{v}_i, \tag{5}$$

其中 $\Pi=\overline{A}'P\overline{A}-P+S+Q$.

证明. 假设存在对称正定矩阵 P,S，使得矩阵不等式(4)成立. 考虑

$$V(k) = \boldsymbol{x}'(k)P\boldsymbol{x}(k) + \sum_{i=1}^{d}\boldsymbol{x}'(k-i)S\boldsymbol{x}(k-i)$$

沿系统(1)的任意轨线，$V(k)$的向前差分

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) =$$
$$\boldsymbol{x}'(k)\bar{A}'P\bar{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{x}'(k-d)\bar{A}'_dP\bar{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{x}'(k)\bar{A}'P\bar{A}_d\boldsymbol{x}(k-d) +$$
$$\boldsymbol{x}'(k-d)\bar{A}'_dP\bar{A}_d\boldsymbol{x}(k-d) - \boldsymbol{x}'(k)P\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{x}'(k)S\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}'(k-d)S\boldsymbol{x}(k-d) =$$
$$[\boldsymbol{x}'(k)\quad \boldsymbol{x}'(k-d)]\begin{bmatrix}\Pi - Q & \bar{A}'P\bar{A}_d \\ \bar{A}'_dP\bar{A} & \bar{A}'_dP\bar{A}_d - S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{x}(k-d)\end{bmatrix}.$$

根据条件(4),可得

$$\Delta V(k) < -\boldsymbol{x}'(k)Q\boldsymbol{x}(k) \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|\boldsymbol{x}(k)\|^2. \tag{6}$$

由 Lyapunov 稳定性理论可知,系统(1)是渐近稳定的.进而,由(6)式

$$\boldsymbol{x}'(k)Q\boldsymbol{x}(k) < -\Delta V(k) = \boldsymbol{x}'(k)P\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}'(k+1)P\boldsymbol{x}(k+1) +$$
$$\boldsymbol{x}'(k-d)S\boldsymbol{x}(k-d) - \boldsymbol{x}'(k)S\boldsymbol{x}(k).$$

在上式两边对 k 从0到∞求和,利用系统的稳定性,可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}'(k)Q\boldsymbol{x}(k) \leqslant \boldsymbol{v}'_0P\boldsymbol{v}_0 + \sum_{i=1}^{d}\boldsymbol{v}'_iS\boldsymbol{v}_i.$$

证毕.

引理3. 存在对称矩阵 P,S,使得矩阵不等式(4)成立当且仅当存在对称正定矩阵 X, T 和常数 $\varepsilon>0$,使得以下的矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix}-X+\varepsilon DD' & AX & A_dX & 0 \\ XA' & -X+T+XQX & 0 & XE'_1 \\ XA'_d & 0 & -T & XE'_d \\ 0 & E_1X & E_dX & -\varepsilon I\end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

证明. (4)式可写成

$$[\bar{A}\quad \bar{A}_d]'P[\bar{A}\quad \bar{A}_d] + \begin{bmatrix}-P+S+Q & 0 \\ 0 & -S\end{bmatrix} < 0.$$

由矩阵的 Schur 补性质,存在正定对称矩阵 P,S,使得上式成立当且仅当

$$\begin{bmatrix}-P^{-1} & \bar{A} & \bar{A}_d \\ \bar{A}' & -P+S+Q & 0 \\ \bar{A}'_d & 0 & -S\end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

在(8)式中代入矩阵 $\bar{A},\bar{A}_d$ 的表达式,可将其等价地表示成

$$\begin{bmatrix}-P^{-1} & A & A_d \\ A' & -P+S+Q & 0 \\ A'_d & 0 & -S\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\Delta[0\quad E_1\quad E_d] + [0\quad E_1\quad E_d]'\Delta'\begin{bmatrix}D \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}' < 0. \tag{9}$$

由引理1及矩阵的 Schur 补性质,上式对所有满足 $\Delta'\Delta\leqslant I$ 的矩阵 Δ 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$,使得

$$\begin{bmatrix}-P^{-1}+\varepsilon DD' & A & A_d & 0 \\ A' & -P+S+Q & 0 & E'_1 \\ A'_d & 0 & -S & E'_d \\ 0 & E_1 & E_d & -\varepsilon I\end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

在上式两边分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

并记 $X=P^{-1}$,$T=XSX$,可得矩阵不等式(10)等价于式(7).　　证毕.

定理1. 如果存在对称正定矩阵 X,T 和常数 $\varepsilon>0$,使得矩阵不等式(7)成立,则对所有允许的不确定性,系统(1)是渐近稳定的,且性能指标(3)的值满足

$$J \leqslant J_0 = \boldsymbol{v}'_0 X^{-1} \boldsymbol{v}_0 + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{v}'_i X^{-1} T X^{-1} \boldsymbol{v}_i. \tag{11}$$

证明. 由引理2和引理3,即可得证本定理.

3　保性能控制律设计

考虑系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (A + D\Delta E_1)\boldsymbol{x}(k) + (A_d + D\Delta E_d)\boldsymbol{x}(k-d) + (B + D\Delta E_2)\boldsymbol{u}(k), \tag{12a}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{x}(-1) = \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{x}(-d) = \boldsymbol{v}_d, \tag{12b}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$,$\boldsymbol{u}(k)\in R^m$ 分别是状态向量和控制输入,d 是系统的滞后时间常数,A,A_d,B,D,E_1,E_2,E_d 是适当维数的常数矩阵,$\Delta\in R^{i\times j}$是满足 $\Delta'\Delta\leqslant I$ 的不确定参数矩阵.

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\boldsymbol{x}'(k)Q\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}'(k)R\boldsymbol{u}(k)] \tag{13}$$

是系统的性能指标,其中 $Q>0$,$R>0$是给定的加权矩阵.

本节研究的问题是设计一个无记忆的状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(k)=F\boldsymbol{x}(k)$,使得对所有允许的不确定矩阵 Δ,闭环系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = [A + BF + D\Delta(E_1 + E_2F)]\boldsymbol{x}(k) + (A_d + D\Delta E_d)\boldsymbol{x}(k-d) \tag{14}$$

渐近稳定,且其性能指标值满足

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{x}'(k)(Q + F'RF)\boldsymbol{x}(k) \leqslant J_0,$$

其中 J_0是某个确定的常数. 具有这样性质的控制律称为是系统(12)的一个保性能控制律.

以下定理给出了这一问题的一个解.

定理2. 如果存在对称正定矩阵 X,T,矩阵 Y 和常数 $\varepsilon>0$,使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X+\varepsilon DD' & AX+BY & A_dX & 0 & 0 & 0 \\ XA'+Y'B' & -X+T & 0 & XE'_1+Y'E'_2 & X & Y' \\ XA'_d & 0 & -T & XE'_d & 0 & 0 \\ 0 & E_1X+E_2Y & E_dX & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

成立,则系统(12)存在保性能控制律,特别的,$\boldsymbol{u}(k)=YX^{-1}\boldsymbol{x}(k)$是系统(12)的一个保性能

控制律，相应的闭环性能指标值满足 $J\leqslant J_0$，其中 J_0 由(11)式给定.

证明. 由定理1可知，控制律 $\boldsymbol{u}(k)=F\boldsymbol{x}(k)$ 是系统(12)的保性能控制律的一个充分条件是存在正定矩阵 X,T 和常数 $\varepsilon>0$，使得以下的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X+\varepsilon DD' & (A+B_2F)X & A_dX & 0 \\ X(A+B_2F)' & -X+T+X(Q+F'RF)X & 0 & X(E_1+E_2F)' \\ XA'_d & 0 & -T & XE'_d \\ 0 & (E_1+E_2F)X & E_dX & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0$$

成立. 在上式中取 $Y=FX$，并应用矩阵的 Schur 补性质，可得矩阵不等式(15). 证毕.

不等式(15)是关于变量 ε,T,X,Y 的线性矩阵不等式，所有满足(15)式的(ε,T,X,Y)构成一个凸集，因此，可以应用有关 LMI 的技术来判断该集是否非空. 同时，定理2也给出了用线性矩阵不等式(15)的可行解来构造系统(12)的保性能控制律的方法. 实际上，它还给出了一组保性能控制律的一个参数化表示. 据此，可以在这组保性能控制律中，寻找满足一些其它性能要求的保性能控制律.

参 考 文 献

1 Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1972, **AC-17**(4): 474～483

2 Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **AC-39**(10): 1971～1977

3 俞立，王景成，褚健. 不确定离散动态系统的保成本控制. 自动化学报，1998，**24**(3)：414～417

4 Moheimani S O R, Petersen I R. Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems. *IEE Proc. —Control Theory & Appl.*, 1997, **144**(2): 183～188

5 俞立，黄昕，褚健. 不确定时滞系统的保成本控制. 控制与决策，1998，**13**(1)：67～70.

6 Yu Li. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 1999, **35**(6)

7 Astrom K J, Wittenmark B. Computer Controlled Systems: Theory and Design. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1993

8 Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *Int. J. Control*, 1996, **63**(4): 741～750

俞 立 1961年生. 1982年毕业于南开大学控制理论专业，后在浙江大学获硕士和博士学位，1993年至1995年获瑞士联邦政府奖学金留学瑞士联邦高工. 现为浙江工业大学信息工程学院教授，副院长. 主要研究领域包括鲁棒控制、时滞系统的分析和控制、分散控制等.