第 28 卷 第 2 期
2002 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 2
Mar., 2002

短文

一类控制问题的降阶控制器设计[1)]

曾建平　　程　鹏
（北京航空航天大学自动控制系　北京　100083）

摘　要　基于线性矩阵不等式(LMI, linear matrix inequalities)，考虑了线性时不变对象的一类控制问题的降阶控制器设计问题. 给出了一个新的降阶控制器阶的上界，该上界适用于标准和奇异控制两种情形. 证明是构造性的，可以给出降阶控制器的构造方法. 给出了简单的例子，说明该方法的可行性和正确性.

关键词　LMI，降阶控制器，H_∞控制，鲁棒控制
中图分类号　TP271.61

DESIGN REDUCED-ORDER CONTROLLERS FOR A CLASS OF CONTROL PROBLEMS

ZENG Jian-Ping　CHENG Peng
(*Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing* 100083)

Abstract　The problem to design reduced-order controllers for a class of control problems is studied for linear time-invariable plants based on LMI (linear matrix inequalities). A new upper bound of the order for reduced-order controllers is proposed. The bound is applicable to both standard and singular control problems. Due to the constructive proof, an algorithm to construct the controller can be obtained. Finally, simple examples are given to show practicality and correctness of this approach.

Key words　LMI, reduced-order controller, H_∞ control, robust control

1　引言

近年来，由于有效的凸优化算法的发展，线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequalities, LMI)方法成了解决控制问题的有力工具. 基于 LMI 的方法，一般可构造出阶数为被控对象 McMillan 阶的所谓全阶控制器. 当被控对象阶数较高时，全阶控制器实现困难，且引起时滞，影响控制品质. 阶数小于被控对象阶的降阶控制器设计问题在理论和实践上都具有重要

1) 国家自然科学基金(69574013)和山西省青年科学基金(19991018)资助
收稿日期　1999-03-18　　收修改稿日期　2000-06-30

的意义，是控制领域研究的基本问题之一. Xin 等[1]和郭雷等[2~4]研究了降阶控制器设计问题，并统一地给出了一类控制问题的降阶控制器设计方法. 在一些情形下，上述方法只能得到全阶控制器. 在文献[1～4]的基础上，本文给出了一个降阶控制器阶的上界，该上界蕴涵了文献[1～4]的结果. 为不使符号太烦琐，文中主要以纯粹 H_∞ 控制问题为例进行讨论. 文中采用的记号说明如下. I 表示合适维数单位矩阵，$A^\perp$ 为具有如下特征的矩阵：$\mathrm{Ker}\, A^\perp = \mathrm{Im}\, A$，$A^\perp A^{\perp\mathrm{T}} > 0$. 记 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] := C(sI-A)^{-1}B+D$，$Sym(B,G,C) := BGC+(BGC)^{\mathrm{T}}$. 约定各矩阵具有合适的维数.

2 H_∞ 控制理论

考虑 n_p 阶广义被控对象

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s)\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $z\in R^{n_z}$，$y\in R^{n_y}$，$w\in R^{n_w}$ 和 $u\in R^{n_u}$ 分别表示广义对象的控制输出信号，测量信号，外部输入信号和控制信号.

引理 1. 如下陈述是等价的：

i) H_∞ 控制问题可解；

ii) 存在阶数 $n_c\leqslant N_C$ 的降阶控制器，其中

$$N_C = \min\left\{n_p - \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} + \mathrm{Rank}\, D_{12}, n_p - \mathrm{Rank}[C_2 \quad D_{21}] + \mathrm{Rank}\, D_{21}\right\} \tag{2}$$

iii) $L_D\neq\varnothing$，其中

$$L_D := \left\{(X,Y)\in R^{n_p\times n_p}\times R^{n_p\times n_p}: X\in L_B,\ Y\in L_C,\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}\geqslant 0\right\} \tag{3}$$

$$L_B := \left\{X\in R^{n_p\times n_p}: X>0,\ \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} AX+XA^{\mathrm{T}}+B_1B_1^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}}+B_1D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1X+D_{11}B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}D_{11}^{\mathrm{T}}-I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}} < 0\right\} \tag{4}$$

$$L_C := \left\{Y\in R^{n_p\times n_p}: Y>0,\ \begin{bmatrix} C_2^{\mathrm{T}} \\ D_{21}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} YA+A^{\mathrm{T}}Y+C_1^{\mathrm{T}}C_1 & YB_1+C_1^{\mathrm{T}}D_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}}Y+D_{11}^{\mathrm{T}}C_1 & D_{11}^{\mathrm{T}}D_{11}-I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2^{\mathrm{T}} \\ D_{21}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}} < 0\right\} \tag{5}$$

若 $L_D\neq\varnothing$，则存在一个阶数 $n_c\leqslant\mathrm{Rank}(X-Y^{-1})$ 的控制器.

引理中 i)和 iii)的等价性由 Iwasaki 和 Skelton 给出[5]，i)和 ii)的等价性是 Xin 等的结果[1]. 当 $\mathrm{Rank}\, D_{12}=n_u$ 且 $\mathrm{Rank}\, D_{21}=n_y$ 时，有 $N_C=n_p$，即式(2)退化为全阶控制器的平凡情形，因而式(2)不能适用于标准 H_∞ 控制及一类奇异 H_∞ 控制问题.

3 降阶 H_∞ 控制器阶的上界

记 $[E \mid F^{\mathrm{T}}] := \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \left[\begin{array}{c|c} A & I \\ C_1 & 0 \end{array}\right]$，$Q := \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} B_1B_1^{\mathrm{T}} & B_1D_1^{\mathrm{T}} \\ D_{11}B_1^{\mathrm{T}} & D_{11}D_{11}^{\mathrm{T}}-I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\perp\mathrm{T}}$. 设 $r=\mathrm{Rank}\, E$，$E=U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}$ 为 E 的奇异值分解. 并记 $\overline{X} := V^{\mathrm{T}}XV = \begin{bmatrix} X_r & X_{1r} \\ X_{1r}^{\mathrm{T}} & X_{n-r} \end{bmatrix}$，$X_r\in R^{r\times r}$，

则式(4)中的 LMI 可写为

$$Sym\left(U\begin{bmatrix}\Sigma\\0\end{bmatrix},\ [X_r\quad X_{1r}],\ V^{\mathrm{T}}F\right)+Q<0 \tag{6}$$

由引理 1,可得下述结论.

定理 1. H_∞控制问题可解,当且仅当 $\bar{L}_D\neq\varnothing$,其中

$$\bar{L}_D:=\left\{(\bar{X},Y)\in R^{n_p\times n_p}\times R^{n_p\times n_p}:\bar{X}\in\bar{L}_B,\ Y\in L_C,\ \begin{bmatrix}\bar{X} & V^{\mathrm{T}}\\ V & Y\end{bmatrix}\geqslant 0\right\} \tag{7}$$

$$\bar{L}_B:=\left\{\bar{X}>0:\bar{X}=\begin{bmatrix}X_r & X_{1r}\\ X_{1r}^{\mathrm{T}} & X_{n-r}\end{bmatrix},\ X_r,X_{1r}\text{ 满足 LMI(6)}\right\} \tag{8}$$

仿文献[1],由式(7)中 3LMIs 的一对可行解,可构造出下面一对满足秩约束的可行解.

引理 2. $\forall(\bar{X},Y)\in\bar{L}_D$, $\exists\hat{X}$,使得$(\hat{X},Y)\in\bar{L}_D$,且 $\mathrm{Rank}(\hat{X}-V^{\mathrm{T}}Y^{-1}V)\leqslant r$.

证明. 记 $Z=\bar{Y}-V^{\mathrm{T}}X^{-1}V:=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22}\end{bmatrix}$, $Z_{11}\in R^{r\times r}$,令

$$\hat{Y}_{22}:=Y_{22}-Z_{22}+Z_{12}^{\mathrm{T}}Z_{22}^{+}Z_{12},\qquad \hat{Y}:=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{12}^{\mathrm{T}} & \hat{Y}_{22}\end{bmatrix} \tag{9}$$

参照文献[1]引理 3 和引理 4 的证明,可验证引理成立.　　证毕.

定理 2. 若 H_∞控制问题可解,则存在阶数 $n_c\leqslant r$ 的降阶控制器.

证明. 由引理 2 和定理 1,即得.　　证毕.

定理 2 的证明是构造性的,可给出降阶控制器构造算法,其主要步骤如下:1)求解式(7)中 3LMIs,设$(\bar{X},Y)\in\bar{L}_D$; 2)按式(9)构造$(\hat{X},Y)\in\bar{L}_D$,则$(V\hat{X}V^{\mathrm{T}},Y)\in L_D$,且 $\mathrm{Rank}(V\hat{X}V^{\mathrm{T}}-Y^{-1})\leqslant r$; 3)由$(V\hat{X}V^{\mathrm{T}},Y)\in L_D$,构造阶数为 $\mathrm{Rank}(V\hat{X}V^{\mathrm{T}}-Y^{-1})$的控制器的方法,可参照文献[6]给出.

对 F 进行奇异值分解,与定理 2 相仿,可以证明,$n_c\leqslant\mathrm{Rank}\ F$. 类似的,考虑式(5)中 LMI,还可以证明 $n_c\leqslant\min\left\{\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\ B_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right\}$.

综上所述,即得本节的主要结果.

定理 3. 如下陈述是等价的

i) H_∞控制问题可解;

ii) 存在 $n_c\leqslant\min\left\{\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_2\\ D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A\\ C_1\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_2\\ D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\ B_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right\}$ 的降阶控制器.

可以证明以下等式成立.

命题 1. 1) $\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_2\\ D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}=n_p-\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_2\\ D_{12}\end{bmatrix}+\mathrm{Rank}\ D_{12}$,

2) $\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\ D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}=n_p-\mathrm{Rank}[C_2\quad D_{21}]+\mathrm{Rank}\ D_{21}$.

命题 1 表明,定理 5 中降阶控制器的阶不超过式(2)中的阶,以下给出几个简单算例.

例 1. 考虑对象 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $C_1=[1\quad 0]$, $C_2=[2\quad 1]$, $D_{11}=0$, $D_{12}=D_{21}=1$. 经验证,H_∞控制问题可解. 由式(2),$N_C=2$,文献[1]方法只能得到全阶控制器;因 Rank$(E)=1$,由定理 3 可以构造出 1 阶控制器.

例 2. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\3 & 1 & 2\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, $C_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $C_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $D_{11}=0$, $D_{12}=[1\quad 0]$, $D_{21}=1$. 其 H_∞控制问题可解,由式(2)可知存在 2 阶控制器,据定理 1,存在 1 阶控制器.

4 进一步的推广

以上降阶 H_∞控制器设计的结果可以推广到一类控制器问题,限于篇幅,仅列出结论,参照降阶 H_∞控制器设计方法,不难给出证明.

采用文献[2]符号,定理 3 可推广到如下控制问题: A)镇定控制问题; B)协方差上界控制问题; C)LQG 控制问题; D)L_∞控制问题; E)鲁棒 H_2 控制问题; F)鲁棒 H_∞控制问题; G)鲁棒 L_∞控制. 即

定理 4. 若文献[2]中控制问题 A)~G)的可解条件满足,则存在

$$n_c\leqslant\min\left(\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_u\\D_{\phi u}\\D_{yu}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A\\C_\phi\\C_y\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_u\\D_{\phi u}\\D_{yu}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_z^{\mathrm{T}}\\D_{z\omega}^{\mathrm{T}}\\D_{zw}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B_\omega^{\mathrm{T}}\\B_w^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_z^{\mathrm{T}}\\D_{z\omega}^{\mathrm{T}}\\D_{zw}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

的降阶控制器.

采用文献[3]的符号,定理 3 可推广到正实控制问题.

定理 5. 若正实控制问题可解,则存在阶数

$$n_c\leqslant\min\left(\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_u\\D_{yu}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A\\C_y\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_u\\D_{yu}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_z^{\mathrm{T}}\\D_{zw}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B_w^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_z^{\mathrm{T}}\\D_{zw}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right)$$

的降阶控制器.

采用文献[4]的符号和假定,定理 3 可推广到混合 H_2/H_∞控制问题.

定理 6. 若混合 H_2/H_∞控制问题可解,则存在

$$n_c\leqslant\min\left(\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A\\C_1\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\ \mathrm{Rank}\begin{bmatrix}C_2^{\mathrm{T}}\\D_{21}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right)$$

的降阶控制器.

5 结语

本文给出了一个降阶控制器阶的上界,该上界对被控对象的相似变换、输入变换和输出变换是不变的. 与已有结果相比,文中上界适用范围更广,如对 H_∞控制,定理 3 的结果适用于一般的 H_∞控制问题,现有结果不适用于标准及一类奇异 H_∞控制问题.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

1 Xin X, Guo L, Feng C B. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI. *Automatica*, 1996, **32**(11):1581～1585

2 郭雷，忻欣，冯纯伯. 基于LMI的一种统一的降阶控制器设计方法. 中国科学(E), 1997, **27**(4):353～361

3 郭雷，忻欣，冯纯伯. 线性对象的正实控制. 自动化学报, 1997, **23**(5):577～583

4 郭雷，忻欣，冯纯伯. 基于LMI的一类混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器设计——连续情形. 自动化学报, 1998, **24**(3):294～299

5 Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, **30**(8):1307～1317

6 Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. In: Proc. ACC, Baltimore: Maryland, 1994. 2396～2400

曾建平　北京航空航天大学博士生.感兴趣的领域为 H_∞ 控制理论、线性系统等.

程　鹏　1962年毕业于北京大学数学力学系，现任北京航空航天大学自动控制系教授、博士生导师. 研究领域为线性系统理论、多变量系统理论、鲁棒控制和运动稳定性等.

(上接第266页)

中国自动化学会2002年一般专题学术活动计划

项目名称	主要内容	时间	地点	联系人
全国第五届Java技术及应用学术会议	国内外Java技术及应用发展综述，Java技术、平台开发工具及产品开发及应用；Java技术在企业信息化、电子商务及远程教学、医疗的求解方案；Java技术及产品在工业、交通、金融等领域与行业应用经验等	3季度	待定	信息产业部6所(北京927信箱) 熊强、罗安 电话：82923953　82923958 邮编：100083
第十三届中国过程控制年会	过程建模、仿真与辨识技术、先进控制、优化控制、模式识别与图像处理、动态系统故障诊断与容错技术、DCS系统、流程工业CIMS等	11月	澳门	广州华南理工大学　朱学锋 电话：(020)87111580 邮编：510641 E-mail: xfzhu@scut.edu.cn
系统仿真技术及其应用学术交流会	21世纪系统仿真技术展望、国内外仿真系统和软件发展方向；连续过程建模与仿真；建模和仿真方法、DEDS仿真技术、定性仿真技术；航空航天、武器装备、仿真技术及各类仿真系统；应用仿真结构的未来等	3季度	安徽	合肥市中国科学技术大学自动化系　王雷、戴耀华 电话：(0551)3601514 3606104 邮编：230001 E-mail: chenzh@ustc.edu.cn
全国第十届空间及运动体控制技术学术会议	控制理论、方法及其在空间及运动体控制中的应用；飞行器制导、导航与控制技术；空间实验室动力学和控制技术；航天器交会对接技术；空间机器人等	8月	湖南	北京控制工程研究所(北京2729信箱)科技委　李静 电话：68378650 邮编：100080
全国办公自动化学术会议	电子政府发展趋势、展望以及对信息化发展的促进作用；法律与政策环境研究、技术标准与管理规范；发展模式及应用实例分析等	7月	沈阳	沈阳浑南高新技术产业开发区——东大软件园东软集团科研部 李春山、高昕 电话：(024)23783377 邮编：110179 E-mail: lics@neusoft.com; Gaoxin@neusoft.com
FA/PA现代工厂自动化技术与装备展览会	学术交流与展示展览会的结合	5月	北京	北京德外教场口一号　肖秀珍 电话：62024309 邮编：100011

(下转第283页)