研究简报

线性系统的鲁棒 D 稳定性分析[1)]

俞 立
(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032)

关键词 D 稳定性，线性矩阵不等式，鲁棒分析.

ROBUSTNESS OF D-STABILITY FOR LINEAR SYSTEMS

YU Li
(*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310032)

Key words D-stability, LMI, robustness.

1 引言

近年来，结合系统过渡过程特性的考虑，对系统极点在某一特定区域 D 中的系统 D 稳定性的鲁棒特性分析问题已为众多学者所研究[1~4]. 对具有结构和非结构摄动的线性系统，导出了保持系统 D 稳定性的允许摄动范围. 文献[1,2]考虑了一些特定的区域，而文献[3,4]则采用 Gutman 和 Jury[5]提出的根束理论，对一类更一般的区域，导出了其鲁棒 D 稳定性条件. 这些研究所采用的方法就是基于 D 稳定性准则，给出关于摄动界的关系式，所得到的关系式一般都依赖一些参数. 通过适当选取这些参数，得到允许摄动界. 但是，这些参数和允许摄动界之间的内在关系却尚未得到很好揭示，因此，参数的选取往往带有很大的盲目性，从而导致结果的保守性.

最近，文献[6]提出了一类可以用线性矩阵不等式刻划的区域——LMI 区域. 本文针对这类 LMI 区域 D，研究线性不确定系统 D 稳定的鲁棒性问题，导出了用线性矩阵不等式刻划的系统鲁棒 D 稳定性条件. 据此，通过建立一个凸优化问题，采用现有的求解 LMI 问题软件，得到保持系统 D 稳定的摄动参数的尽可能大允许摄动界.

2 问题的描述和准备

本文考虑复平面中的一类特殊区域——LMI 区域，其定义如下.

定义 1[6]. 对复平面 C 中的一个子集 D，如果存在对称矩阵 $U=[u_{ij}]\in R^{m\times m}$和矩阵 $V=$

1) 国家自然科学基金(69974036)、教育部高校骨干教师基金和浙江省自然科学基金资助项目.
收稿日期 1999-04-20 收修改稿日期 2000-03-12

$[v_{ij}]\in R^{m\times m}$,使得

$$D=\{z\in C: f_D(z)<0\},\quad f_D(z)=U+zV+\bar{z}V^T=[u_{ij}+v_{ij}z+v_{ji}\bar{z}]_{1\leqslant i,j\leqslant m},\tag{1}$$

则 D 称为是一个 LMI 区域.

注 1. 定义 1 中的 f_D 称为是LMI 区域 D 的一个特征函数,式(1)中的 $f_D(z)<0$ 是关于变量的一个线性矩阵不等式,$f_D(z)<0$ 表示矩阵 $f_D(z)$是负定的.

注 2. 许多常见的区域,例如圆盘、扇形、半平面、抛物形、椭圆形等区域均是 LMI 区域.

注 3. 任意多个 LMI 区域的交也是 LMI 区域. 因此,复平面中的多边形区域是 LMI 区域. 进而,关于实轴对称的任一凸区域都可以用一个 LMI 区域来近似.

定义 2. 设 D 是左半开复平面中的一个 LMI 区域,如果矩阵 A 的所有特征值均在区域 D 中,则称 A 是 D 稳定的. 如果矩阵 A 是 D 稳定的,系统 $\dot{x}=Ax$ 称为是 D 稳定的.

引理 1[6]. 对由式(1)描述的 LMI 区域 D,矩阵 $A\in R^{n\times n}$是 D 稳定的当且仅当存在一个对称正定矩阵 $X\in R^{n\times n}$,使得 $M_D(A,X)<0$,其中 $M_D(A,X)=U\otimes X+V\otimes(AX)+V^T\otimes(AX)^T$, $\otimes$表示矩阵的 Kronecker 乘积.

考虑由以下状态空间模型描述的线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+\Delta E)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=x_0,\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态向量, A 是一个 D 稳定的常数矩阵, ΔE 是一个摄动矩阵.

本文考虑的摄动矩阵 ΔE 假定具有形式 $\Delta E=BEF$,其中 B 和 F 是给定的常数矩阵,它们反映了系统摄动的结构, E 是满足 $EE^T\leqslant\rho^2I$ 的未知矩阵, I 表示适当维数的单位矩阵. 这样的摄动矩阵描述既可以反映非结构摄动,也可以反映结构摄动[8].

本文的目的是给出摄动矩阵 E 允许变化的范围,即确定 ρ,使得对所有允许的摄动矩阵 E,系统(2)保持 D 稳定.

引理 2[7]. 对任意适当维数的实矩阵 A,B,C,D,矩阵 Kronecker 乘积具有以下性质:

i) $(A+B)\otimes(C+D)=A\otimes C+A\otimes D+B\otimes C+B\otimes D$,

ii) $[A\otimes B]^T=A^T\otimes B^T$,

iii) $[AC]\otimes[BD]=[A\otimes B][C\otimes D]$.

3 主要结论

根据引理 1,对由式(1)描述的区域 D,系统(2)D 稳定当且仅当存在对称矩阵 $X>0$,使得

$$U\otimes X+V\otimes((A+BEF)X)+V^T\otimes((A+BEF)X)^T<0.\tag{3}$$

将矩阵 V 作秩分解,$V=V_1V_2$, $V_1\in R^{m\times l}$, $V_2\in R^{l\times m}$, $l=\mathrm{rank}(V)$. 则由引理 2,上式等价于

$$Z+(V_1\otimes B)(I\otimes E)(V_2\otimes FX)+(V_2\otimes FX)^T(I\otimes E)^T(V_1\otimes B)^T<0,\tag{4}$$

其中 $Z=U\otimes X+V\otimes AX+(V\otimes AX)^T$. 由于对任意常数 $\lambda>0$,

$$XY+Y^TX^T\leqslant\lambda^{-1}XX^T+\lambda Y^TY$$

对任意适当维数的矩阵 X,Y 成立,因此根据条件 $EE^T\leqslant\rho^2I$,可得

$$\begin{aligned}&(V_1\otimes B)(I\otimes E)(V_2\otimes FX)+(V_2\otimes FX)^T(I\otimes E)^T(V_1\otimes B)^T\leqslant\\&\rho^{-2}(V_1\otimes B)(I\otimes E)(I\otimes E)^T(V_1\otimes B)^T+\rho^2(V_2\otimes FX)^T(V_2\otimes FX)\leqslant\\&\rho^{-2}(V_1\otimes B)(I\otimes EE^T)(V_1\otimes B)^T+\rho^2(V_2\otimes FX)^T(V_2\otimes FX)\leqslant\end{aligned}$$

$$(V_1 \otimes B)(V_1 \otimes B)^{\mathrm{T}} + \rho^2 (V_2 \otimes FX)^{\mathrm{T}} (V_2 \otimes FX).$$

故式(4)成立的充分条件是存在对称矩阵 $X>0$,使得

$$Z + (V_1 \otimes B)(V_1 \otimes B)^{\mathrm{T}} + \rho^2 (V_2 \otimes FX)^{\mathrm{T}} (V_2 \otimes FX) < 0. \tag{5}$$

从以上的讨论,可得如下定理.

定理. 设 D 是左半开复平面中的一个由式(1)描述的 LMI 区域,则对所有允许的摄动矩阵 E,系统(2)是 D 稳定的一个充分条件是存在一个对称正定矩阵 X,使得

$$\begin{bmatrix} Z + (V_1 \otimes B)(V_1 \otimes B)^{\mathrm{T}} & (V_2 \otimes FX)^{\mathrm{T}} \\ V_2 \otimes FX & -\rho^{-2} I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

证明. 根据矩阵的 Schur 补性质,容易从式(6)导出不等式(5),从而得证定理. 证毕.

式(6)是关于矩阵 X 的线性矩阵不等式,因此可以应用有关线性矩阵不等式的算法来判断式(6)是否存在可行解,从而达到判别系统(2)是否 D 稳定的目的.

为求得保持系统(2)D 稳定的尽可能大的允许摄动界 ρ,建立如下的优化问题:

$$\min \alpha$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} Z + (V_1 \otimes B)(V_1 \otimes B)^{\mathrm{T}} & (V_2 \otimes FX)^{\mathrm{T}} \\ V_2 \otimes FX & -\alpha I \end{bmatrix} < 0, \\ X > 0. \end{cases} \tag{7}$$

这是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,因此可以采用内点法等凸优化问题的有效解法求解之. 特别地,可以借助于 MATLAB 软件 LMI 工具包中的 mincx 命令解之. 利用该问题的解,即可得所要求的 $\rho=\alpha^{-1/2}$.

注 4. 为了确定摄动参数的允许摄动范围,以上提出的方法不需要事先确定任何参数,因此避免了现有方法中如何适当地选取参数,才能使得允许摄动范围最大化的问题. 同时,由于本文的方法采用了优化过程,因此,也极大地降低了解的保守性. LMI 约束条件保证了优化问题全局解的存在性和求解的便利性.

参 考 文 献

1 Rachid A. Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed systems. *Int. J. Systems Sci*, 1990, **21**(3):579～585

2 Juang Y T. Eigenvalue assignment robustness for systems with structured perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, **38**(11):1697～1700

3 Yedavalli R K. Robust root clustering for linear uncertain systems using generalized Lyapunov theory. *Automatica*, 1993, **29**(1):237～240

4 俞立. 具有结构扰动的动态系统极点位置的鲁棒特性研究. 见:中国控制与决策年会论文集, 沈阳, 1996

5 Gutman S, Jury E I. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, **26**(4):853～862

6 Chilali M, Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, **41**(3):358～367

7 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京:科学出版社, 1984

8 Yu Li. Stability robustness bounds for linear systems with delayed perturbations. *Journal of the Franklin Institute*, 1999, **336**(5):755～765

俞 立 1961 年生,博士. 现为浙江工业大学信息工程学院教授. 研究方向为鲁棒控制、时滞系统的分析和控制、分散控制等.