



# MIMO 双线性系统稳定性研究的新方法<sup>1)</sup>

方洋旺<sup>1</sup> 焦李成<sup>1</sup> 韩崇昭<sup>2</sup>

<sup>1)</sup>(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

<sup>2)</sup>(西安交通大学电信学院 西安 710049)

**摘 要** 基于 Volterra 级数理论, 计算出 MIMO 双线性系统的  $n$  阶冲激响应函数矩阵(或  $n$  阶 Volterra 核矩阵). 通过研究它的  $n$  阶冲激响应函数矩阵的性质, 给出了一些简单的开环稳定性判据; 并深入研究了它们的闭环稳定性, 给出了直接利用其子系统的开环稳定性来判别其闭环系统稳定性的判据; 最后, 用仿真实例来验证其有效性.

**关键词**  $n$  阶冲激响应函数矩阵( $n$  阶 Volterra 核矩阵), MIMO 双线性控制系统, 局部 BIBO 稳定性.

## NEW METHOD OF STUDY ON STABILITY OF MIMO BILINEAR SYSTEM

FANG Yang-Wang<sup>1</sup> JIAO Li-Cheng<sup>1</sup> HAN Chong-Zhao<sup>2</sup>

<sup>1)</sup>(Key Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

<sup>2)</sup>(School of Electronics & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract** Based on the theory of Volterra Series, the  $n$ th-order impulse response function matrix (or  $n$ th-order Volterra kernel matrix) is calculated. Through studying the properties of its  $n$ th-order impulse response function matrix, some simple stability criteria are given. Furthermore, its closed-loop stability is deeply discussed, and some criteria for using the open-loop stability of its subsystem to judge the closed-loop stability are proposed. Finally, the validity of these criteria is demonstrated by simulation examples.

**Key words**  $n$ th-order impulse response function matrix( $n$ th-order Volterra kernel matrix), MIMO bilinear control system, local BIBO stability.

## 1 引言

Volterra 级数理论为研究非线性系统提供了一种新方法. 目前, 利用 Volterra 级数理论

1) 国家自然科学基金(69674009)资助项目.

来研究非线性系统越来越受到人们的重视,已在非线性频域分析、非线性辨识、信号处理及故障诊断等方面<sup>[1~4]</sup>都取得了重要进展.文献[5,6]中讨论了基于广义频率响应函数的非线性开环系统稳定性.在文献[7]中虽然也讨论了非线性系统的闭环稳定性,但很难从开环系统的稳定性来直接判断闭环稳定性,而且需要进行非常复杂的范数级数的计算.而基于此方法对 MIMO 非线性系统的稳定性研究,特别是对较为简单的 MIMO 双线性系统的稳定性研究,目前几乎未见报道.

本文基于 Volterra 级数理论,给出 MIMO 双线性系统的  $n$  阶冲激响应函数矩阵(或  $n$  阶 Volterra 核矩阵),并给出其开环及闭环系统稳定性判据.

## 2 双线性系统的开环稳定性

考虑如下方程所示的 MIMO 双线性系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} + \sum_{i=1}^p N_i \mathbf{x} u_i + B\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \end{cases} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \quad (1)$$

令  $N = [N_1, N_2, \dots, N_n]$ , 由于  $\sum_{i=1}^p N_i \mathbf{x} u_i = N(I_p \otimes \mathbf{x})\mathbf{u}$ , 其中  $I_p$  为  $p$  阶单位矩阵,  $\otimes$  为张量积, 则上述双线性系统变为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} + N(I_p \otimes \mathbf{x}) + B\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \end{cases} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

由 Volterra 级数理论, 有  $\mathbf{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{y}_n(t)$ , 其中  $\mathbf{y}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}_n(t_1, t_2, \dots, t_n) (\mathbf{u}(t - \tau_1) \otimes \dots \otimes \mathbf{u}(t - \tau_n)) d\tau_1 \dots d\tau_n$ ,  $\mathbf{h}_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = C \exp(A t_n) N \exp((I_p \otimes A)(t_{n-1} - t_n)) (I_p \otimes N) \dots \exp(\underbrace{(I_p \otimes \dots \otimes I_p \otimes A)}_{n-2} (t_2 - t_3)) (\underbrace{I_p \otimes \dots \otimes I_p \otimes N}_{n-2}) \exp(\underbrace{(I_p \otimes \dots \otimes I_p \otimes A)}_{n-1} (t_1 - t_2)) (\underbrace{I_p \otimes \dots \otimes I_p \otimes B}_{n-1})$ .  $\mathbf{h}_n(t_1, \dots, t_n)$  称为 MIMO 双线性系统的  $n$  阶冲激响应函数矩阵(或  $n$  阶 Volterra 核矩阵), 它的多维拉普拉斯变换  $H_n(s_1, \dots, s_n)$  称为双线性系统的  $n$  阶非线性传递函数矩阵. 记  $\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \max_{t \in R} \|\mathbf{u}(t)\|_2$ ,  $\|\mathbf{h}_n\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{h}_n(t_1, t_2, \dots, t_n)\|_2 dt_1 \dots dt_n$ ,  $\|\cdot\|_2$  表示向量或矩阵的 2-范数.

注. 对于上述双线性系统, 若输出为  $\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D$ , 则它的非线性传递函数(矩阵)只有一阶非线性传递函数与  $D=0$  时不同, 为  $H_1(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , 其余相同.

**定义 1.** MIMO 双线性系统(1)称为局部 BIBO 稳定的, 若存在正常数  $L$ , 当输入  $\mathbf{u}(t)$  局部有界, 即存在另一正常数  $L_1$ , 使得  $\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \max_{t \in R} \|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq L_1 \leq L$ , 则输出  $\mathbf{y}(t)$  也有界.

**定理 1.** 若 MIMO 双线性系统(1)的线性子系统是渐近稳定的, 则它一定是局部 BIBO 稳定的.

证明. 此定理证明类似于文献[5]中定理的证明.



### 3 双线性系统的闭环稳定性

本节将讨论图 1 所示的双线性闭环控制系统稳定性问题.

为了讨论闭环非线性系统局部 BIBO 稳定性的方便,我们对上述定义稍作修改.

**定义 2.** 双线性系统(1)或(2)称为局部 BIBO 稳定的,若满足

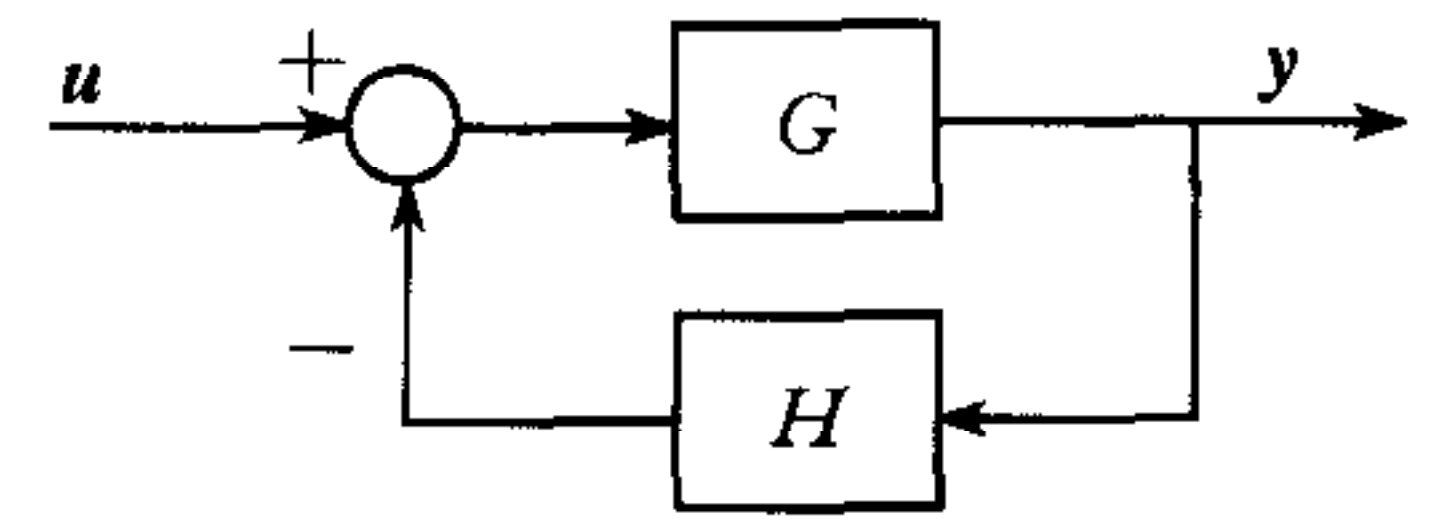


图 1 闭环控制系统结构图

1) 它的线性控制子系统(一阶 Volterra 核矩阵所对应的系统)是渐近稳定的;

2) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \|H_n\|_{\infty} x^n$  是收敛的.

**引理 1.** 假设非线性控制系统  $H, P$  的 Volterra 核矩阵分别为  $\{h_n\}, \{p_n\}$ , 则级联非线性

系统  $G = H \circ P$  的非线性传递函数矩阵  $\{g_n\}$  可以表示为  $g_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_k) (p_{i_1}(t_1 - \tau_1, \dots, t_{i_1} - \tau_1) \otimes \dots \otimes p_{i_k}(t_{n-i_k+1} - \tau_k, \dots, t_n - \tau_k)) d\tau_1 \dots d\tau_k$ .

证明. 此引理证明类似于文献[5]中定理的证明.

**引理 2.** 假设非线性控制系统  $H, P$  是局部 BIBO 稳定的, 则级联非线性系统  $G = H \circ P$  也是局部 BIBO 稳定的.

**引理 3.** 假设非线性控制系统  $F := (I + L)^{-1}$  存在, 且它的  $n$  阶核矩阵为  $\{f_n\}$ , 这里  $L$  是非线性算子,  $I$  是恒等算子, 如果  $\|l_n\|_1 < +\infty (n = 1, 2, \dots)$ ,  $I + L_1(\infty)$  是非奇异矩阵, 且  $(I + L_1(s))^{-1}$  是稳定矩阵, 则  $\|f_n\|_1 < +\infty (n = 2, 3, \dots)$ , 这里  $L_1(s)$  为  $L$  的线性子系统的传递函数矩阵.

**引理 4.** 考虑如图 2 所示的非线性控制系统, 这里假设  $K$  是 MIMO 双线性控制子系统, 若闭环系统  $F$  的一阶 Volterra 子系统  $F_1 := (I + K_1)^{-1}$  是渐近稳定的, 且  $I + K_1(\infty)$  是非奇异矩阵, 这里  $K_1$  是  $K$  的一阶 Volterra 子系统. 如果  $K$  是局部 BIBO 稳定的, 则闭环系统也是局部 BIBO 稳定的.

证明. 此引理证明类似于文献[5]中定理的证明.

**定理 2.** 假设非线性系统  $P, Q$  为 MIMO 双线性系统  $P: (A_1, N_1, B_1, C_1), Q: (A_2, N_2, B_2, C_2)$ ; 如果满足如下条件: 1) 矩阵  $A_1, A_2$  的特征根具有负实部; 2)  $\Delta_1(s)\Delta_2(s)\det[I + G_1(s)G_2(s)]$  的所有零点具有负实部, 其中  $G_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1, G_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2, \Delta_1(s), \Delta_2(s)$  分别为  $G_1(s), G_2(s)$  特征多项式. 则图 1 所示的闭环反馈系统是局部 BIBO 稳定的.

证明. 图 1 所示的双线性闭环控制系统可重画为图 3 所示的双线性闭环控制系统, 记从输入  $v$  到输出  $y$  的闭环非线性子系统为  $F$ , 即  $y = F(v)$ . 由引理 1 至引理 4 知,  $F$  是局部 BIBO 稳定的, 又从输入  $u$  到输出  $y$  的闭环非线性子系统为  $G$  与  $F$  的级联系统, 再利用引理 2 得图 3 所示的双线性闭环控制系统是局部 BIBO 稳定的.

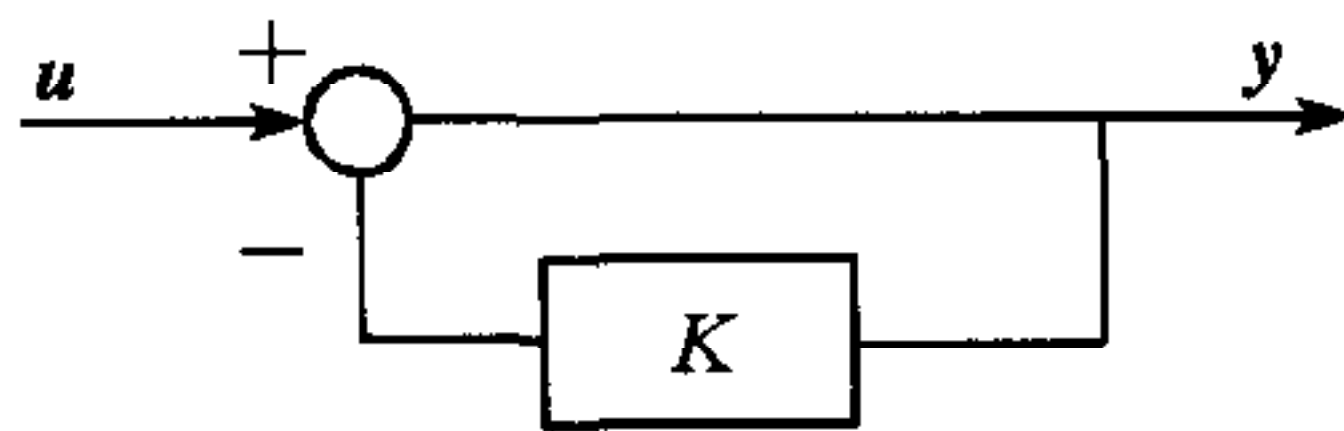


图 2 闭环控制系统结构图

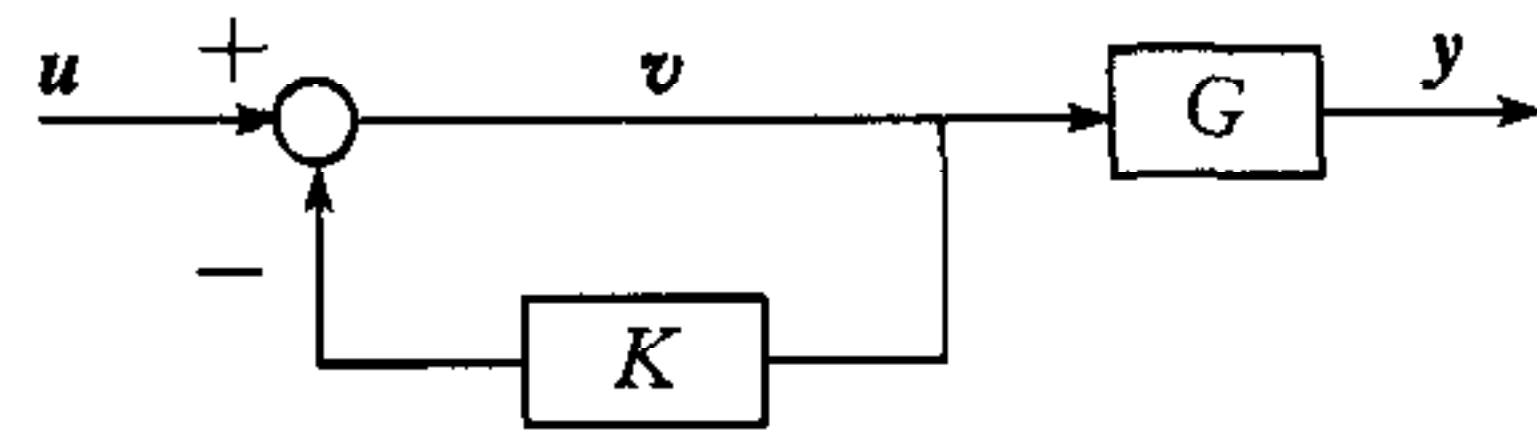


图 3 闭环控制系统结构图

## 4 仿真研究

假设 MIMO 双线性系统  $G: (A_1, N_1, B_1, C_1), H: (A_2, N_2, B_2, C_2)$ , 其中  $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $N_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $N_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 由于  $A_1, A_2$  的特征根都具有负实部, 根据定理 1 知, MIMO 双线性系统  $G, H$  是开环局部 BIBO 稳定的. 又由于  $G_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 =$

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{12}{s+3} \end{bmatrix}, G_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} \frac{10}{s+1} & 0 \\ \frac{10}{(s+1)(s+5)} & \frac{20}{s+5} \end{bmatrix},$$

故知它们的特征多项式

分别为  $\Delta_1(s) = (s+2)(s+3)$ ,  $\Delta_2(s) = (s+1)(s+5)$ . 由于  $I + G_1(s)G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+3s+102}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ \frac{120}{(s+1)(s+3)(s+5)} & \frac{s^2+8s+255}{(s+3)(s+5)} \end{bmatrix}$ , 从而  $\Delta_1(s)\Delta_2(s)\det(I + G_1(s)G_2(s)) = s^4 + 11s^3 +$

$381s^2 + 1581s + 26010$ , 它的零点为  $\lambda_{1,2} = -4 \pm 15.46i$ ,  $\lambda_{3,4} = -1.5 \pm 9.99i$ , 都具有负实部. 由定理 2 知, 闭环系统是局部 BIBO 稳定的, 它的阶跃响应图如图 4 及图 5 所示.

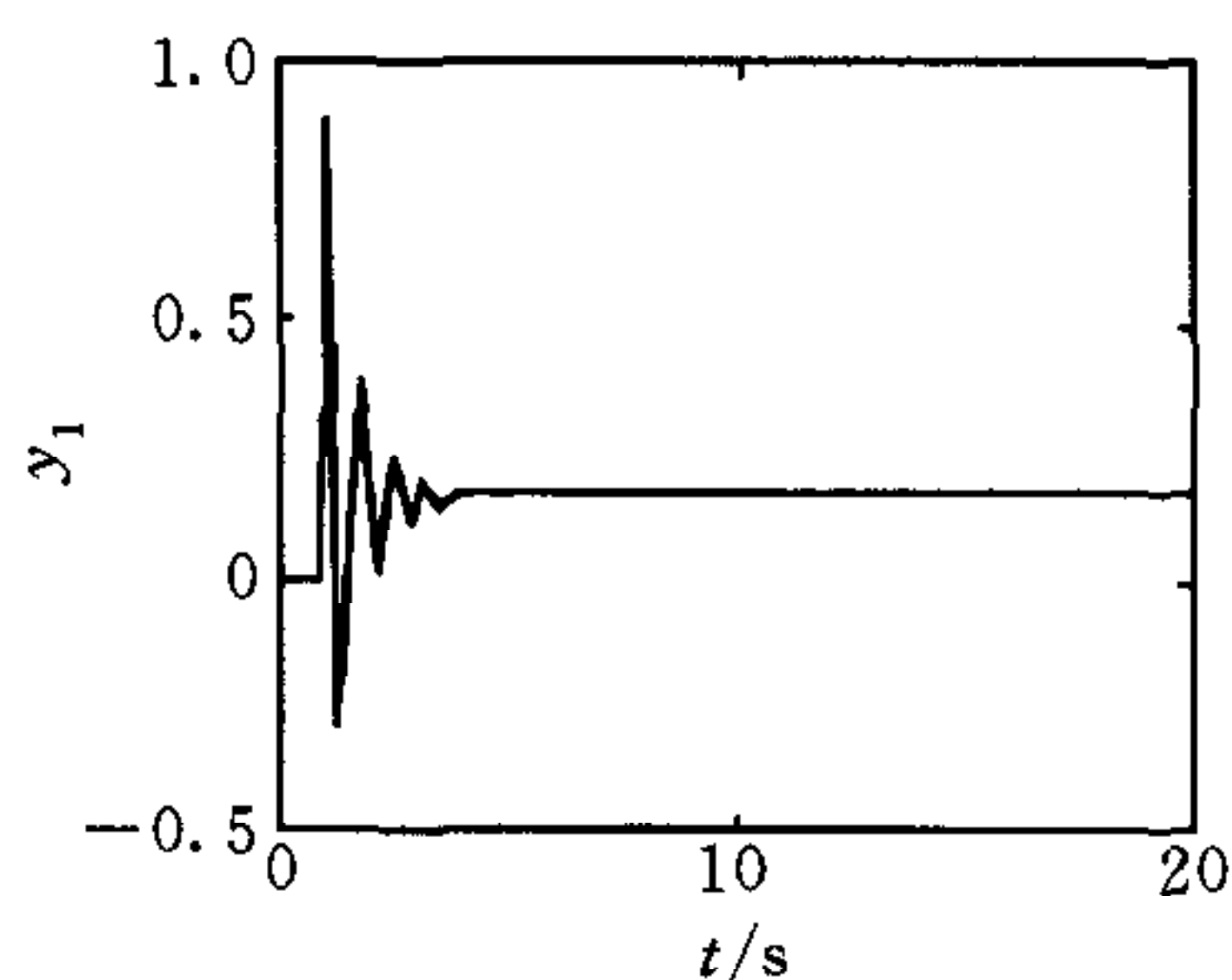


图 4 阶跃响应图

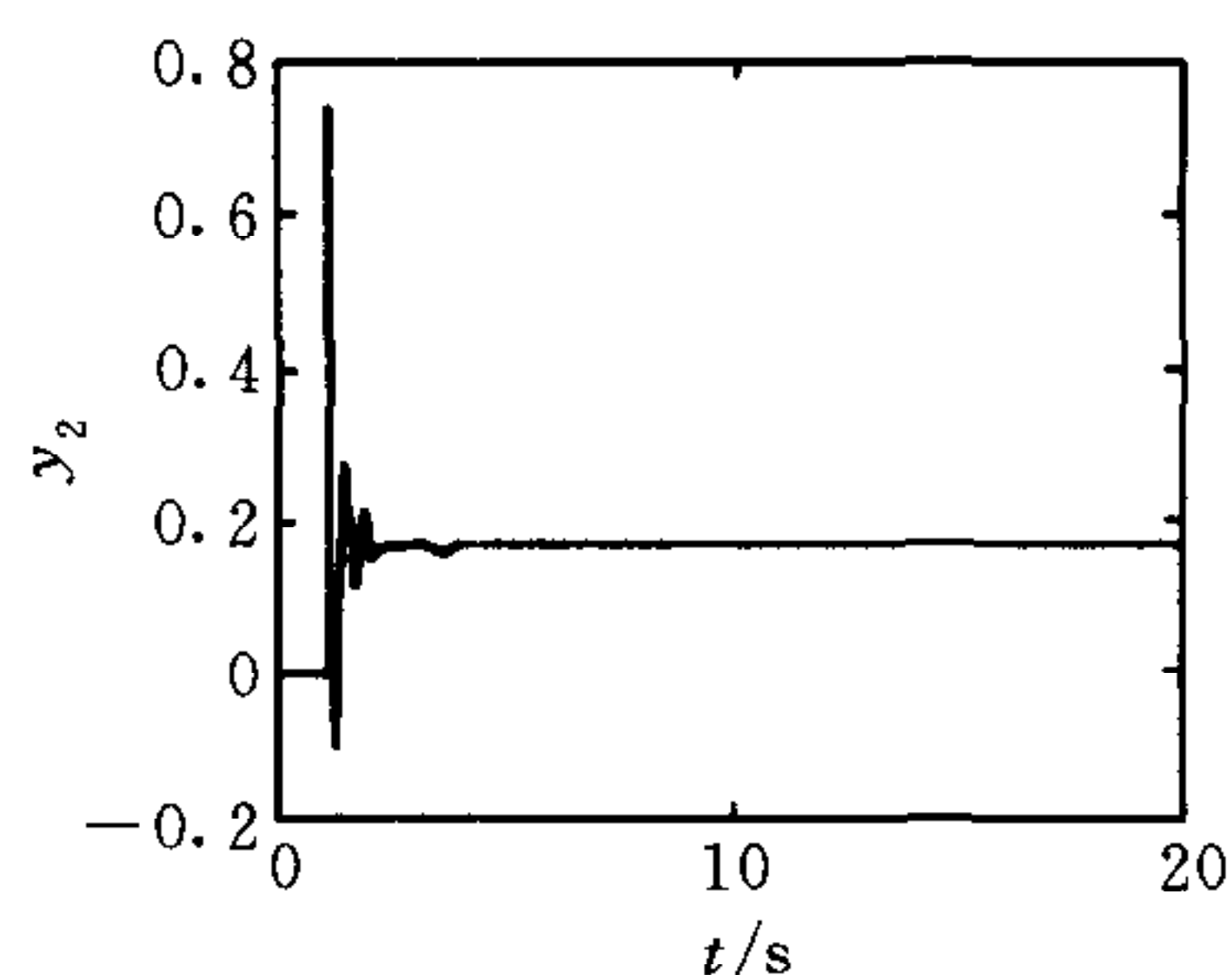


图 5 阶跃响应图

## 5 结论

本文基于 Volterra 级数理论给出了双线性控制系统的开环与闭环稳定性判据, 它们非常类似于线性系统的稳定性判据. 从判据可看出, 它们的 1 阶非线性传递函数(矩阵)即线性传递函数(矩阵)的零极点对非线性闭环系统稳定性起着主要的作用. 由于直接利用它们子系统的开环稳定性来判别其闭环稳定性, 且避免了非常复杂的范数级数的计算, 因此, 本文



的稳定性判据变得非常简单实用。

## 参 考 文 献

- 1 Billings S A, Tsang K M. Spectral analysis for nonlinear systems, part I: parametric nonlinear spectral analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1989, **3**(4):319~339
- 2 Tseng Ching-Hsiang. A mixed-domain method for identification of quadratically nonlinear systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, **45**(4):1013~1024
- 3 Georgios B G, Erchin Sepedin. Linear multi-channel blind equalizers of nonlinear FIR volterra channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, **45**(1):67~81
- 4 焦李成. 非线性传递函数理论与应用. 西安:西安电子科技大学出版社,1992
- 5 方洋旺,韩崇昭. 基于非线性传递函数的非线性闭环控制系统的稳定性研究. *控制与决策*, 1999, **14**(3)
- 6 HAN Chongzhao, CAO Jianfu. Study on stability of nonlinear control system based on generalized fequency response functions. *Control Theroy and Applications*, 1996, **13**(5):573~582
- 7 HAN Chongzhao, CAO Jianfu. Stability of nonlinear closed-loop control system on generalized frequency response functions. *Control Theroy and Applications*, 1997, **14**(6):794~801

**方洋旺** 1966年生,1990年和1998年分别在陕西师范大学与西安交通大学获得硕士和博士学位.目前在西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室从事博士后研究工作.主要研究领域是非线性系统控制、非线性科学和智能信号处理方面等.

**焦李成** 1959年生,1984年和1990年在西安交通大学分别获得硕士和博士学位.现为西安电子科技大学教授、博士生导师.主要研究领域是非线性科学、智能信号处理以及神经网络与大规模并行处理等.

**韩崇昭** 1943年生,1968年和1981年在西安交通大学与中国科学院研究生院分别获得学士和硕士学位.现为西安交通大学电信学院副院长.教授、博士生导师.主要研究领域是随机与自适应控制理论、工业控制与稳态优化、非线性系统频域分析等.

### (上接第 815 页)

专家委员会主任);基于BPS/MES/PCS级结构的流程工业现代集成制造系统(柴天佑教授,国家“十五”“863”高技术计划先进制造与自动化领域专家委员会副主任、东北大学自动化研究中心主任);新型非线性实用控制技术——自抗扰控制技术(韩京清研究员,中国科学院数学与系统研究所);过程模型及其方法(任德祥教授级高工,宝钢技术中心自动化所所长).

本届会议得到了国内外自动化领域的众多学者和控制工程师们的大力支持和踊跃响应,收到稿件共290余篇,经过程序委员会严格审稿,本届会议共录用173篇较高水平论文.

本届年会以《控制理论与应用》增刊、《系统仿真学报》增刊、《基础自动化》正刊及增刊出版了会议论文集.

本届年会经张钟俊青年优秀论文奖评奖委员会投票评选,东北大学自动化研究中心陶钧博士的论文“转炉炼钢智能控制方法及应用”获得一等奖;宝钢技术中心自动化所王笑波博士的论文“一种多层次递阶建模方法”和上海交通大学自动化研究所的王学雷博士的论文“一种实现有滞后SISO系统频域参数辨识的新算法”分别获得二等奖.

闭幕式上,由浙江大学钱积新教授代表过程控制专业委员会主席和本届年会程序委员会双主席之一浙江大学孙优贤院士致闭幕辞.第12届中国过程控制年会取得了圆满成功.