第 28 卷 第 1 期
2002 年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 1
Jan., 2002

短文

一类可修系统的可靠性指标和最优检测策略

苏保河
(暨南大学珠海学院 珠海 519070)

摘 要 研究可修系统的一个模型,假定系统有 2 种工作状态(正常及异常)和 2 种故障状态. 系统故障时不需检测,系统工作时必须经过检测才能知道它是正常还是异常,并且检测结果有可能出现错误. 系统开始工作后,每隔一段时间对它检测一次,直到系统故障或检测出系统处于异常状态为止. 利用补充变量方法求出了系统的可靠性指标、系统的最优检测周期和诊断参数的最优临界值.

关键词 系统,可靠性,故障诊断,检测策略
中图分类号 TP202.1,O224,N945.17

RELIABILITY INDICES AND OPTIMAL CHECKING POLICIES FOR A REPAIRABLE SYSTEM

SU Bao-He
(*Zhuhai College, Jinan University, Zhuhai* 519070)

Abstract This paper deals with a model of repairable systems which are checked at a time. The system has two working modes (normal and abnormal) and two failure modes. The failure modes are not checked, and when the system is operating it is checked once every time period until it attains the failure modes or is detected to be in the abnormal modes. The system-checking may bring about wrong conclusions. The system reliability indices and the method for calculating the optimal checking cycle and the optimal critical value of the diagnostic parameter are obtained by using probability analysis, the supplementary variable technique and optimization method.

Key words System, reliability, trouble diagnosis, checking policy

1 引言与假定

在实际工程中,很多可修系统在管理不良或操作失误时可能使系统进入异常状态,造成失效率增加和工作质量降低,从而影响系统的经济效益. 某些管理良好的系统,正常工作一段时间后也可能要经过一段异常状态之后才发生故障. 这种异常状态往往是隐蔽的,需要通

收稿日期 1999-10-11 收修改稿日期 2000-03-22

过专门检测才能识别. 检测就是利用仪器观测系统的诊断参数，根据诊断参数的变化情况判断系统是正常还是异常. 诊断参数是与系统运行状态密切相关并且便于检测的数量指标，它通常是一个随机变量. 本文综合研究此类系统的一个模型，利用概率分析、补充变量和最优化方法，求出了系统的可靠性指标、最优检测周期和诊断参数的最优临界值.

系统的假定如下

1）系统有 2 种工作状态——正常及异常. 当系统正常工作时，其失效率为 λ_1. 系统开始工作后，经过一段随机时间 T 也可能进入异常状态，T 服从参数为 λ_2 的指数分布. 系统异常时失效率为 λ_3. 当系统故障时，不需检测就能知道. 系统开始工作后，为了判断是正常还是异常，每隔一段时间 u 对它检测一次，直到系统故障或检测结果为“异常”为止.

2）系统的诊断参数 X 是一个随机变量. 本文讨论 X 的 2 种变化趋势：趋势 1，当系统异常时 X 有增大的趋势；趋势 2，当系统异常时 X 有减小的趋势.

假设当系统正常时 X 的分布函数为 $F_1(x)$，当系统异常时 X 的分布函数为 $F_2(x)$. X 的临界值为 v，X 的检测值为 x. 对于趋势 1，如果 $x \leqslant v$，判定系统正常，如果 $x > v$ 判定系统异常；对于趋势 2，如果 $x \geqslant v$，判定系统正常，如果 $x < v$ 判定系统异常.

3）如果在系统正常工作时发生故障，修理时间分布函数为 $G_1(t)$；如果在系统异常工作时发生故障，修理时间分布函数为 $G_2(t)$；如果系统处于正常状态但因检测结果错误而对系统进行“修理”(实为检查)，其时间分布函数为 $G_3(t)$；检测出系统异常后的修理时间分布函数为 $G_4(t)$，分别记作

$$G_i(t)=\int_0^t g_i(y)\mathrm{d}y=1-\exp\left[-\int_0^t \mu_i(y)\mathrm{d}y\right], \qquad \mu_i^{-1}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G_i(t), \quad i=1,2,3,4.$$

因为当系统在异常工作时发生故障会导致系统突然丧失功能，而检测出系统异常后停机修理是主动修理，所以前者造成的损失比后者要大的多，修理时间分布函数 $G_2(t)$，$G_4(t)$也有很大差异.

4）系统正常和异常时工作单位时间的平均利润分别为 R_1，R_2，在正常状态下发生一次故障的平均损失为 E_1，在异常状态下发生一次故障的平均损失为 E_2，对系统异常状态修理一次的平均费用为 E_3，对系统检测一次的平均费用为 E_4，因为检测结果错误而在系统正常情况下停机“修理”(实为检查)一次的平均费用为 E_5. 系统修复如新，检测时间忽略不记，所有随机变量相互独立，初始时刻系统处于正常状态.

在系统正常工作时，检测结果正确的概率 p_1 称为正常准确度，检测结果错误的概率 $q_1=1-p_1$称为误断率；系统异常时检测结果正确的概率 p_2 称为异常准确度，检测结果错误的概率 $q_2=1-p_2$ 称为漏断率. 对于趋势 1，显然有

$$p_1 = F_1(v), \quad q_1 = 1 - F_1(v), \quad p_2 = 1 - F_2(v), \quad q_2 = F_2(v) \tag{1}$$

对于趋势 2，显然有

$$p_1 = 1 - F_1(v), \quad q_1 = F_1(v), \quad p_2 = F_2(v), \quad q_2 = 1 - F_2(v) \tag{2}$$

因此，p_1，q_1，p_2，q_2 都是 v 的函数.

2　系统的可靠性指标

根据系统假定和各个可靠性指标的定义，利用文献[1～5]中类似方法，可得系统的以下可靠性指标

1）系统的正常可用度和异常可用度

系统处于正常（异常）状态的概率称为系统的正常（异常）可用度. 系统在时刻 t 的瞬时正常可用度 $A_1(t,u,v)$ 和异常可用度 $A_2(t,u,v)$ 的 L(Laplace)变换式分别为

$$A_1^*(s,u,v)=(\lambda_3-\lambda)(s+\lambda_3)[1-e^{-(s+\lambda)u}-q_2e^{-(s+\lambda_3)u}+q_2e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]/C(s,u,v),$$

$$A_2^*(s,u,v)=\lambda_2[\lambda_3-\lambda-(p_2s-q_2\lambda+\lambda_3)e^{-(s+\lambda)u}+(p_2s+\lambda-q_2\lambda_3)e^{-(s+\lambda_3)u}+q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]/C(s,u,v).$$

在平稳状态下，系统的正常可用度和异常可用度分别为

$$A_1(u,v)=\lambda_3(\lambda_3-\lambda)[1-e^{-\lambda u}-q_2e^{-\lambda_3u}+q_2e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]/b(u,v) \tag{3}$$

$$A_2(u,v)=\lambda_2[\lambda_3-\lambda+(q_2\lambda-\lambda_3)e^{-\lambda u}+(\lambda-q_2\lambda_3)e^{-\lambda_3u}+q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]/b(u,v) \tag{4}$$

其中 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$,

$$\begin{aligned}C(s,u,v)=&(\lambda_3-\lambda)(s+\lambda)(s+\lambda_3)[1-p_1e^{-(s+\lambda)u}-q_2e^{-(s+\lambda_3)u}+p_1q_2e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]-\\&\lambda_1(\lambda_3-\lambda)(s+\lambda_3)[1-e^{-(s+\lambda)u}-q_2e^{-(s+\lambda_3)u}+q_2e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]g_1^*(s)-\\&\lambda_2\lambda_3[\lambda_3-\lambda-(p_2s+\lambda_3-q_2\lambda)e^{-(s+\lambda)u}+\\&(p_2s-q_2\lambda_3+\lambda)e^{-(s+\lambda_3)u}+q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]g_2^*(s)-\\&q_1(\lambda_3-\lambda)(s+\lambda)(s+\lambda_3)e^{-(s+\lambda)u}[1-q_2e^{-(s+\lambda_3)u}]g_3^*(s)-\\&p_2\lambda_2(s+\lambda)(s+\lambda_3)[e^{-(s+\lambda)u}-e^{-(s+\lambda_3)u}]g_4^*(s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b(u,v)=&(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3-\lambda)+(q_2\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+q_2\lambda_2^2-\lambda_3^2)e^{-\lambda u}+\\&(\lambda_1\lambda_2+q_2\lambda_1\lambda_3+\lambda_2^2-q_2\lambda_3^2)e^{-\lambda_3u}+q_2(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3-\lambda)e^{-(\lambda+\lambda_3)u}+\\&\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda)[1-e^{-\lambda u}-q_2e^{-\lambda_3u}+q_2e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]\mu_1^{-1}+\\&\lambda_2\lambda_3[\lambda_3-\lambda-(\lambda_3-q_2\lambda)e^{-\lambda u}+(\lambda-q_2\lambda_3)e^{-\lambda_3u}+q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]\mu_2^{-1}+\\&q_1\lambda\lambda_3(\lambda_3-\lambda)[e^{-\lambda u}-q_2e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]\mu_3^{-1}+p_2\lambda\lambda_2\lambda_3(e^{-\lambda u}-e^{-\lambda_3u})\mu_4^{-1}\end{aligned} \tag{5}$$

2）系统的正常故障频度和异常故障频度

单位时间内系统在正常（异常）状态下发生故障的平均次数称为系统的正常（异常）故障频度. 在时刻 t 系统的瞬时正常故障频度 $W_1(t,u,v)$ 和异常故障频度 $W_2(t,u,v)$ 的 L 变换式分别为

$$W_1^*(s,u,v)=\lambda_1(\lambda_3-\lambda)(s+\lambda_3)[1-e^{-(s+\lambda)u}-q_2e^{-(s+\lambda_3)u}+q_2e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]/C(s,u,v),$$

$$W_2^*(s,u,v)=\lambda_2\lambda_3[\lambda_3-\lambda-(p_2s-q_2\lambda+\lambda_3)e^{-(s+\lambda)u}+(p_2s+\lambda-q_2\lambda_3)e^{-(s+\lambda_3)u}+q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]/C(s,u,v).$$

在平稳状态下，系统的正常故障频度和异常故障频度分别为

$$M_1(u,v)=\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda)[1-e^{-\lambda u}-q_2e^{-\lambda_3u}+q_2e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]/b(u,v) \tag{6}$$

$$M_2(u,v)=\lambda_2\lambda_3[\lambda_3-\lambda+(q_2\lambda-\lambda_3)e^{-\lambda u}+(\lambda-q_2\lambda_3)e^{-\lambda_3u}+q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]/b(u,v) \tag{7}$$

3）系统异常的检出频度和系统的检测频度

单位时间内检测出来系统处于异常状态（并且检测结果正确）的平均次数称为系统异常的检出频度. 单位时间内对系统的平均检测次数称为系统的检测频度. 在时刻 t 系统异常的瞬时检出频度 $W_3(t,u,v)$ 和系统的瞬时检测频度 $W_4(t,u,v)$ 的 L 变换式分别为

$$W_3^*(s,u,v)=p_2\lambda_2(s+\lambda)(s+\lambda_3)[e^{-(s+\lambda)u}-e^{-(s+\lambda_3)u}]/C(s,u,v),$$

$$W_4^*(s,u,v)=(s+\lambda)(s+\lambda_3)[(\lambda_3-\lambda_1)e^{-(s+\lambda)u}-\lambda_2e^{-(s+\lambda_3)u}-q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]/C(s,u,v).$$

在平稳状态下，系统异常的检出频度和系统的检测频度分别为

$$M_3(u,v)=p_2\lambda\lambda_2\lambda_3(e^{-\lambda u}-e^{-\lambda_3 u})/b(u,v) \tag{8}$$

$$M_4(u,v)=\lambda\lambda_3[(\lambda_3-\lambda_1)e^{-\lambda u}-\lambda_2 e^{-\lambda_3 u}-q_2(\lambda_3-\lambda)e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]/b(u,v) \tag{9}$$

4）系统检测的误断频度和漏断频度

单位时间内系统检测发生误断(漏断)的平均次数称为系统的误断(漏断)频度. 在时刻 t 系统的瞬时误断频度 $W_5(t,u,v)$ 和漏断频度 $W_6(t,u,v)$ 的 L 变换式分别为

$$W_5^*(s,u,v)=q_1(\lambda_3-\lambda)(s+\lambda)(s+\lambda_3)[e^{-(s+\lambda)u}-q_2e^{-(2s+\lambda+\lambda_3)u}]/C(s,u,v),$$

$$W_6^*(s,u,v)=q_2\lambda_2(s+\lambda)(s+\lambda_3)[e^{-(s+\lambda)u}-e^{-(s+\lambda_3)u}]/C(s,u,v).$$

在平稳状态下，系统检测的误断频度和漏断频度分别为

$$M_5(u,v)=q_1\lambda\lambda_3(\lambda_3-\lambda)[e^{-\lambda u}-q_2e^{-(\lambda+\lambda_3)u}]/b(u,v) \tag{10}$$

$$M_6(u,v)=q_2\lambda\lambda_2\lambda_3(e^{-\lambda u}-e^{-\lambda_3 u})/b(u,v) \tag{11}$$

3　系统的最优检测策略

根据系统假定和上节有关结果，可以导出系统的最优检测策略，即系统的最优检测周期和诊断参数的最优临界值. 在时间段 $[0,t]$ 内，系统在正常和异常状态下的平均工作时间 $D_1(t,u,v)$，$D_2(t,u,v)$，系统发生正常和异常故障的平均次数 $E_1(t,u,v)$，$E_2(t,u,v)$，修理系统异常状态的平均次数 $E_3(t,u,v)$，对系统检测的平均次数 $E_4(t,u,v)$ 和修理系统正常状态的平均次数 $E_5(t,u,v)$（因为发生了误断）分别为

$$D_i(t,u,v)=\int_0^t A_i(t,u,v)\mathrm{d}t,\ \ i=1,2,\qquad E_i(t,u,v)=\int_0^t W_i(t,u,v)\mathrm{d}t,\ \ i=1,2,3,4,5.$$

系统在 $[0,t]$ 内获得的平均利润 $L(t,u,v)$ 的 L 变换式为

$$L^*(s,u,v)=\Big[\sum_{i=1}^{2}R_iA_i^*(s,u,v)-\sum_{i=1}^{5}E_iW_i^*(s,u,v)\Big]/s;$$

在平稳状态下，系统单位时间内获得的平均利润为

$$L(u,v)=\lim_{t\to\infty}L(t,u,v)/t=\lim_{s\to 0}s^2L^*(s,u,v)=\sum_{i=1}^{2}R_iA_i(u,v)-\sum_{i=1}^{5}E_iM_i(u,v) \tag{12}$$

由式(1)，(2)可知，p_1,q_1,p_2,q_2 均为 v 的函数，故 $L(u,v)$ 是关于检测周期 u 和诊断参数临界值 v 的有明显解析表达式的二元函数. 系统的最优检测周期 $u^\#$ 和诊断参数的最优临界值 $v^\#$ 就是 $L(u,v)$ 的最大值点 $(u^\#,v^\#)$，该最优值使系统在平稳状态下单位时间内获得的利润最大.

参 考 文 献

1　曹晋华，程侃. 可靠性数学引论. 北京：科学出版社，1986

2　Luss H. An inspection policy model for production facilities. *Management Science*, 1983, **29**:1101～1109

3　Su Baohe. On a two-dissimilar-unit system with three modes and random check. *Microelectron. Reliab.*, 1997, **37**(8):1233～1238

4　苏保河. 四状态可修系统的可靠性和检测策略研究. 自动化学报，1999，**25**(1):100～104

5　史定华. 计算可修系统在 $(0,t]$ 中平均故障次数的新方法. 应用数学学报，1985，**8**(1):101～110

苏保河　1982 年毕业于石家庄铁道学院师资班，现为暨南大学珠海学院教授. 主要研究兴趣为可靠性理论与应用、系统的检测策略与故障诊断.