

# 基于二进小波变换和软阈值改进的信号消噪<sup>1)</sup>

祝海龙<sup>1, 2</sup> 郭天佑<sup>2</sup> 屈梁生<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(西安交通大学诊断与控制学研究所 西安 710049)

<sup>2</sup>(香港科技大学计算机科学系 香港)

(E-mail: zhl@mail. xjtu. edu. cn)

**摘要** 软阈值消噪是信号消噪中的标准算法. 理论上, 软阈值方法在最小最大误差方面是近似最优的. 研究表明, 通过结合系数消噪和软阈值方法, 可以达到更低的误差下界. 由于离散小波是非平移不变的, 因而重构过程中会出现人工噪声. 为了避免这个问题, 采用了具有平移不变性的二进小波变换. 实验结果表明, 文中所提算法的消噪结果具有更高的信噪比和更光滑的外观.

**关键词** 信号消噪, 软阈值, 二进小波变换

**中图分类号** TN911.72

## Signal De-Noising by Improving Soft Thresholding on the Dyadic Wavelet Transform

ZHU Hai-Long<sup>1, 2</sup> James Tin-Yau KWOK<sup>2</sup> QU Liang-Sheng<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(Institute of Diagnostics and Cybernetics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

<sup>2</sup>(Department of Computer Science, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong)

(E-mail: zhl@mail. xjtu. edu. cn)

**Abstract** Soft thresholding method has been a standard procedure in signal de-noising. Theoretically, it is also almost optimal in the sense of minimax mean-squared error. This paper shows that by combining coefficient de-noising and soft thresholding, a lower bound of mean-squared-error can be achieved. Furthermore, the translation-invariant (TI) dyadic wavelet transform is used instead of DWT, which can avoid the artifacts caused by the non-TI reconstruction. Experiments show that the proposed method improves the signal-to-noise ratios of the de-noised signals. Moreover, the de-noised signals have smooth and nice visual appearance.

**Key words** Signal de-noising, soft thresholding, dyadic wavelet transform

## 1 引言

小波阈值法在信号和图像的消噪、边缘检测和特征提取中得到了广泛的应用. 对信号进行小波变换后, 噪声成分主要包含在幅值小的系数中. 通过设定合适的阈值, 把小于阈值的

1) 香港特别行政区研究资助局(HKUST2033100E)资助

Supported by the Research Grants Council of the Hong Kong Special Administrative Region (HKUST2033/00E)

收稿日期 2002-12-24 收修改稿日期 2003-07-08

Received December 24, 2002; in revised form July 8, 2003

小波系数设为零,其余的系数不变,并进行小波重构即可得到消噪信号,这就是硬阈值消噪. Donoho 和 Johnstone<sup>[1]</sup>在函数的光滑性理论和噪声统计性质的基础上,提出了软阈值消噪方法. 软阈值消噪将小于阈值的小波系数设为零,其余的系数幅值向零缩减. 近年来,多种机器学习理论被应用于解决小波阈值法消噪问题<sup>[2~6]</sup>,但是这些方法都没有突破软阈值方法所构造的风险的界. 另外,这些方法都是应用在离散小波变换(DWT)上. 由于离散小波变换的非平移不变性,导致在小波重构过程中出现人工噪声<sup>[7,8]</sup>. 本文在二进小波变换的基础上,重点研究了软阈值消噪的改进方法. 由于二进小波变换是平移不变过程(translation invariant, TI),从而避免了人工噪声的困扰. 本文在理论上证明,通过引入系数消噪(对小波系数进行消噪处理),可以改进由软阈值方法确立的风险下界,因此消噪结果更为准确.

本文第 2 节讨论了二进小波变换问题,第 3 节讨论系数消噪方法,第 4 节给出算法的实现细节,第 5 节是实验比较的结果,最后是结论和相关讨论.

## 2 二进小波变换与重构

如果复函数  $\varphi(t)$  的傅氏变换  $\hat{\varphi}(\omega)$  满足条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 / |\omega| d\omega < \infty$ , 则  $\varphi(t)$  可以作为基本小波. 对基本小波进行伸缩和平移变换得到  $\varphi_{a,b}(t) = (|a|^{-1})\varphi((x-b)/a)$ . 函数  $f(t) \in L^2(R)$  的小波变换可以表示为  $(Wf)(a,b) = \langle f, \varphi_{a,b} \rangle$ .

二进小波变换对小波尺度  $a$  进行二进离散,即  $a=2^{-j}$ ,  $j \in Z$  (整数集合),而平移  $b$  为信号的采样间隔. 欲使二进小波变换的重构公式有效,基本小波  $\varphi(t)$  的傅立叶变换必须满足稳定性条件  $A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B$ , 其中  $0 < A \leq B < \infty$  是与  $\omega$  无关的常数. 若存在函数  $\chi(t)$ , 使得

$$S_{\varphi,\chi}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(2^j\omega)\hat{\chi}(2^j\omega) = 1 \quad (1)$$

几乎处处成立,则称  $\chi(t)$  为  $\varphi(t)$  的二进对偶. 二进小波重构的傅立叶变换形式为

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\hat{W}f)(2^j, \omega)\chi(2^j\omega) \quad (2)$$

文献[9,10]通过引入平滑函数提出了一种二进小波及其对偶,这里称之为  $\varphi_A$  和  $\chi_A$ , 其傅立叶变换为

$$\hat{\varphi}_A(2^j\omega) = -\frac{(2^j\omega)^2}{4} \left[ \frac{\sin((2^j\omega)/4)}{(2^j\omega)/4} \right]^{2p+2} \quad (3)$$

$$\hat{\chi}_A(2^j\omega) = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\sin((2^j\omega)/4)}{(2^j\omega)/4} \right]^{2p} \cdot \sum_{k=0}^{2p-1} \left[ \cos\left(\frac{2^j\omega}{4}\right) \right]^{2p} \quad (4)$$

其中  $p$  是常数,  $j \in Z$ . 图 1(a) 是  $\varphi_A$  小波的滤波器簇的频率窗,  $p$  的值对滤波器簇的频率窗分布的影响很小,这里取  $p=3$ . 图中纵坐标表示幅值,横坐标是频率,0 和  $2\pi$  代表低频,  $\pi$  代表高频(由采样速率所确定的最高频率). 此外,图中还标出了每个频率窗所对应的  $j$ . 从图中可以看到,当  $j$  减小成负数时,窗的形状开始发生变形,相应的滤波器的性质也发生了变化. 而且随着  $j$  的减小,窗的高度不断降低,这实际上相当于增大了带宽,因而分析性能变差. 但是如果舍弃这些分析性能不好的滤波器又会影响重构精度. 因此在实际进行二进小波变换时,要确定合理的尺度范围.

通常,理想的二进小波既要适合信号分析,又能实现足够高的重构精度. 作为比较,考虑

一种类高斯型小波  $\varphi_B$

$$\hat{\varphi}_B(2^j\omega) = (2^j\omega) \exp(-(2^j\omega)^2/2) \quad (5)$$

其中  $\omega \in [0, 2\pi], j \in Z$ . 图 1(b) 为  $\varphi_B$  小波滤波器簇的频率窗, 其形状与图 1(a) 相似, 但是图 1(b) 中的窗对频率轴的划分更细.  $\varphi_B$  小波曾见于 WaveLab 软件包<sup>[11]</sup>, 用于实现连续小波变换, 但是没有关于其信号重构方面的研究. 本文将通过实验说明, 这个小波是“近似自对偶”的, 即

$$\hat{\chi}(2^j\omega) \cong \hat{\varphi}(2^j\omega) \quad (6)$$

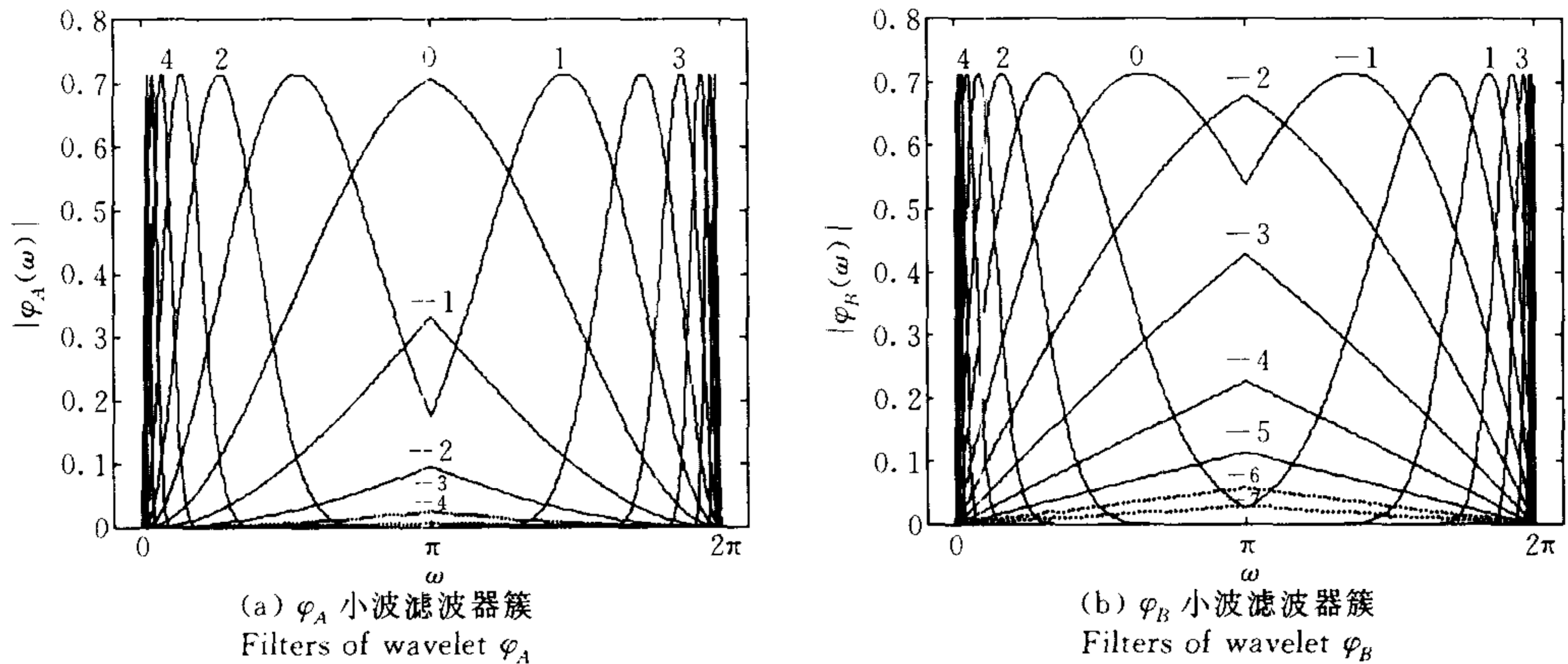


图 1 小波滤波器簇的频率窗

Fig. 1 Frequency windows of wavelet filters

假定对于  $\varphi_A$  小波和  $\varphi_B$  小波, 分别取  $j \in [l_A, u_A]$  和  $j \in [l_B, u_B]$ , 其中  $l_A, u_A, l_B, u_B$  均为整数. 为了在同样的条件下比较  $\varphi_A$  和  $\varphi_B$ , 取  $l_A = -2, l_B = -5$ , 这是因为这两个滤波器的频率窗的高度相近, 从而保证了它们的分析性能基本相同. 考虑到频率分辨率的问题, 若  $n$  为信号长度, 则  $u_A = \log_2(n/2), u_B = \log_2(n/2) - 2$ , 因为超出这个范围的频率窗的高度为零.

小波重构的精度用

$$SNR_{db} = 10 \log_{10} (E\{\|Y\|^2\} / E\{\|Y - \hat{Y}\|^2\}) \quad (7)$$

表示, 其中  $Y$  和  $\hat{Y}$  分别表示原始信号和重构信号. WaveLab 中提供了各种类型的信号, 对其中 20 种信号<sup>1)</sup> 分别使用  $\varphi_A$  和  $\varphi_B$  小波进行分解和重构, 重构精度如图 2 所示. 图中横坐标表示不同信号, 纵坐标表示重构精度 (dB).  $\varphi_A$  和  $\varphi_B$  小波重构精度分别用正方形和三角形符号标出. 由图 2 可见, 对所有信号,  $\varphi_B$  小波的重构精度均远高于  $\varphi_A$  小波. 此外,  $\varphi_B$  小波的重构精度均高于 44dB, 可以很好地满足实际需要. 因此, 虽然理论上  $\varphi_B$  小波不是自对偶的, 但是可以实现高精度的重构, 因此它是“近似自对偶”的. 本文的消噪算法中使用的就是  $\varphi_B$  小波.

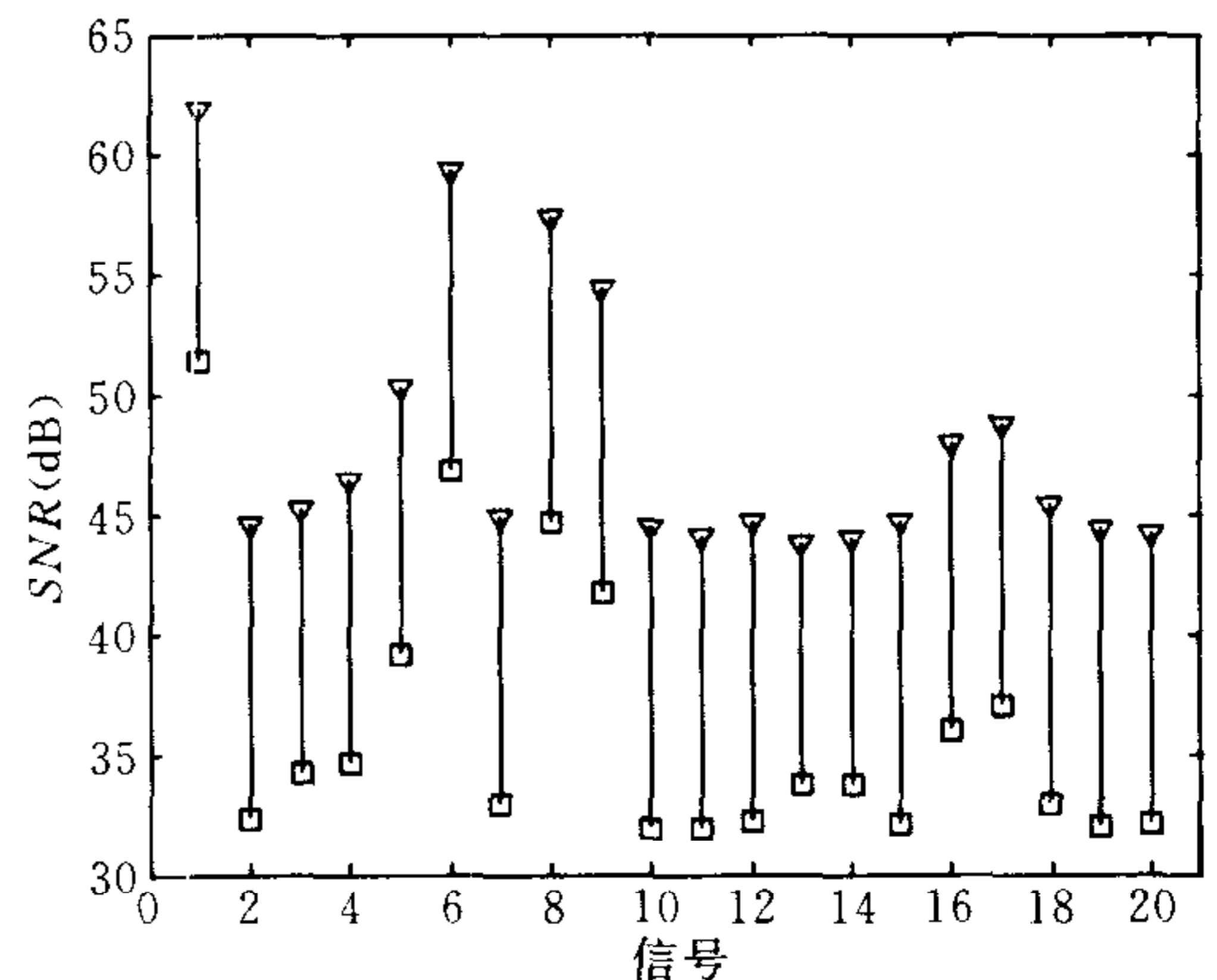


图 2 小波重构的精度

Fig. 2 Precision of wavelet reconstruction

1) 这 20 种信号分别是 ‘HeaviSine’, ‘Bumps’, ‘Blocks’, ‘Doppler’, ‘Ramp’, ‘Cusp’, ‘Sing’, ‘HiSine’, ‘LoSine’, ‘LnChirp’, ‘TwoChirp’, ‘QuadChirp’, ‘MishMash’, ‘WernerSorrows’, ‘Leopold’, ‘Piece-Regular’, ‘Riemann’, ‘HypChirps’, ‘LnChirps’, ‘Chirps’.

### 3 对软阈值消噪的改进

首先回顾软阈值消噪理论中关于误差下界的结论<sup>[1]</sup>.

假定在第  $i$  个测点上的观测为

$$y_i = \theta_i + \delta \cdot u_i, \quad i \in I \quad (8)$$

上式中  $\theta_i$  是真实信号;  $u_i$  是噪声项, 且满足  $|u_i| \leq 1, i \in I, I$  为下标集;  $\delta > 0$  表示噪声水平. 若  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的一个估计, 则在最坏情况下的平均平方误差为

$$M_\delta(\hat{\theta}, \theta) = \sup_{|u_i| \leq 1} \|\hat{\theta} - \theta\|_{I_n}^2 \quad (9)$$

软阈值消噪中, 以  $\delta$  为阈值的消噪结果可写为  $\hat{\theta}_i^{(\delta)} = \text{sgn}(y_i) \cdot (|y_i| - \delta)_+$ . 如果  $\hat{\theta}$  满足如下的一致收缩条件

$$|\hat{\theta}_i| \leq |\theta_i|, \quad i \in I \quad (10)$$

$$M_\delta(\hat{\theta}, \theta) \geq M_\delta(\hat{\theta}^{(\delta)}, \theta) \quad \forall \theta \quad (11)$$

其中

$$M_\delta(\hat{\theta}^{(\delta)}, \theta) = \sum_{i \in I_n} \min(\theta_i^2, (2\delta)^2) \quad (12)$$

这个界是由噪声水平  $\delta$  决定的.

现在讨论误差下界的改进方法. 假定对式(8)施加一个消噪过程  $D$ , 并将其写成矢量形式

$$y^D = \theta + \epsilon \cdot v \quad (13)$$

其中  $v_i$  满足条件  $|v_i| \leq 1, i \in I$ . 如果消噪算法  $D$  能够保证不等式

$$\text{SNR}(\theta, y^D) \geq \text{SNR}(\theta, y), \quad \theta \in \Theta \quad (14)$$

在一大类信号集合  $\Theta$  上成立(实际上, 这个要求并不苛刻, 只要原始信号的信噪比  $\text{SNR}(\theta, y)$  不是太高), 则有以下式成立

$$\epsilon \leq \delta \quad (15)$$

如果进一步对  $y^D$  进行以  $\epsilon$  为阈值的软阈值处理, 由式(11)和(12)可得

$$M_\epsilon(\hat{\theta}^{(\epsilon)}, \theta) = \sum_{i \in I_n} \min(\theta_i^2, (2\epsilon)^2) \leq M_\delta(\hat{\theta}^{(\delta)}, \theta) \quad (16)$$

因此, 通过在软阈值处理之前引入消噪过程  $D$ , 可以改进软阈值消噪的误差下界.

由于消噪过程  $D$  的影响, 对  $v_i$  的噪声水平  $\epsilon$  的估计比较困难. 但是, 在高斯白噪声的假设下, 噪声水平  $\delta$  的估计是比较容易的. 因此, 本文采用一个次优方案, 在  $y^D$  上进行以  $\delta$  为阈值的软阈值处理, 则可以得到

$$M_\epsilon(\hat{\theta}^{(\delta)}, \theta) = \sum_{i \in I_n} \min(\theta_i^2, (\delta + \epsilon)^2) \quad (17)$$

根据式(15), 有以下式成立

$$M_\epsilon(\hat{\theta}^{(\delta)}, \theta) \leq M_\delta(\hat{\theta}^{(\delta)}, \theta) \quad (18)$$

上式表明, 在系数消噪之后, 进行以  $\delta$  为阈值的软阈值处理, 仍然可以改进消噪过程的误差下界.

如果式(8)中的变量是小波变换系数, 则式(13)就是对小波系数进行消噪, 因此称作系

数消噪. 实验表明, 通过在二进小波变换上应用系数消噪, 再结合软阈值处理, 可以得到在预测精度更高的消噪结果.

## 4 系数消噪和阈值估计方法

考虑一个具有加性噪声的观测  $f(x) = s(x) + u(x)$ , 其中  $s(x)$  是信号,  $u(x)$  是高斯白噪声. 则它在第  $j$  个尺度上的二进小波变换可写作

$$(Wf)(2^j, x) = \langle (s + u), \varphi_{2^j} \rangle = (Ws)(2^j, x) + (Wu)(2^j, x) \quad (19)$$

其中  $j \in J$ , 如第 2 节所述,  $J = [-5, \log_2(n/2) - 2]$ . 式(19)表示, 在加性噪声情况下, 噪声与信号的小波变换的系数仍然呈加性关系. 按照式(8)的形式, 将其重写为

$$(Wf)_j(x) = (Ws)_j(x) + \delta_j \cdot (\widetilde{W}u)_j(x) \quad (20)$$

其中  $|(\widetilde{W}u)_j(x)| \leq 1, \forall x, \delta_j$  表示尺度  $j$  的小波系数的噪声水平. 对式(20)进行系数消噪得到

$$(Wf^D)_j(x) = (Ws)_j(x) + \epsilon_j \cdot v_j(x) \quad (21)$$

根据经验, WaveLab 中的 HYBRID 方法在一个广泛的信号集上都具有比较高的消噪精度, 而且具有速度快的优点. 因此, 本文选择 HYBRID 方法来作为系数消噪方法.

由式(18)可知, 对系数消噪的结果  $(Wf^D)_j(x)$  进行以  $\delta_j$  为阈值的软阈值处理, 可以改进误差下界, 而且也是实际可行的. 在加性噪声情况下, 噪声水平  $\delta_j$  与信号  $s(x)$  之间完全无关, 即在噪声相同的情况下, 不论  $s(x)$  为何种信号,  $\delta_j$  均是确定的. 因此可用如下方法估计  $\delta_j$  (假定样本点数为  $n$ ):

1) 重复生成  $m$  (本文中  $m = 300$ ) 个噪声信号  $u(x) \sim N(0, 1)$ , 采样长度为  $n$ , 并分别对其进行二进小波变换;

2) 对于第  $j$  个尺度上的所有  $m \times n$  个系数的绝对值按从小到大排序, 找到在 99% 意义下的最大值, 即为  $\delta_j$ .

实际消噪中, 需要首先估计观测信号的噪声方差 (假设为高斯白噪声), 然后对观测信号进行噪声归一化处理 (线性变换), 使得其中的噪声的均值为零, 方差为 1. 在消噪结束后, 可以使用与归一化相反的处理过程得到具有准确幅值的消噪信号. 这种在消噪前对信号的噪声归一化处理, 是很多消噪算法包括 WaveLab 中的算法的必要步骤.

## 5 实验

实验中采用的目标信号取自 WaveLab 中的 Blocks 信号, 如图 3(a) 所示, 信号在  $[0, 1]$  区间中采样, 采样点数为 1024. Blocks 信号的频率成分非常丰富, 几乎覆盖整个高频和低频区域, 因此经常作为比较消噪算法性能的典型信号. 将本文的消噪算法记作 DYD-CD (coefficient de-noising). 用来比较的消噪算法包括 WaveLab 中的 VISU (软阈值), SURE (硬阈值), HYBRID (软硬阈值组合), Cherkassky 的 VM-W (基于结构风险最小化原则的小波消噪), 以及 Coifman 和 Donoho 提出的基于离散小波变换的平移不变消噪, 记作 DWT-TI. 图 3(b) 是加噪信号 (信噪比为 16dB), 其余各图都是消噪结果, 并标出了相应的信噪比. 由图 3 可见, DYD-CD 的消噪结果最平滑, 最干净, 而且与目标信号最接近 (信噪比最高).

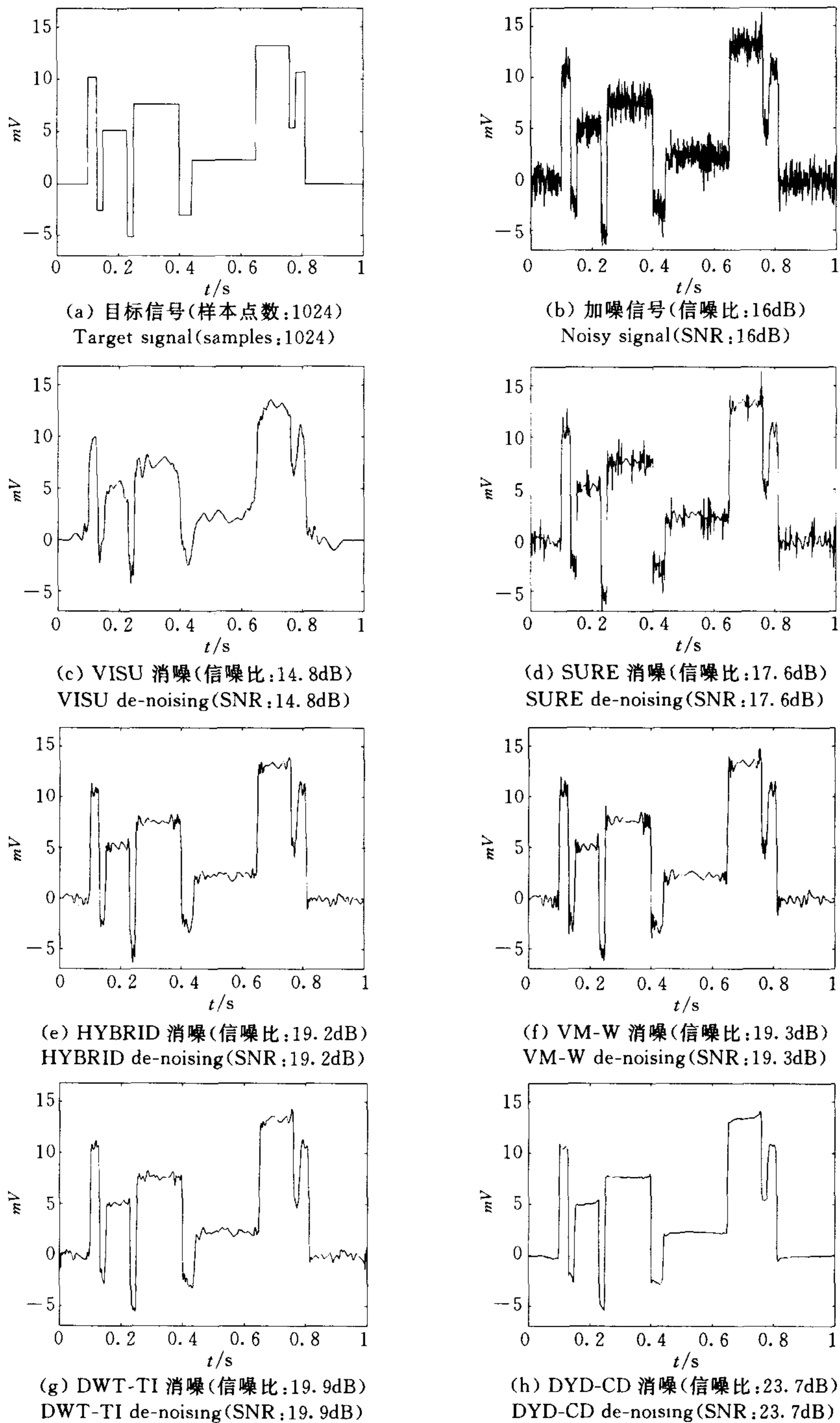


图 3 Blocks 信号及其消噪结果的比较

Fig. 3 Blocks signal and its de-noising results

由于受噪声的影响,消噪结果往往带有一定的随机性.为此,对消噪的信噪比进行统计比较.具体做法是,给目标信号加噪声,对加噪信号用不同算法进行消噪,记录消噪信噪比,

重复这个过程(比如 300 次),将信噪比的分布用统计方框图的形式表示(按照标准做法,标出在信噪比的分布对应于 95%,75%,50%,25%,5%上对应的值). 本文的实验中,信号的样本点数仍然是 1024,考虑了噪声大小不同的情况(16dB 和 2dB). 图 4 中的统计方框图表示了在同一加噪信噪比下,不同算法的消噪信噪比的统计分布. 在所有情况下,DYD-CD 算法的消噪信噪比都最高(主要看 5% 所对应的信噪比,它对应于统计理论中的最小最大(minimax)误差). 另外,DYD-CD 方法的 95% 与 5% 对应的值非常接近,这说明 DYD-CD 的表现非常稳定.

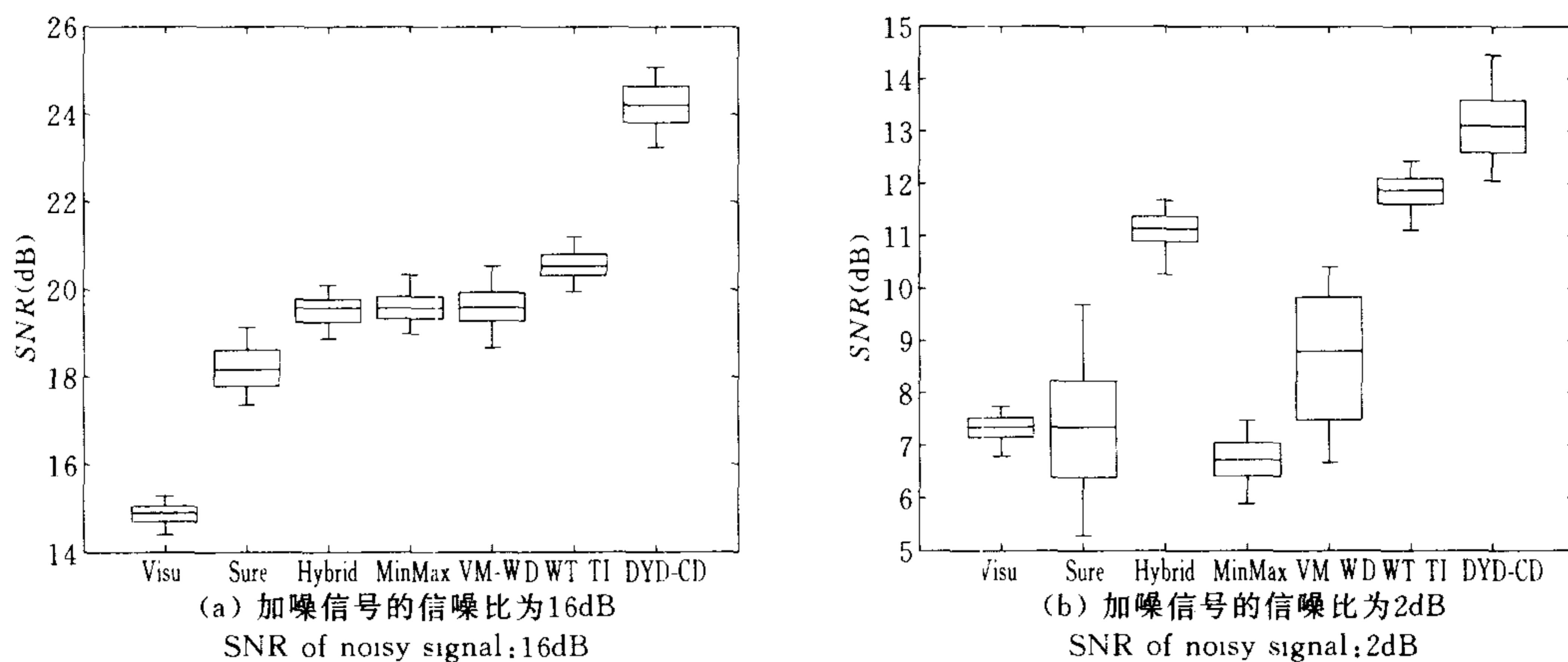


图 4 不同信噪比的加噪信号的消噪结果的统计比较

Fig. 4 Statistical comparison on de-noising results of noisy signals with different SNR

## 6 结论与讨论

评价一个消噪算法的性能,通常根据消噪结果是否能达到更高的预测精度,是否足够平滑,算法是否稳定这三个方面.由前一节的实验结果,可以得到以下结论:

- 1) DYD-CD 算法可以改进软阈值消噪的误差下界;
- 2) DYD-CD 算法的消噪结果更平滑,更干净;
- 3) DYD-CD 算法的性能稳定.

另外,消噪算法是否实用,在一定程度上还决定于其数值计算的效率.通常从算法实现所需要的空间和时间两个方面来考察算法的复杂度.若信号的样本点数为  $n$ ,则离散小波变换的空间复杂度为  $O(n)$ .而二进小波变换共有约  $\log_2(n)$  个尺度,每个尺度有  $n$  个系数,因此其空间复杂度为  $O(n \log n)$ .另外,离散小波变换与软阈值处理的总时间复杂度均  $O(n)$ .本文的 DYD-CD 算法主要包括两个过程,二进小波变换和系数消噪.使用快速傅里叶变换(FFT)的二进小波变换的时间复杂度为  $O(n(\log n)^2)$ ,而在所有尺度上进行系数消噪的时间复杂度为  $O(n \log n)$ .因此 DYD-CD 算法的总的时间复杂度仍为  $O(n(\log n)^2)$ .需要指出的是,尽管 DYD-CD 的空间和时间复杂度比其他方法都高,但是其随  $n$  的增长是受  $\log n$  控制的,因而在数值计算上是可以接受的.

## References

- 1 Donoho D L. De-Noising by soft thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, **41**(3): 617~627
- 2 Jansen M, Malfait M, Bultheel A. Generalized cross validation for wavelet thresholding. *Signal Processing*, 1997, **56**(1): 33~44
- 3 Figueiredo M, Nowak R. Bayesian wavelet-based signal estimation using non-informative priors. In: Proceedings of the Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. Monterey: 1998. 1368~1373
- 4 Abramovich F, Sapatinas T, Silverman B. Wavelet thresholding via a Bayesian approach. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 1998, **60**(4): 725~749
- 5 Cohen I, Raz S, Malah D. Translation-invariant denoising using the minimum description length criterion. *Signal Processing*, 1999, **75**(3): 201~223
- 6 Cherkassky V, Shao X. Signal estimation and de-noising using VC-theory. *Neural Networks*, 2001, **14**(1): 37~52
- 7 Coifman R, Donoho D. Translation-invariant de-noising. In: Wavelets and Statistics; A Antoniadis, G Oppenheim, Lecture Notes in Statistics. New York: Springer Verlag, 1995. 125~150
- 8 Bui T D, Chen G. Translation invariant de-noising using multiwavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(12): 3414~3420
- 9 Mallat S, Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, **14**(7): 710~732
- 10 Laine A, Fan HJ, Schuler S. Digital Mammography. The Netherlands: Elsevier, 1994. 91~100
- 11 Buckheit J B, Donoho D L. WaveLab and reproducible research. In: Wavelets and Statistics; A Antoniadis, G Oppenheim, Lecture Notes in Statistics. New York: Springer Verlag, 1995. 55~81

**祝海龙** 西安交通大学机械工程学院博士研究生. 研究方向包括信号处理、模式识别和人工智能.

(**ZHU Hai-Long** Ph. D. candidate in School of Mechanical Engineering at Xi'an Jiaotong University. His research interests include signal processing, pattern recognition, and artificial intelligence.)

**郭天佑** 香港科技大学计算机系助理教授. 1996 获香港科技大学计算机系博士学位. 研究领域包括支持向量机、人工神经网络、模式识别和机器学习.

(**James Tin-Yau KWOK** Assistant Professor in the Department of Computer Science at Hong Kong University of Science and Technology. His research interests include support vector machines, artificial neural networks, and pattern recognition and machine learning.)

**屈梁生** 西安交通大学机械工程系教授, 博士生导师. 1952 年毕业于交通大学(上海)机械系, 1955 年研究生毕业于哈尔滨工业大学. 研究领域包括机械状态监测与故障诊断、机械信号处理、精密机械、智能制造等.

(**QU Liang-Sheng** Professor in the Department of Mechanical Engineering at Xi'an Jiaotong University. His research interests include machinery surveillance and diagnostics, mechanical signal processing, and precision machinery and intelligent manufacturing.)