

# 关于 P4P 问题的一点讨论<sup>1)</sup>

胡占义 雷 成 吴福朝

(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室 北京 100080)

(E-mail: {huzy, leic, wufc}@nlpr.ia.ac.cn)

**摘 要** 研究表明,在 P4P 问题中,当空间 4 个点共面时,不仅摄像机坐标系与物体坐标系之间的旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$  可以线性求解,而且可以同时确定摄像机的有效焦距  $f$  和像素比例因子  $\alpha$ . 该结论似乎在文献中还没有过类似的报导.

**关键词** 物体定位, P4P 问题.

## A SHORT NOTE ON P4P PROBLEM

HU Zhan-Yi LEI Cheng WU Fu-Chao

(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

(E-mail: {huzy, leic, wufc}@nlpr.ia.ac.cn)

**Abstract** In this short note, we show that in the P4P problem, if the 4 space points lie on a same plane, then besides the rotation matrix  $R$  and translation vector  $t$  from the object centered coordinate system to the camera centered coordinate system, the camera's effective focal length  $f$  and aspect ratio  $\alpha$  can also be determined uniquely and simultaneously. To our knowledge, such a result did not appear in the literature previously.

**Key words** Object pose estimation, P4P problem.

## 1 PNP 问题简介

PNP (Perspective N Points) 问题首先于 1981 年由 Fishler 和 Bolles<sup>[1]</sup> 提出, 类似的问题可以追溯到 1841 年摄影测量学领域. 所谓 PNP 问题, 就是指如下的物体定位问题: 假定摄像机为小孔模型且已标定好, 摄取一幅在物体坐标系下坐标已知的  $N$  个空间点的图像, 且这  $N$  个图像点的坐标已知, 确定这  $N$  个空间点在摄像机坐标系下的坐标.

文献中对于 PNP 问题的求解方法一般有两种途径. 第一种途径是确定空间点到摄像机光心的距离. 由于摄像机已经标定好且图像点的坐标已知, 所以空间点在摄像机坐标系下的

1) 国家“九七三”项目(G1998030502)、国家自然科学基金重点基金(60033010)、中国科学院重大交叉学科前沿项目和中国科学院机器人学开放研究实验室(RL200010)资助课题.

收稿日期 2000-08-24 收修改稿日期 2001-03-05

投影方向可以通过图像坐标求出. 这样, 确定空间点在摄像机坐标系下的坐标问题就转化为在已知射影方向上求空间点到光心的距离问题. 如图 1 所示, 对 P3P 问题而言, 空间点  $A, B, C$  与摄像机光心  $O$  的连线的方向在摄像机坐标系下的坐标是可以计算的, 问题是要求出光心  $O$  到  $A, B, C$  点间的距离  $d_A, d_B, d_C$ . P3P 问题的基本约束方程为

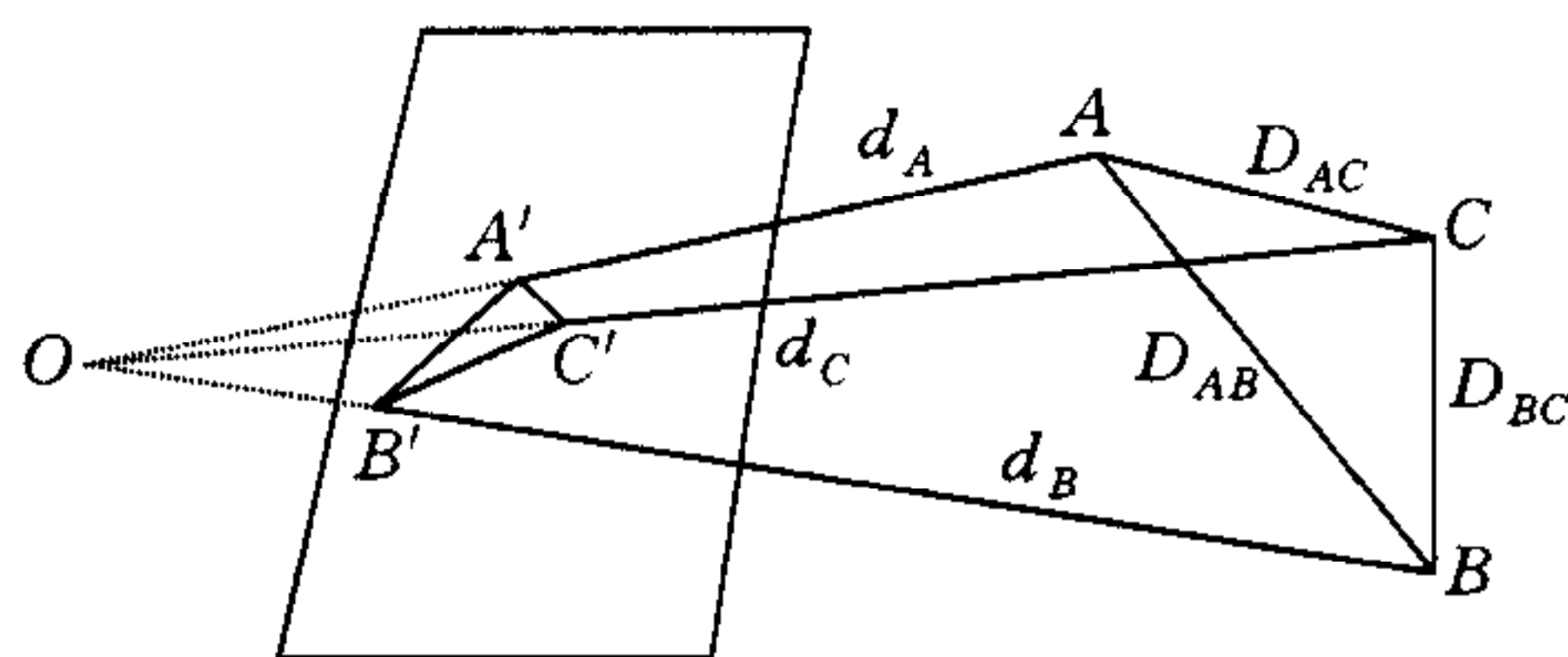


图 1 P3P 问题的基本约束

$$\begin{cases} d_A^2 + d_B^2 - 2d_A d_B \cos \theta_{AB} = D_{AB}^2, \\ d_A^2 + d_C^2 - 2d_A d_C \cos \theta_{AC} = D_{AC}^2, \\ d_B^2 + d_C^2 - 2d_B d_C \cos \theta_{BC} = D_{BC}^2. \end{cases} \quad (1)$$

在方程组(1)中,  $D_{AB}, D_{BC}, D_{AC}$  是空间点  $A, B, C$  之间的距离. 由于空间点的坐标假定已知, 故这些量是已知量.  $\cos \theta_{AB}, \cos \theta_{BC}, \cos \theta_{AC}$  也是已知量, 可以通过图像点坐标和摄像机的内参数求得. 所以, 方程组(1)的仅有未知数是  $d_A, d_B, d_C$ .

求解 PNP 问题的另一种途径是确定物体坐标系到摄像机坐标系之间的旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$ , 即

$$X_c = R X_w + t, \quad (2)$$

式中  $X_c$  和  $X_w$  分别为同一空间点在摄像机坐标系下和物体坐标系下的坐标. 所以, PNP 问题同样可以定义为给定从三维空间到二维图像空间的  $N$  对对应点, 如何求解  $R$  矩阵和  $t$  向量的问题. 很显然, 如果  $R$  和  $t$  已知, 且已知某空间点在物体坐标系下的坐标, 就可以求得其在摄像机坐标系下的坐标.

利用第一种途径求解 PNP 问题的困难在于约束方程组中有未知数的平方项, 不易获得解析解. 利用第二种途径求解 PNP 问题的困难在于  $R$  矩阵是一个旋转矩阵, 它只有 3 个独立变量, 其中元素间的约束不易实现.

## 2 PNP 问题的研究状况

当  $N \geq 6$  时, PNP 问题成为经典的 DLT (Direct Linear Transformation) 问题<sup>[2]</sup>, 此时  $(R, t)$  均可以线性求解, 所以研究  $N \geq 6$  的 PNP 问题在理论上没有太多意义. 而对于  $N = 3$  时的 P3P 问题, 文献中已研究得比较透彻. 主要结论是: 当  $N = 3$  及  $A, B, C$  三点决定的平面不通过光心  $O$  时, 方程组(1)最多有 4 组解且解的上限可以达到<sup>[1]</sup>; 1991 年文献[3]给出了 P3P 解的几何解释; 1998 年文献[4]从代数的观点研究了解存在的充分和必要条件. 当  $N = 4$  时, 文献[1]指出当 4 个空间点在同一平面时, 解是唯一的; 而当 4 个空间点不共面时, 则可能出现多个解, 并给出了一个存在二组解的实例. Harallic<sup>[5]</sup> 于 1989 年指出, 如果 4 个空间点是一个长方形的 4 个顶点, 尽管该长方形的长和宽未知, 但旋转矩阵  $R$  仍可以求得. Penna<sup>[6]</sup> 于 1991 年指出, 已知空间共面 4 点及其对应图像点的坐标,  $(R, t)$  可以线性求解. 1989 年 Horaud<sup>[7]</sup> 等指出, 当空间 4 点不在同一平面时, P4P 问题可以转化为求解一个双二次一元四次方程的问题. 1998 年 Quan<sup>[8]</sup> 提出了求解 PNP 问题 ( $N \geq 4$ ) 的线性方法, 该方法的特性是, 如果 PNP 问题有唯一解, 则该解可以线性求出. 当问题有多解时, Quan 方法就不再适用. 为此, 1999 年文献[9]给出了一种迭代求解的方法.

上述方法均是在摄像机已标定好的情况下讨论的. 1995 年文献[10]对 P4P 的工作做了一些推广. 该研究表明, 在 P4P 问题中, 如果 4 个空间点共面但摄像机的有效焦距  $f$  未知, 通过 4 组对应点, 不仅  $(R, t)$  可以求出, 而且  $f$  也可以求出. 本文工作是对文献[10]的进一步推广. 本文研究发现, 在同样的条件下, 即空间 4 点共面的情况下, 不仅  $(R, t)$  和  $f$  可以求出, 而且即使摄像机的像素比例因子  $\alpha$  未知, 参数  $a$  也同样可以同时求出.

### 3 本文的主要工作

给定 4 组空间点和图像点的对应关系, 4 空间点共面以及它们在物体坐标系中的坐标已知, 图像点的坐标也已知. 如果摄像机的有效焦距  $f$  和像素比例因子  $\alpha$  均未知, 则从物体坐标系到摄像机坐标系间的旋转矩阵  $R$ 、平移向量  $t$ 、摄像机的内参数  $f$  和  $a$  均可以通过这 4 组对应点唯一确定.

以下为  $R, t, f, a$  的具体求解过程.

由于摄像机的内参数  $f, a$  未知, 故摄像机的内参数矩阵  $K$  可以表示为

$$K = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & \alpha f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

由于空间 4 点共面, 不失一般性, 可以将该平面定义为物体坐标系的  $O_w X_w Y_w$  平面, 这样空间点  $A, B, C, D$  在物体坐标系下的坐标有

$$X_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_C = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_D = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

如式(2)所示,  $X_A, X_B, X_C, X_D$  在摄像机坐标系下的坐标为

$$M_i = RX_i + t = (r_1 \ r_2 \ r_3)X_i + t, \quad i = A, B, C, D, \quad (5)$$

其中  $r_1, r_2, r_3$  为  $R$  矩阵的三个列向量. 另外, 图像点坐标与摄像机坐标系下的空间点坐标由摄像机的内参数矩阵  $K$  相联系, 即

$$s_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = KM_i, \quad (6)$$

式中  $(u_i \ v_i)$  为  $M_i$  点对应的图像坐标,  $s_i$  为一未知的常数因子. 将式(3), (4)和(6)合并, 则有

$$s_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & \alpha f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (r_1 \ r_2 \ t) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = A, B, C, D. \quad (7)$$

这里再一次需要指出的是, 式(7)中  $(x_i \ y_i), (u_i \ v_i), i = A, B, C, D$  是已知量;  $f, a, R, t$  是需要求解的量. 由于  $r_3 = r_1 \times r_2$ , 所以, 问题归结为求解  $f, a, r_1, r_2, t$ .

式(7)可以重新改写为

$$s_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = A, B, C, D. \quad (8)$$

由于式(8)中的 4 组对应点可以提供 8 个关于  $h_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  的齐次线性方程, 一般来说,  $H$  矩阵可以在相差一个常数因子意义下唯一确定. 所以, 问题转化为给定  $H$  矩阵, 如何求解  $f, \alpha, r_1, r_2, t$  的问题.

$$\text{由于 } H \text{ 矩阵与变量 } f, \alpha, r_1, r_2, t \text{ 有如下关系: } sH = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & \alpha f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (r_1 \ r_2 \ t), \text{ 也就是说,}$$

$$s \begin{pmatrix} \frac{h_{11}}{f} & \frac{h_{12}}{f} & \frac{h_{13}}{f} \\ \frac{h_{21}}{\alpha f} & \frac{h_{22}}{\alpha f} & \frac{h_{23}}{\alpha f} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = (r_1 \ r_2 \ t) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & T_z \end{pmatrix}. \quad (9)$$

由于  $r_1^T r_2 = 0$ ,  $|r_1| = |r_2| = 1$ , 可以得到如下关于  $f, \alpha$  的方程组

$$\begin{cases} \frac{h_{11}h_{12}}{f^2} + \frac{h_{21}h_{22}}{\alpha^2 f^2} + h_{31}h_{32} = 0, \\ \frac{h_{11}^2}{f^2} + \frac{h_{21}^2}{\alpha^2 f^2} + h_{31}^2 = \frac{h_{12}^2}{f^2} + \frac{h_{22}^2}{\alpha^2 f^2} + h_{32}^2. \end{cases} \quad (10)$$

由于  $f > 0$ ,  $\alpha > 0$ , 一般来说,  $f, \alpha$  可以从方程组(10)唯一求出. 将  $f, \alpha$  代入式(9), 并考虑到  $|r_1| = |r_2| = 1$ , 故向量  $r_1, r_2, t$  可以唯一求出.

上面的算法可以小结为

1) 从 4 组对应点求  $H$  矩阵; 2) 从方程组(10)求  $f, \alpha$ ; 3) 从式(8)求  $r_1, r_2, t$ ; 4)  $r_3 = r_1 \times r_2$ .

## 4 关于解唯一性的讨论

在上节的讨论中曾指出, “一般来说”,  $H$  矩阵可以从 4 组对应点在相差一个常数因子的意义下唯一解出; “一般来说”,  $f, \alpha$  可以从式(10)中唯一解出. 那么, 在什么情况下, 解是奇异的? 或者说解是不唯一的? 关于  $H$  矩阵的求解, 文献[1]曾指出, 当 4 个空间点所在的平面不通过摄像机光心且空间 4 点中任意 3 点不共线时,  $H$  矩阵在相差一个常数因子的意义下可以唯一确定. 关于  $f, \alpha$  的求解, 很显然, 有唯一解的代数条件是式(10)的系数行列式不等于零, 即

$$\begin{vmatrix} h_{11}h_{12} & h_{21}h_{22} \\ h_{11}^2 - h_{12}^2 & h_{21}^2 - h_{22}^2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

式(11)给出的代数条件缺乏几何直观性. 在附录中我们将证明, 上述行列式不等于零的充要条件是空间 4 点所在的平面同时与摄像机坐标系的 3 个坐标轴相交. 换句话说, 如果空间 4 点所在的平面与摄像机的任一坐标轴平行的话,  $f, \alpha$  不可能唯一求解. 一种特殊的情况是空间平面与图像平面平行, 此时空间平面同时平行于摄像机坐标系的  $x$  轴和  $y$  轴, 故  $f, \alpha$  不能唯一求解.

另一个问题需要指出的是, 本文表明摄像机的内参数  $f, \alpha$  可以同时从已知的 4 组对应点解出. 这样, 人们也许会问, 是否从这 4 组对应点可以同时解出更多的内参数? 回答是否定的. 这是因为  $H$  矩阵最多只能提供关于  $R$  矩阵、 $t$  向量和摄像机内参数的 8 个独立约束方程,  $R$  矩阵和  $t$  向量各有 3 个自由度, 加上  $f, \alpha$  已共有 8 个独立未知变量, 故不可能再从上述约束方程中求解更多的未知参数了.

## 5 实验

本节通过计算机模拟实验对第 3 节的算法进行了验证,实验设计如下:摄像机的有效焦距  $f=1\ 000$ ,像素比例因子  $\alpha=0.8$ ,随机选定某个平面并随机产生该平面上的 100 个物体点,随机产生摄像机旋转矩阵、平移向量,选用其中成像位于图像尺寸( $512\times 512$ )内的 4 个物体点及其对应的图像点进行验证.我们分别研究了图像坐标没有噪声和有噪声的情况.对于有噪声的情况,噪声为均匀噪声,噪声幅度从 0 到 1.0 像素,共 20 个噪声级,相邻两个噪声级之间的间隔为 0.05 像素.根据物体点坐标及其对应图像点的坐标,利用本文所给出的算法可以计算出  $f, \alpha$ , 旋转矩阵  $R=[r_1, r_2, r_3]$  和平移向量  $t$ . 每种噪声级上分别独立进行 200 次实验,其实验结果(200 次实验的均值)如图 2 所示.由于旋转矩阵  $R$  各元素之间不独立,因此利用所求出旋转矩阵各列向量与真实旋转矩阵列向量之间的点积(即两向量之间的夹角)来表示所得结果的准确程度.

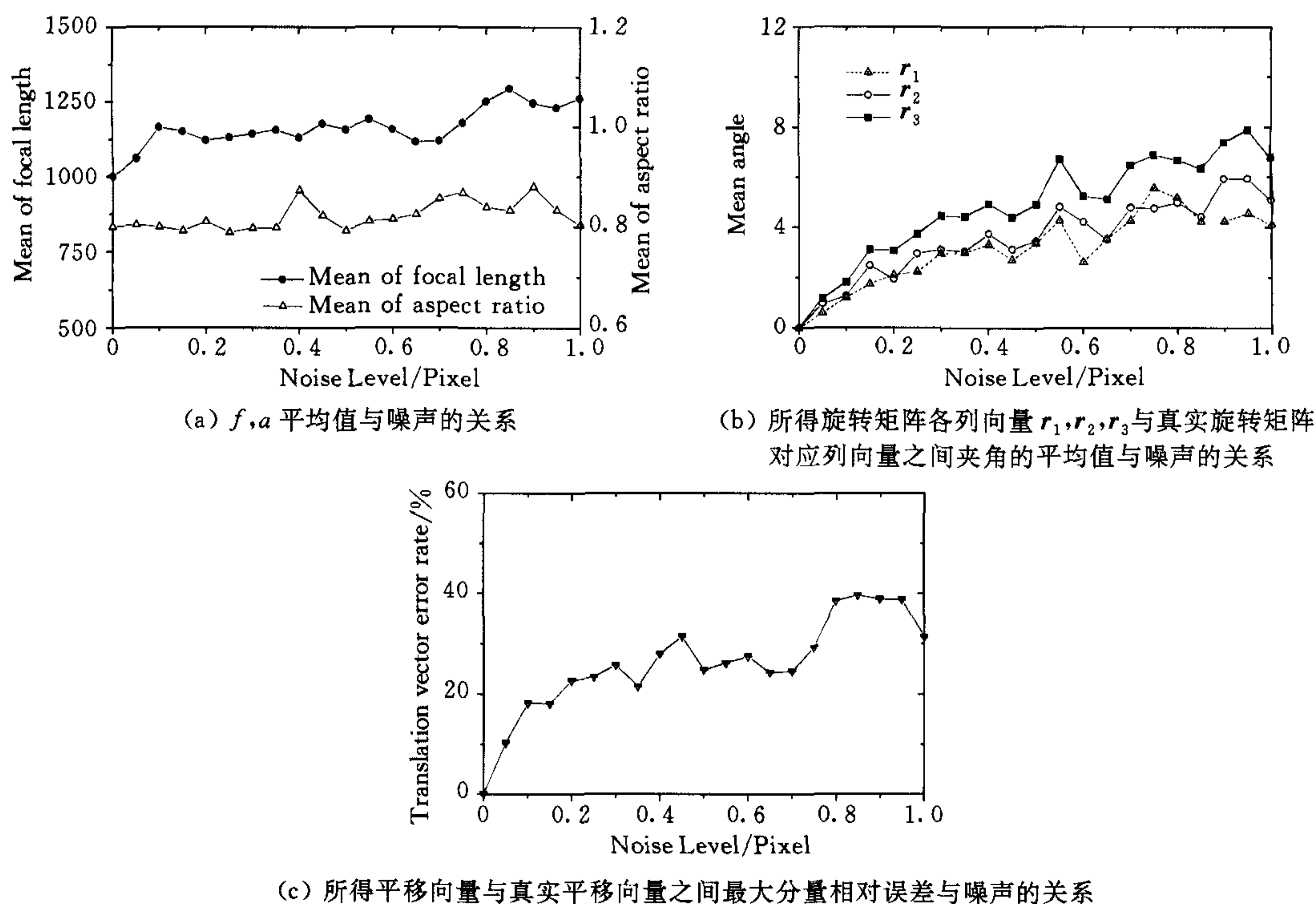


图 2 模拟实验结果

从图 2 可以看出,本文所提出的方法在没有噪声的情况下可以得到十分精确的结果,即本文方法理论上是完全正确的.随着噪声的增大,所求得的各项结果的精度会有所下降,但一般来说,仍然较为接近真实值.值得指出的是,在噪声较大的情况下,根据含噪声图像坐标所建立的方程组(10)有时无实解.

另外,对于真实图像实验,由于无法精确知道摄像机坐标系与物体坐标系之间旋转矩阵和平移向量的真实值,故无法验证所得结果的正确性,所以本文没有给出关于真实图像的实验结果.

## 6 结论与若干讨论

本文工作进一步推广了文献[10]的结论. 研究表明, 在 P4P 问题中, 如果空间点为共面点, 不仅从物体坐标系到摄像机坐标系间的旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$ 、摄像机的有效焦距  $f$  可以从 4 组对应点中求得, 而且像素比例因子  $\alpha$  同样可以求得. 具体实验验证了该理论结果的正确性.

另外, 以下几点值得指出.

1) 表面看起来, 本文结果与文献[10]的主要区别是本文算法能够同时确定图像比例因子  $\alpha$ . 事实上能够同时求解  $\alpha$  不仅在学术上有意义, 而且同样具有实际应用价值. 这主要是因为随着摄像机制造技术的发展, 目前的 CCD 摄像机的其它三个内参数(skew: 畸变因子; principal point: 主点坐标)均变化不大, 故本文的结果事实上意味着可以应用到摄像机未标定的场合. 这样就大大扩展了算法的适用范围.

2) 关于 P4P 问题的具体应用价值, 由于本文索引的相关文献中已有大量论述, 故本文未对此进行讨论. 如中国科学院沈阳自动化研究所目前进行的卫星对接工程, 本质上就是一个 P4P 问题.

3) 在第 3 节的讨论中, 我们总假定空间点和图像点没有任何噪声. 在有噪声的情况下, 算法所求得的  $R$  矩阵一般不再是一个旋转矩阵. 这时可以利用其它算法, 如文献[11]中介绍的方法, 来获取最逼近  $R$  矩阵的旋转矩阵  $R_0$ .

## 参 考 文 献

- 1 Fishler M A, Bolles R C. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 1981, **24**(6):381~395
- 2 Abdel-Aziz Y, Karara H. Direct linear transformation from comparator to object space coordinates in close-range photogrammetry. In: ASP Symp. Close-Range Photogrammetry. Urbana, Illinois: 1971. 1~18
- 3 Wolfe W J, Mathis D. The perspective view of three points. *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, 1991, **13**(1):66~73
- 4 苏 成, 徐迎庆, 李 华, 刘慎权, 李冬果. 判定 P3P 问题正解数目的充要条件. *计算机学报*, 1998, **21**(12):1084~1095
- 5 Harallic R M. Determining camera parameters from the perspective projection of a rectangle. *Pattern Recognition*, 1989, **22**(3):225~230
- 6 Penna M A. Determining camera parameters from the perspective projection of a quadrilateral. *Pattern Recognition*, 1991, **24**(6):533~541
- 7 Horaud R, Conio B, Leboulloux O. An analytic solution for the perspective 4-point problem. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1989, **47**:33~44
- 8 Quan L, LAN Z L. Linear  $N \geq 4$  point pose determination. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision, Bombay, India: 1998. 778~783
- 9 Liu M Land, Wong K H. Pose estimation using four corresponding points. *Pattern Recognition Letters*, 1999, **20**: 69~74
- 10 Abidi M A, Chandra T. A new efficient and direct solution for pose estimation using quadrangular targets: Algorithm and evaluation. *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, 1995, **17**(5):534~538
- 11 Golub G, Van Loan C. *Matrix Computations* (3rd edition). Baltimore, Maryland: The John Hopkins University Press, 1996

## 附 录

关于式(11)所表示的几何意义的证明.

命题. 行列式  $\begin{vmatrix} h_{11}h_{12} & h_{21}h_{22} \\ h_{11}^2 - h_{12}^2 & h_{21}^2 - h_{22}^2 \end{vmatrix} \neq 0$  的充要条件为摄像机坐标系的三个坐标轴同时与空间点所在平面相交.

证明. 令物体坐标系为  $O_w - x_w y_w z_w$ , 摄像机坐标系为  $O_c - x_c y_c z_c$ , 对应坐标轴的单位向量分别记为  $i_w, j_w, k_w$  和  $i_c, j_c, k_c$ .  $O_w - x_w y_w z_w$  与  $O_c - x_c y_c z_c$  之间的坐标变换关系为

$$X_c = R X_w + t, \quad (\text{A1})$$

做坐标变换

$$\bar{X}_c = X_c - t, \quad (\text{A2})$$

与  $\bar{X}_c$  对应的坐标系  $\bar{O}_c - \bar{x}_c \bar{y}_c \bar{z}_c$  的三个坐标轴的单位向量记为  $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ , 则必有

$$X_w = R^T \bar{X}_c, \quad (\text{A3})$$

且

$$\bar{i}_c // i_c, \quad \bar{j}_c // j_c, \quad \bar{k}_c // k_c, \quad (\text{A4})$$

由式(A3),  $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$  在物体坐标系  $O_w - x_w y_w z_w$  下的坐标分别为

$$X_w(\bar{i}_c) = R^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}, \quad X_w(\bar{j}_c) = R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix}, \quad X_w(\bar{k}_c) = R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{A5}), (\text{A6}), (\text{A7})$$

由于

$$\begin{vmatrix} h_{11}h_{12} & h_{21}h_{22} \\ h_{11}^2 - h_{12}^2 & h_{21}^2 - h_{22}^2 \end{vmatrix} = (h_{21}h_{12} - h_{11}h_{22})(h_{11}h_{21} + h_{12}h_{22}) = f^4 \alpha^2 (r_{21}r_{12} - r_{11}r_{22})(r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22}),$$

且  $f > 0, \alpha > 0$ , 所以  $\begin{vmatrix} h_{11}h_{12} & h_{21}h_{22} \\ h_{11}^2 - h_{12}^2 & h_{21}^2 - h_{22}^2 \end{vmatrix} \neq 0$  的充要条件为

$$r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} \neq 0, \quad (\text{A8})$$

且

$$r_{21}r_{12} - r_{11}r_{22} \neq 0. \quad (\text{A9})$$

由于  $(r_{11} \ r_{12} \ r_{13}), (r_{21} \ r_{22} \ r_{23})$  为  $R$  矩阵的 2 行向量, 所以它们之间相互正交, 因此式(A8)成立的充要条件为  $r_{13} \neq 0$  且  $r_{23} \neq 0$ . 由式(A5), (A6)知,  $r_{13} \neq 0$  且  $r_{23} \neq 0$  的充要条件为  $\bar{i}_c, \bar{j}_c$  均不在物体平面  $O_w - x_w y_w$  (空间点所在的平面)上. 因此, 式(A8)成立的充要条件为  $i_c, j_c$  所在的摄像机坐标系的坐标轴  $x_c, y_c$  均与  $O_w - x_w y_w$  相交.

由于

$$\begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{12}r_{23} - r_{13}r_{22} \\ r_{13}r_{21} - r_{11}r_{23} \\ r_{11}r_{22} - r_{21}r_{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{A10})$$

所以式(A9)成立的充要条件为  $r_{33} \neq 0$ . 由式(A7)知,  $r_{33} \neq 0$  的充要条件为  $\bar{k}_c$  不在物体平面  $O_w - x_w y_w$  上. 于是式(A9)成立的充要条件为  $k_c$  所在的摄像机坐标系的坐标轴  $z_c$  与  $O_w - x_w y_w$  相交.

综合上面的分析, 命题得到了证明.

证毕.

胡占义 见本期.

雷 成 1973 年出生, 博士研究生. 主要研究方向为摄像机标定、三维重建和遗传算法等.

吴福朝 见本期.