第 27 卷 第 6 期
2001 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 6
Nov., 2001

采用三角型隶属度函数的模糊系统的插值特性

张恩勤　施颂椒　翁正新
（上海交通大学自动化系　上海　200030）
（E-mail：enqinzhang@yahoo.com）

摘　要　研究了采用三角型隶属度函数的模糊系统的插值特性. 针对常见的 Mamdani 和 TSK 两类模糊系统,研究了模糊系统与分段插值函数在函数逼近上的等价性. 在此基础上,分别给出了两类模糊系统在插值方面的逼近误差估计. 这一结果为模糊系统的结构分析提供了新的研究方法和理论依据.

关键词　模糊系统,隶属度函数,分段插值,函数逼近.

FUZZY SYSTEMS USING TRIANGLE MFs AS INTERPOLATION FUNCTIONS

ZHANG En-Qin　SHI Song-Jiao　WENG Zheng-Xin
(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)
(E-mail: enqinzhang@yahoo.com)

Abstract　The interpolation mechanism of SISO fuzzy systems that use triangle MFs is discussed in this paper. Firstly, two types of fuzzy systems are studied: one with single value output and the other with polynomial output. The equivalence between the fuzzy systems and the piecewise interpolation functions is demonstrated then. And the estimation of the approximation error is given. In the end, the results in this paper are validated through some simulation examples.

Key words　Fuzzy systems, membership functions, piecewise interpolation, function approxiamtion.

1　引言

近年来,随着对模糊系统理论的深入研究,模糊系统的结构分析越来越引起研究者的重视. Buckley[1], Wang[2], Kosko[3]最早研究了模糊系统关于紧致集上连续函数的万能逼近特性,给出了万能逼近特性的理论证明,这一结果给模糊系统在控制与辨识中的应用提供了重要理论依据. 尽管已有很多学者研究了模糊系统的函数逼近特性,然而,模糊系统为何具有

收稿日期　1999-06-15　　收修改稿日期　2000-03-28

万能逼近特性？模糊系统的本质何在？这一关键性问题仍未得到很好的解决. Wang 采用模糊基函数(FBF),从函数基展开的角度对模糊系统进行了研究[2];Kosko 从几何映射的角度作了一定的分析,提出了一种椭球体映射模型[3];Takagi,Sugeno 等提出的 TS 线性模型,给出了采用局部线性化实现全局非线性的思想[4];李洪兴从数值插值的角度指出了模糊系统的插值机理[5],对于模糊系统的函数逼近特性提出了新的研究方法.

本文对模糊系统的插值机理做了进一步研究. 根据模糊规则输出形式的不同,对一般模糊系统进行了分类,采用三角型隶属度函数,对两类模糊系统进行了分析,理论上揭示了其分段插值机理,同时给出了相应的逼近误差估计. 这一结果为模糊系统的结构分析提供了新的研究方法和理论依据.

2　模糊系统的分类

为了计算方便,常见模糊系统规则输出端均采用精确输出的方法. 根据输出形式的不同有两种比较常见的形式. 其一是 Mamdani[2,3,6]型,实际中这类模糊系统一般采用单值输出; 其二是采用简单函数输出,如 TS 模型[1,4]等. 因此,本文主要研究以下两种形式的模糊系统.

1) 单值输出的模糊系统

采用单值输出的模糊系统具有以下形式的规则

$$R^i\text{: If } x \text{ is } A_i,\ \text{then } y \text{ is } y^i,\quad i=1,2,\cdots,N;$$

如果采用乘积推理规则及重心非模糊化方法(COG),可得如下系统输出

$$F(x)=\sum_{i=1}^{N}w^i(x)\cdot y^i\Big/\sum_{i=1}^{N}w^i(x),\quad w^i(x)=\mu_{A_i}(x). \tag{1}$$

2) 函数型输出的模糊系统

类似于 TS 模型,选取输入量的简单函数作为输出,在此选用多项式函数,即

$$R^i\text{: If } x \text{ is } A_i,\ \text{then } y^i=\sum_{k=0}^{P_i}c_{i,k}x^k,\quad i=1,2,\cdots,N,$$

其中 P_i 为规则 R^i 输出端多项式的次数.

同样地,采用乘积推理规则及重心非模糊化方法(COG),可得如下系统输出

$$F(x)=\sum_{i=1}^{N}w^i(x)\cdot y^i\Big/\sum_{i=1}^{N}w^i(x)=\sum_{i=1}^{N}\Big[w^i(x)\cdot\sum_{k=0}^{P_i}c_{i,k}x^k\Big]\Big/\sum_{i=1}^{N}w^i(x). \tag{2}$$

对于多项式函数输出的模糊系统,如果 $P_i=0$, $i=1,2,\cdots,N$, 则这样的模糊系统就是单值输出的模糊系统.

假设模糊系统的输入论域为 U,输出论域为 V,对应的定义输入输出论域的模糊量分别为 $A\in F(U)$, $B\in F(V)$,其中 $F(U)$, $F(V)$分别表示输入输出论域的模糊量空间. 假设 $\{A_i\}_{i=1,2,\cdots,N}\subset F(U)$为输入论域的一个模糊划分,一般应满足以下条件[6]:

1) $\forall\, i\in[1,N]$, $\exists\, x\in U$, s.t. $\mu_{A_i}(x)=1$, 　(3)

2) $\forall\, x\in U$, $\sum_{i=1}^{N}\mu_{A_i}(x)=1$. 　(4)

三角型隶属度函数是最常见最简单的一种模糊隶属度函数. 在此模糊量 A_i 均选取三角型隶属度函数(如图 1).

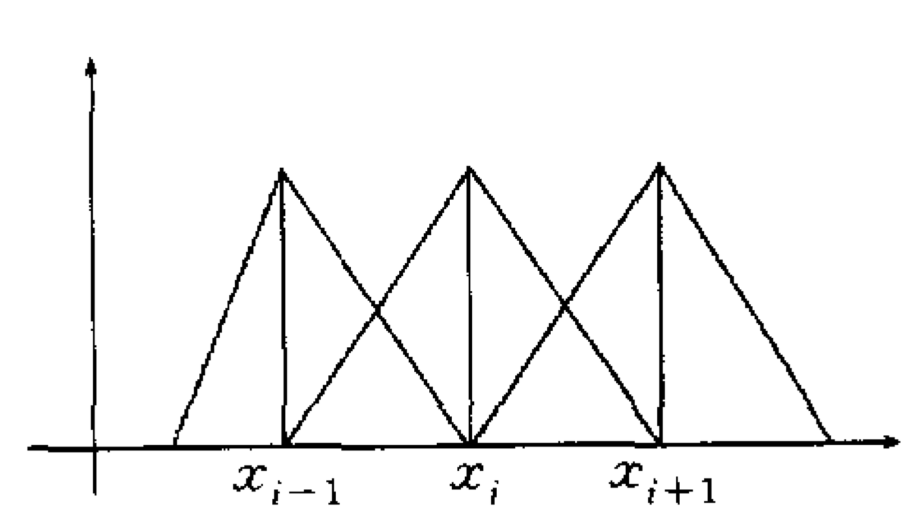


图 1　隶属度函数分布

模糊量 A_i 的隶属度函数为

$$\mu_{A_i}(x)=\begin{cases}(x-x_{i-1})/(x_i-x_{i-1}), & x\in[x_{i-1},\, x_i],\\ (x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i), & x\in[x_i,\, x_{i+1}], \quad i=1,2,\cdots,N,\\ 0, & \text{other conditions}.\end{cases} \tag{5}$$

3 模糊系统的插值特性

为讨论方便,下面所述模糊系统均指单变量情形.

定理 1. 采用三角型隶属度函数,如果 $\mu_{A_i}(x_i)=1,\ i=1,2,\cdots,N$,如式(1)的单值输出模糊系统等价于关于数据 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,2,\cdots,N}$ 的分段线性插值器.

证明. 假设存在一映射 $f(x)$,满足 $f(x_i)=y^i$,则式(1)的模糊系统可表示为

$$F(x)=\sum_{i=1}^{N}w^i(x)\cdot f(x_i)\Big/\sum_{i=1}^{N}w^i(x). \tag{6}$$

当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $w^l(x)=0$, $l\neq i$ or $i+1$,由式(4)可得 $w^i(x)+w^{i+1}(x)=1$,因此,

$$F(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}).$$

由上式显见,$F(x)$可看作关于数据 $\{(x_i,f(x_i))\}_{i=1,2,\cdots,N}$ 的分段线性插值函数. $F(x)$是关于映射 $f(x)$的分段线性插值函数. 证毕.

假设 $x_1<x_2<\cdots<x_N$,记 $h_i=x_{i+1}-x_i$, $i=1,2,\cdots,N-1$,并且 $h=\max\{h_i\}$,即 h 为模糊划分的最大区间长度.

推论 1. 如果 $f(x)$的二阶导数有界,$f''(x)\leqslant M, x\in U$,则采用单值输出的模糊系统 $F(x)$ 关于映射 $f(x)$的逼近误差是模糊划分区间长度的二阶无穷小,即 $|F(x)-f(x)|\propto O(h^2)$.

证明. 可由定理 1 及数值分析理论易知(略).

同样地,对于采用多项式输出的模糊系统有以下相应的结论.

定理 2. 采用三角型隶属度函数,用式(2)的 n 次多项式($P_i=n$)输出的模糊系统是一种分段 $n+1$ 次多项式插值器.

证明. 同定理 1 证明类似,当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$,有 $w^l(x)=0$, $l\neq i$ or $i+1$,因此,式(2)的模糊系统可表示为

$$F(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\sum_{k=0}^{n}c_{i,k}x^k+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\sum_{k=0}^{n}c_{i+1,k}x^k, \qquad x\in[x_i,x_{i+1}], \tag{7}$$

$$F(x)=\frac{x_{i+1}c_{i,0}-x_ic_{i+1,0}}{x_{i+1}-x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{i+1}-x_i}(c_{i,k}x_{i+1}-c_{i,k-1}+c_{i+1,k-1}-c_{i+1,k}x_i)x^k+$$
$$\frac{c_{i+1,n}-c_{i,n}}{x_{i+1}-x_i}x^{n+1}.$$

显然,在区间$[x_i,\ x_{i+1}]$上,$F(x)$是 $n+1$ 次多项式. 适当选取参数使得 $F(x_i)=f(x_i)$,根据式(7)特点,可知只须满足

$$\sum_{k=0}^{n}c_{i,k}x_i^k=f(x_i), \quad i=1,2,\cdots,N. \tag{8}$$

由于上式具有 $n+1$ 个自由度,因此满足上式的参数选取有无穷多个.

由式(7),(8)显见,$F(x)$可看作关于数据$\{(x_i,f(x_i))\}_{i=1,2,\cdots,N}$的分段插值函数. $F(x)$是关于映射 $f(x)$的分段 $n+1$ 次多项式插值函数. 证毕.

推论 2. 在定理 2 中,如果 $n=2$,则模糊系统 $F(x)$可作为一种三次样条函数.

证明. 由定理 2 的证明可知,如果 $n=2$,式(8)具有 3 个自由度,因此可附加以下三次样条插值条件

$$\begin{cases} F(x_i) = f(x_i), \\ F'(x_i+0) = F'(x_i-0), \quad i=1,2,\cdots,N, \\ F''(x_i+0) = F''(x_i-0). \end{cases} \tag{9}$$

当 $n=2$ 时,对多项式函数 $p_i(x)=\sum_{k=0}^{2} c_{i,k}x^k$ 在 x_i 展开可得

$$\sum_{k=0}^{2} c_{i,k}x^k = \alpha_i(x-x_i)^2 + \beta_i(x-x_i) + \gamma_i, \quad i=1,2,\cdots,N,$$

若满足式(9),可得如下线性方程组

$$\Phi \cdot \theta = \eta, \tag{10}$$

其中$\theta=[\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \cdots \alpha_n\ \beta_N\ \gamma_N]^{\mathrm{T}}$, $\eta=[f(x_1)\ 0\ 0 \cdots f(x_{n-2})\ 0\ 0\ f(x_{n-1})\ f(x_n)]^{\mathrm{T}}$, $\Phi=$

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
h_1 & 1 & h_1^{-1} & 0 & 0 & h_1^{-1}+h_2^{-1} & h_2 & -1 & h_2^{-1} & & & & & & \\
4 & h_1^{-1} & 0 & 0 & -h_2^{-1}-h_1^{-1} & 0 & -4 & h_2^{-1} & 0 & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & h_2 & 1 & h_2^{-1} & 0 & 0 & h_2^{-1}+h_3^{-1} & h_3 & -1 & h_3^{-1} & & & \\
 & & & 4 & h_2^{-1} & 0 & 0 & -h_2^{-1}-h_3^{-1} & 0 & -4 & h_3^{-1} & 0 & & & \\
 & & & & \vdots & \cdots & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & h_{N-2} & 1 & h_{N-2}^{-1} & 0 & 0 & h_{N-2}^{-1}+h_{N-1}^{-1} & h_{N-1} & -1 & h_{N-1}^{-1} \\
 & & & & & & 4 & h_{N-2}^{-1} & 0 & 0 & -h_{N-2}^{-1}-h_{N-1}^{-1} & 0 & -4 & h_{N-1}^{-1} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

根据矩阵理论可知,Φ 行满秩,则线性方程组(9)一定可解,即存在满足样条插值条件的模糊系统. 因此,如果适当选取参数,采用二次多项式输出的模糊系统 $F(x)$可作为一种三次样条函数. 证毕.

推论 3. 如果 $f^{(4)}(x)\leqslant M$, $x\in U$,并采用等距模糊划分,则采用二次多项式输出的模糊系统 $F(x)$关于函数 $f(x)$的逼近误差为$|F(x)-f(x)|\propto O(h^4)$.

证明. 由定理 2 的证明可知,如果 $n=2$,式(8)具有 3 个自由度,因此可附加以下分段 Hermite 插值条件

$$\begin{cases} F(x_i) = f(x_i), \\ F(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \\ F'(x_i+0) = f'(x_i), \\ F'(x_{i+1}-0) = f'(x_{i+1}), \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,N. \tag{11}$$

从式(7)可知

$$F(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\sum_{k=0}^{n}c_{i,k}x^k+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\sum_{k=0}^{n}c_{i+1,k}x^k,\quad x\in[x_i,x_{i+1}].$$

因此,条件(11)中 $F(x_{i+1})=f(x_{i+1})$ 是冗余的.

同推论 2 的证明类似,可得线性方程 $\Phi'\cdot\theta=\eta'$, 其中

$$\theta=[\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\cdots\ \alpha_N\ \beta_N\ \gamma_N]^{\mathrm{T}},$$

$$\eta'=[f(x_1)\ f'(x_1)\ f'(x_2)\cdots f(x_{n-1})\ f'(x_{n-1})\ f'(x_n)\ f(x_n)]^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi'=\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & -h_1^{-1} & h_1 & -1 & h_1^{-1} & & & & & & & & & & \\
-h_1 & -1 & -h_1^{-1} & 0 & 1 & h_1^{-1} & & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 1 & -h_2^{-1} & h_2 & -1 & h_2^{-1} & & & & & & & \\
 & & & -h_2 & -1 & -h_2^{-1} & 0 & 1 & h_2^{-1} & & & & & & & \\
 & & & & & \cdots & \vdots & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & -h_{N-1}^{-1} & h_{N-1} & -1 & h_{N-1}^{-1} \\
 & & & & & & & & & & -h_{N-1} & -1 & -h_{N-1}^{-1} & 0 & 1 & h_{N-1}^{-1} \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

同样可知,Φ' 行满秩,则线性方程组(11)一定可解,即存在满足 Hermite 插值条件的模糊系统.

根据插值理论可知,在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上,模糊系统的逼近误差估计为

$$R(x)=|F(x)-f(x)|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right|\leqslant\frac{h_i^4}{2^4\times 4!}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f^{(4)}(x)|.$$

在整个输入论域 U 上,则有

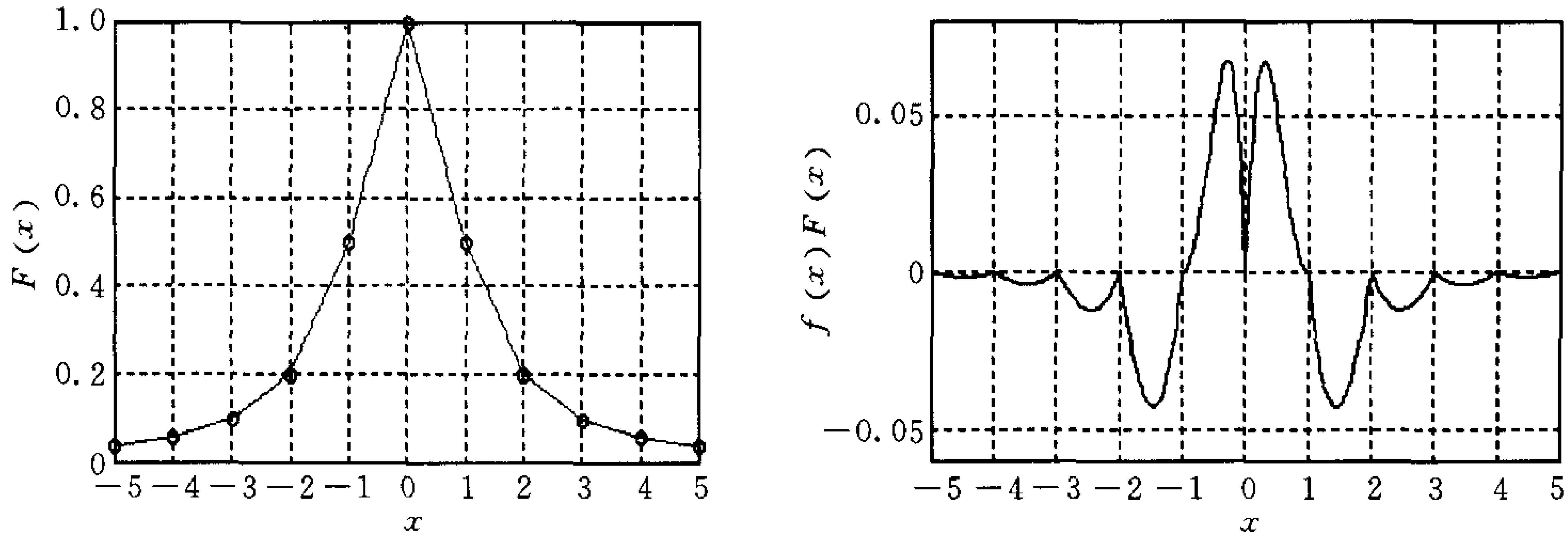
$$R(x)\leqslant\frac{h^4}{2^4\times 4!}\max_{x\in U}|f^{(4)}(x)|.\tag{12}$$

若二阶导数 $f^{(4)}(x)$ 有界,即 $\max\limits_{x\in U}|f^{(4)}(x)|\leqslant M<+\infty$ 时,则有 $R(x)\leqslant\frac{h^4}{2^4\times 4!}M$, 因此, $R(x)\propto O(h^4)$. 　　证毕.

定理 1,2 以及推论 2 给出了基于三角型隶属度函数的模糊系统与分段插值函数的等价性证明,从结构上揭示模糊系统的插值特性;推论 1 和 3 分别给出了两类模糊系统在插值方面的逼近精度.

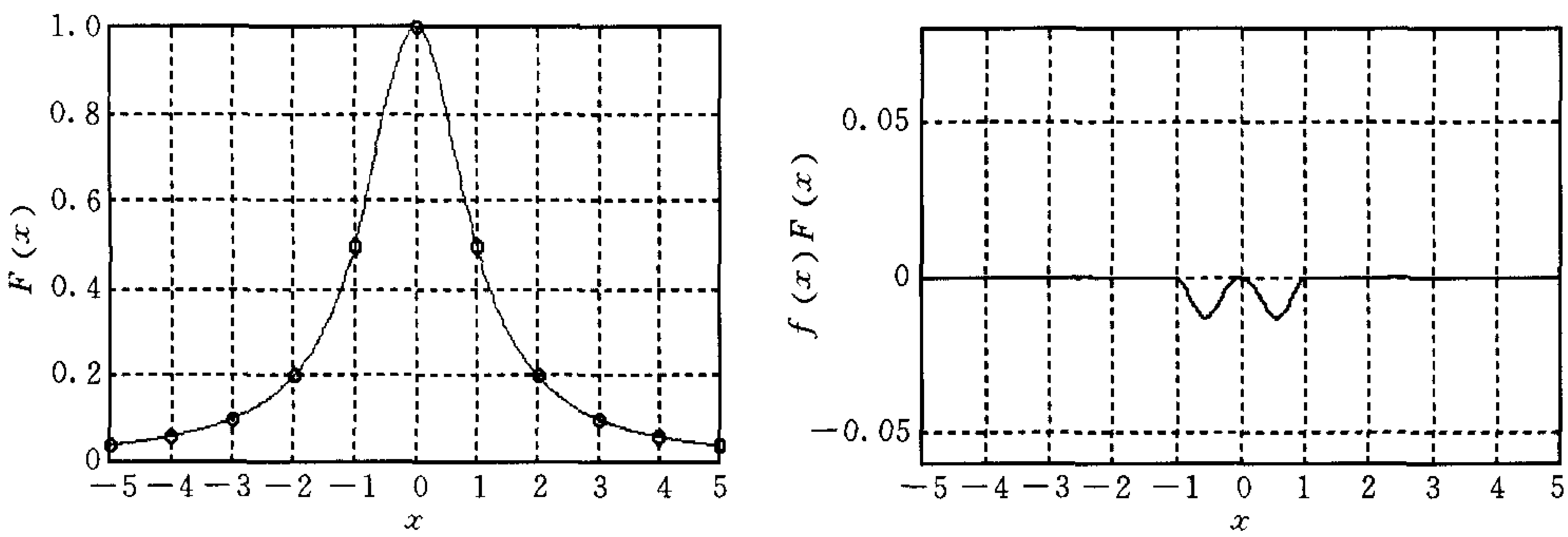
4　仿真例子

选取函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in[-5,5]$,等距选取 11 个节点 $x_i=i-6$, $i=1,2,\cdots,11$. 分别采用以上两类模糊系统进行插值逼近,其中第二类模糊系统选取二次多项式输出形式(采用 Hermite 插值条件). 仿真结果及相应逼近误差见图 2 和 3.



(a) 单值输出模糊插值　　(b) 单值输出模糊插值的逼近误差

图 2　采用单值输出的模糊系统的插值及逼近误差



(a) 二次多项式输出模糊插值　　(b) 二次多项式模糊插值输出的逼近误差

图 3　采用二次多项式输出的模糊系统的插值及逼近误差

从仿真例子比较可知,模糊系统具有插值特性.采用单值输出的模糊系统与分段线性插值是等价的;采用二次多项式输出的模糊系统与三次样条插值具有一定的相似之处,从而进一步验证了本文所得的理论结果.

另外,比较两类模糊系统可知,采用单值输出的模糊系统的逼近误差比采用二次多项式输出的模糊系统要大得多,这主要是由于采用单值输出的模糊系统在参数调节方面具有较少的自由度.但另一方面,如果采用较高阶次多项式函数,必然造成较为复杂的计算量.因此,在一般情况下,选取二次多项式输出比较适宜.实际中,三次样条插值非常流行,也是同样的道理.

5　结论

本文研究了基于三角型隶属度函数的一类模糊系统的插值特性.从模糊系统的结构分析上给出了一类模糊系统与分段插值函数的等价性证明,并给出相应的逼近误差估计.本文的研究结果是在单变量情形下,基于三角型隶属度函数提出的.但由于三角型隶属度函数是模糊系统中最常见最具代表性的一种形式,因此本文的结果也可定性地推广到其他形式的模糊系统.本文的结果在一定程度上揭示了模糊系统在函数逼近方面的一些本质特征,具有一定的创新性.这一结果为模糊系统的结构分析提供了新的研究方法和理论依据.当然,模

糊系统的理论研究仍然存在一些问题，相信随着众多学者的进一步深入研究，将会得到更完美的结果.

参 考 文 献

1 Buckley J J. Sugeno type controllers are universal fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **53**:299～303

2 Wang L X. Fuzzy systems are universal approximators. In: IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1992. 1163～1170

3 Kosko B. Fuzzy Engineering. Upper Saddle River, N. J: Prentice Hall Inc, 1997

4 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. SMC.*, 1985, **15**:116～132

5 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学(E辑), 1998, **28**(3):259～267

6 Zeng X J, Singh M G. Approximation theory of fuzzy systems——SISO case. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1994, **2**(2):162～176

张恩勤 1971年生，1994年毕业于东南大学数力系，1997年于东南大学自动化所获硕士学位，2000年3月于上海交通大学获博士学位. 主要研究兴趣为模糊系统.

施颂椒 1933年生，上海交通大学教授、博士生导师. 主要研究领域为鲁棒控制与自适应控制.

翁正新 1966年生，1995年于哈尔滨工业大学控制工程系获博士学位，1995年至1997年于上海交通大学自动化系做博士后研究，现任上海交通大学副教授. 主要研究兴趣为鲁棒控制、智能控制和故障诊断.

2000年为本刊审稿者名单

丁晓青	丁明跃	丁 锋	于景元	万百五	马保离	马颂德	马仲蕃	马宏绪	毛剑琴
毛宗源	戈 喻	方华京	方海涛	文成林	文光华	王 龙	王 伟	王 炎	王 珏
王润生	王田苗	王 宏	王国栋	王 远	王 杰	王仁华	王正志	王行仁	王煦法
王小虎	王守唐	王执铚	王子才	王 凌	王士同	王广雄	王书宁	王占林	王先来
王正欧	王笑京	王家廞	王桂增	王庆林	王伟明	王行愚	王诗宓	王金枝	王树青
王 华	王浣尘	王离九	王朝珠	王越超	王纪文	王 磊	王朝立	王月娟	王笑波
王子平	王志珍	王骥程	王耀南	韦 穗	井元伟	邓 辉	邓自立	邓志东	邓永录
邓家禔	邓子辰	白 硕	齐东旭	齐二石	卢汉青	卢桂章	卢朝晖	皮道映	冯纯伯
冯昭枢	冯占林	冯德兴	史忠科	史定华	史进渊	史忠植	史美林	丛 爽	叶庆凯
叶银忠	叶中行	叶 昊	帅典勋	田 捷	田 原	田玉平	田彦涛	孙先仿	孙优贤
孙振东	孙增圻	孙继涛	孙富春	孙吉贵	孙常胜	孙一康	孙东昌	孙德敏	孙立宁
孙韶元	孙惠中	甘作新	甘仞初	石纯一	石青云	石教英	边肇祺	丘 立	许可康
许卓群	关治洪	关新平	迟惠生	伍清河	任雪梅	任 章	危 辉	朱志刚	朱照宣
朱淼良	朱学峰	朱广田	朱雪龙	安森键	安鸿志	安 刚	吕士楠	吕剑虹	吕家元
西广城	刘 宏	刘伟军	刘 伟	刘永清	刘自宽	刘贺平	刘晓平	刘一军	刘文江
刘增良	刘少民	刘才山	刘喜贵·	刘小明	刘士荣	刘建平	刘一武	刘 民	刘瑞祯

（下转第805页）