第29卷 第2期 自动化学报 Vol. 29, No. 2
2003年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 2003

输出调节和内模原理[1)]

程代展 董亚丽
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)
(E-mail: dcheng@iss03.iss.ac.cn)

摘 要 输出调节指的是控制系统的输出,以达到渐近跟踪给定的轨线或渐近抑制干扰的目的.对于线性系统,内模原理是解决这一问题的强有力的工具.在最近10年,非线性系统的输出调节问题及内模原理成为国际非线性控制研究的前沿课题.该文的目的是对此问题给一综述介绍.

关键词 输出调节,内模,鲁棒调节器,渐近稳定性,非线性系统
中图分类号 O231

Output Regulation and Internal Model Principle

CHENG Dai-Zhan DONG Ya-Li
(*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)
(E-mail: dcheng@iss03.iss.ac.cn)

Abstract Output regulation is to control the output of a system so as to achieve asymptotical tracking of prescribed trajectories or asymptotical rejection of disturbances. For linear systems the internal model principle is a powerful tool to solve this problem. In the last decade the problem of the output regulation and the internal model principle of nonlinear systems have become a frontier of the international nonlinear control researches. The purpose of this paper is to give a survey on this problem.

Key words Output regulation, internal model, robust regulator, asymptotical stability, nonlinear systems

1 引言

输出调节就是寻找控制律,使得通过这一控制律,系统的输出能渐近跟踪给定的轨线或渐近抑制干扰,同时要求非强迫闭环系统渐近稳定.这在控制理论中是一个核心问题.

---

1) 国家"973"项目(G1998020308)资助
Supported by National 973 Plan(G1998020308)
收稿日期 2001-09-12 收修改稿日期 2001-11-28
Received September 12, 2001; in revised form November 28, 2001

本文简述了该领域的主要问题、基本结果及目前的研究状态.

2 线性系统的内模原理

线性系统的内模原理是在 20 世纪 70 年代发展起来的[1,2]. 为便于参考,下面给出扼要描述. 考虑线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ e = Cx + Qw \end{cases} \tag{1}$$

其中状态 $x \in R^n$,控制 $u \in R^m$,调节输出 $e \in R^m$,外部干扰输入 $w \in R^r$,且满足

$$\dot{w} = Sw \tag{2}$$

假设系统(2)是中性稳定的. 如果系统(2)的平衡点 $w=\mathbf{0}$ 是稳定平衡点(在 Lyapunov 意义下),并且每一初始状态 w_0 在 Poisson 意义下稳定[3,4],则称系统(2)是中性稳定的.

定义 1.

1) 输出调节问题就是寻找调节器

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + Ge \\ u = H\xi \end{cases} \tag{3}$$

使得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BH\xi + Pw \\ \dot{\xi} = F\xi + GCx + GQw \\ \dot{w} = Sw \end{cases} \tag{4}$$

满足:(a) 当 $w=\mathbf{0}$ 时, 式(4)是渐近稳定的; (b) $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$.

2) 如果对标称参数 $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ 设计的调节器(3)对它的某一开邻域内的一切 $\{A, B, C, P, Q\}$ 均有效, 则称调节器(3)是结构稳定的.

注 1. 条件(a)等价于矩阵

$$J = \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \tag{5}$$

是 Hurwitz 的. 下面的结果,通称为内模原理,它建立在文献[1,2,5,6]的工作之上. 文献[7]给出了存在鲁棒线性调节器的简单证明.

定理 1.

1) 调节器存在的必要条件是(A,B)是能稳的, (C,A)能检测的,并且线性矩阵方程(调节器方程)

$$\begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases} \tag{6}$$

有解 Π, Γ.

2) 结构稳定调节器存在的充分必要条件是(A_0, B_0)是能稳的, (C_0, A_0)能检测的,且调节器方程

$$\begin{cases} \Pi S = A_0\Pi + B_0\Gamma + P \\ 0 = C_0\Pi + Q \end{cases} \tag{7}$$

对所有 P,Q 有解 Π,Γ. 详细证明参见附录 A,该证明提供了调节器的构造方法.

3 非线性局部输出调节

在非线性控制研究中,非线性输出调节问题始于文献[4,8,9]等,它目前是一个非常热门的研究方向.

考虑非线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\end{cases} \tag{8}$$

其中状态 $\boldsymbol{x}\in R^n$,控制 $\boldsymbol{u}\in R^m$,调节输出 $\boldsymbol{e}\in R^m$,外部干扰输入 $\boldsymbol{w}\in R^r$,且满足

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) \tag{9}$$

假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$及 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w})$足够光滑,且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=0$, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$.

定义 2. 局部输出调节问题指的是,对给定的非线性系统(8),寻找控制器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi},e), \quad \boldsymbol{\xi}\in U\subset R^v \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})\end{cases} \tag{10}$$

其中 U 是原点的开邻域,使得

(a)

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{0}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}))\end{cases} \tag{11}$$

的线性近似是局部渐近稳定的;

(b) 强迫闭环系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{w}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi},h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})) \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w})\end{cases} \tag{12}$$

对原点邻域的$(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{\xi}(0),\boldsymbol{w}(0))$,满足$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{0}$. 令

$$\begin{cases}A = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \quad B = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \quad C = \dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \\ P = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \quad Q = \dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \quad S = \dfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{0}) \\ F = \dfrac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \quad G = \dfrac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}), \quad H = \dfrac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{0})\end{cases} \tag{13}$$

条件(a)意味着式(5)中矩阵 J 是 Hurwitz 的.

定理 2. 假设系统(8)的外部系统(9)是中性稳定的,则存在控制器,使得局部输出调节问题有解的必要条件是存在映射 $\boldsymbol{\pi}:U_0\to R^n$ 及 $\boldsymbol{c}:U_0\to R^m$(其中 $\boldsymbol{0}\in U_0\subset U$),满足 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{0})=0$ 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w})\end{cases} \tag{14}$$

成立. 我们也称方程(14)为非线性调节器方程.

定义 3. 给定两个带有输出的动态系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x), & x\in X\\ y=h(x), & y\in R^m\end{cases}\tag{15}$$

$$\begin{cases}\dot{z}=g(z), & z\in Z\\ y=m(z), & y\in R^m\end{cases}\tag{16}$$

其中 $\mathbf{0}\in X\subset R^p$, $\mathbf{0}\in Z\subset R^q$, 并且 $p\leqslant q$. 系统(15)可表示为(X,f,h).

如果存在映射 $\tau:X\to Z$,记为 $z=\tau(x)$,且 $\tau(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,使得$\begin{cases}\dfrac{\partial\tau}{\partial x}f(x)=g(\tau(x))\\ h(x)=m(\tau(x))\end{cases}$成立,则称系统(15)可浸入系统(16).

注 2. 第一个条件隐含 $\tau(\Phi_t^f(x))=\Phi_t^g(\tau(x))$,第二个条件隐含 $h(\Phi_t^f(x))=m(\Phi_t^g(\tau(x)))$.

定理 3. 假设系统(8)的外部系统(9)是中性稳定的,则存在控制器,使得局部输出调节问题有解的充分必要条件是存在映射 $\pi:U_0\to R^n$ 及 $c:U_0\to R^m$(其中 $\mathbf{0}\in U_0\subset U$),满足 $\pi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 和 $c(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 使得式(14)成立. 并且,在邻域 $\mathbf{0}\in V_0\subset R^n$ 内,带输出的自治系统

$$\begin{cases}\dot{w}=s(w)\\ u=c(w)\end{cases}\tag{17}$$

可浸入系统

$$\begin{cases}\dot{\xi}=\phi(\xi)\\ u=\gamma(\xi)\end{cases}\tag{18}$$

其中 $\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $\gamma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,并且矩阵 $F=\dfrac{\partial\phi}{\partial\xi}(\mathbf{0})$, $H=\dfrac{\partial\gamma}{\partial\xi}(\mathbf{0})$对某个选定的矩阵 N,使得矩阵对

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ NC & F\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}\tag{19}$$

是能稳的,而矩阵对

$$(C\quad 0),\quad \begin{pmatrix}A & BH\\ 0 & F\end{pmatrix}\tag{20}$$

是能检测的.

定理 2 及定理 3 的证明以及调节器的设计方法可参见附录 B.

4 一些新近的研究方向

4.1 鲁棒输出调节

考虑具有未知参数 $\mu\in R^p$ 的系统 (8),即

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u,w,\mu)\\ e=h(x,w,\mu)\end{cases}\tag{21}$$

定义 4.

1) 给定具有外部系统(9)的非线性系统(21). 结构稳定局部输出调节问题就是寻找控制器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \tag{22}$$

存在一个邻域 $\mathbf{0} \in P \subset R^p$，使对每一 $\boldsymbol{\mu} \in P$ 有

(a) 非强迫闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}, h(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu})) \end{cases} \tag{23}$$

的平衡点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ 是一次近似局部渐近稳定的.

(b) 强迫闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}, h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu})) \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) \end{cases} \tag{24}$$

满足 $\lim\limits_{t \to \infty} \boldsymbol{e}(t) = \mathbf{0}$.

2) 在上述问题中，如果邻域 P 可预先指定，则局部输出调节问题成为鲁棒输出调节问题. 视 $\boldsymbol{\mu}$ 为外部干扰的一部分，结构稳定局部输出调节问题转换成上一节讨论的标准输出调节问题. 而鲁棒输出调节问题则相当困难，文献[10～16]讨论了该问题.

4.2 半全局及全局输出调节

许多文章研究了半全局及全局输出调节[17,18]. 陈述这一问题的较典型的方式如下：考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}) \\ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n, \ \boldsymbol{y} \in R^m \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{\mu} \in C \subset R^p$，$C$ 是已知紧集，并且 $\dot{\boldsymbol{w}} = S\boldsymbol{w}$ 是中性稳定的.

定义 5. 对式(25)全局鲁棒调节问题是寻找动态误差反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}), \quad \boldsymbol{\xi} \in R^v \end{cases} \tag{26}$$

具有 $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 满足：

(i)非强迫闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu})), \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu})) \end{cases} \tag{27}$$

的平衡点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ 对每一 $\boldsymbol{\mu} \in C$ 是全局渐近稳定的；

(ii)强迫闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}), \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}) \\ \dot{\boldsymbol{w}} = S\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{e} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\mu}) \end{cases} \tag{28}$$

的所有轨线有界，且对每一 $\boldsymbol{\mu} \in C$ 有 $\lim\limits_{t \to \infty} \boldsymbol{e}(t) = \mathbf{0}$.

这一问题与输出反馈的半全局稳定问题密切相关[19,20].

4.3 跟踪

跟踪问题与输出调节问题密切相关[21~23].

对于一大类非线性系统,非线性输出调节理论是解决渐近跟踪和抑制干扰问题的关键,而一般逆系统方法则难以处理这类问题[24]. 形式上,将 $e(t)$ 定义为系统标准输出与指定轨道之差,即可将跟踪问题转化为输出调节问题. 但目前的输出调节理论还只能解决中性稳定轨道的跟踪.

4.4 近似调节

近似调节问题非常有用,这一问题可参考文献[3,25]. 当使用状态反馈控制 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$,调节方程成为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}),\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w})\end{cases} \tag{29}$$

如果有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{0}(\|\boldsymbol{w}\|^{k+1}) \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{0}(\|\boldsymbol{w}\|^{k+1})\end{cases} \tag{30}$$

则称$(\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{w}))$为式(29)的 k 阶近似解. 对于调节方程,因精确解难求,我们转而寻找近似解.

考虑动态反馈控制. 对调节方程寻找近似解$(\tilde{x},\tilde{u})=(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}),\tilde{c}(\boldsymbol{w}))$使得误差 $\tilde{e}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w})$满足

$$\|\tilde{e}(t)\| \leqslant E(\|\boldsymbol{w}(t)\|) \tag{31}$$

其中函数 $E:R_+ \to R_+$ 满足 $\lim\limits_{r\to 0_+}\dfrac{E(r)}{r^p}=0$. 这种调节器的设计方法可参阅文献[3].

4.5 调节器设计

调节器设计的原则见附录. 它的困难之点在于对非线性系统调节器方程的解不易得到.

对一类特殊系统,解决设计问题的一种方法是获得闭形式解,假设具有非奇异性,状态反馈调节器形式可精确表达[26,27]. 另一种方法是获得数值解. 最近,各种近似方法及数值方法,如泰勒展开式、神经网络等用于解决调节问题,它使得设计方法更具实用性[28~30].

5 结束语

在经典和现代自动控制的发展中,输出调节问题起着一个重要的作用,它与渐近跟踪、衰减干扰及内部稳定等问题密切相关. 在最近 10 年,内模原理由线性系统发展到非线性系统,作为非线性控制理论的研究焦点,它值得更多的关注.

References

1 Francis B A, Wonham W M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976, **12**(5):457~465

2 Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. 2nd ed. Berlin: Springer, 1979

3 Byrnes C I, Priscoli F D, Isidori A. Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems. Boston: Birkhauser, 1997

4 Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**

(2):131～140

5 Davison E J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(1):25～34

6 Francis B A. The linear multivariable regulator problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, **15**(3):486～505

7 Huang J. A simple proof of the robust linear regulator. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1995, **10**(4):1499～1504

8 Huang J, Rugh W J. On a nonlinear multivariable servomechanism problem. *Automatica*, 1990, **26**(6):963～972

9 Huang J, Rugh W J. Stabilization on zero-error manifold and the nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(7):1009～1013

10 Huang J, Lin C F. On a robust nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(7):1510～1513

11 Khalil H. Robust servomechanism output feedback controllers for feedback linearizable systems. *Automatica*, 1994, **30**(10):1587～1599

12 Isidori A, Tarn T J. Robust regulation for nonlinear systems with gain-bounded uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(10):1744～1754

13 Mahmoud N A, Khalil H K. Asymptotic regulation of minimum phase nonlinear systems using output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(10):1402～1412

14 Byrnes C I, Priscoli F D, Isidori A, Kang W. Structurally stable output regulation systems. *Automatic*, 1997, **33**(3):369～385

15 Huang J. K-fold exosystem and the robust nonlinear servomechanism problem. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1998, **120**(3):149～153

16 Jiang Z P. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties. *Automatica*, 2000, **36**(2):189～209

17 Isidori A. A remark on the problem of semiglobal nonlinear output regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(12):1734～1738

18 Serrani A, Isidori A. Global robust regulation for a class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2000, **39**(2):133～139

19 Teel A R, Praly L. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Systems & Control Letters*, 1994, **22**(5):313～325

20 Teel A R, Praly L. Tools for semi-global stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1995, **33**(5):1443～1488

21 Huang J. Asymptotic tracking and disturbance rejection on uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(6):1118～1122

22 Nikiforov V O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances. *European Journal of Control*, 1998, **4**(2):132～139

23 Jiang Z P. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(2):265～279

24 Byrnes C I, Isidori A. Output regulation of nonlinear systems: An overview. *International Journal Robust Nonlinear Control*, 2000, **10**(5):323～337

25 Huang J, Rugh W J. An approximation method for the nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(9):1395～1398

26 Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd ed. Heidelberg: Springer, 1995

27 Cheng D, Tarn T J, Spurgeon S K. On the design of output regulators for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2001, **43**(3):167～179

28 Krener A J. The Construction of Optimal Linear and Nonlinear Regulators, in Systems, Models, and Feedback. Isidori A, Tarn T J eds. Birkhauser: Basel, 1992. 301～322

29 Chu Y C, Huang J. A neural network method for nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Neu-*

ral Networks, 1999, **10**(6):1417～1423

30 Wang J, Huang J, Yau S T. Approximate output regulation based on universal approximation theorem. *International Journal Robust and Nonlinear Control*, 2000, **10**(5):439～456

31 Cheng D. Semi-tensor product and its application to Morgen's problem. *Chinese Sciences*, 2001, **44**(3):195～212

32 Carr J. Applications of Center Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981

附 录 A

线性系统内模原理的证明

(篇幅所限,这里略去引理证明,参见文献[3]及其相关参考文献)

对于调节器,显然有 J 是 Hurwitz 的必要条件是(A,B)是能稳的,并且(C,A)是能检的. 此外,还有以下引理.

引理 A1. 假设式(5)中矩阵 J 是 Hurwitz 的,则

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \tag{A1}$$

当且仅当存在矩阵 Π,Σ 满足

$$\begin{cases} \Pi S = A\Pi + BH\Sigma + P \\ \Sigma S = F\Sigma \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases} \tag{A2}$$

为构造调节器,需要下面的引理.

引理 A2. 对所有 P,Q 调节器方程(7)有解 Π,Γ 的充分必要条件是对每一 $\lambda\in\sigma(S)$

$$\begin{pmatrix} A_0-\lambda I & B_0 \\ C_0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A3}$$

是行独立的.(其中 $\sigma(S)$是 S 的谱)

引理 A3. 将 S 变换为块对角形式 $S=\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & S_{\min} \end{pmatrix}$,其中 $S_{\min}$是 $q\times q$ 矩阵,它的特征多项式就是 S 的极小多项式. 构造矩阵 Φ 如下

$$\Phi = I_m \otimes S_{\min} \tag{A4}$$

则能找到 $qm\times m$ 矩阵 N 及 $m\times qm$ 矩阵 Γ,使得(Φ,N)是能控的,(Γ,Φ)能观测的.

引理 A4.

1) (A,B)是能稳的当且仅当对任意 λ, $R(\lambda)\geqslant 0$

$$\mathrm{rank}(A-\lambda I \quad B) = n \tag{A5}$$

其中 n 是状态空间的维数;

2) (C,A)是能检测的当且仅当对任意 λ,$R(\lambda)\geqslant 0$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} C \\ A-\lambda I \end{pmatrix} = n \tag{A6}$$

引理 A5. 假设(A_0,B_0)及(Φ,N)是能稳的,(C_0,A_0)及(Γ,Φ)能检测的. 对 $\forall\lambda\in\sigma(S)$矩阵(A3)是非奇异的,则

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ NC_0 & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A7}$$

是能稳的,而

$$(C_0 \quad 0), \quad \begin{pmatrix} A_0 & B_0\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} \tag{A8}$$

是能检测的.

引理 A6. (分离原理)假设线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \tag{A9}$$

是能稳的及能检测的,则存在动态输出反馈

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = K\hat{x} + Ly \\ u = M\hat{x}\end{cases} \tag{A10}$$

镇定原系统.

下面,我们来构造调节器.回忆式(A7)和(A8),由于反馈不改变稳定性,对式(A7)应用反馈$(0 \quad \Gamma)$可得

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0\Gamma \\ NC_0 & \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A11}$$

是能稳的.类似地,应用式(A8)

$$(C_0 \quad 0), \quad \begin{pmatrix} A_0 & B_0\Gamma \\ NC_0 & \Phi \end{pmatrix} \tag{A12}$$

是能检测的.引理 A6 保证存在 K,L,M 使得

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & B_0\Gamma \\ NC_0 & \Phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix}M \\ L(C_0 \quad 0) & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0(\Gamma \quad M) \\ \begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix}C_0 & \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{A13}$$

是 Hurwitz 的.

应用上面得到的矩阵 $\Phi \in M_{mq\times mq}$, $N \in M_{qm\times m}$, $\Gamma \in M_{m\times qm}$, $K \in M_{n\times n}$, $L \in M_{n\times m}$, $M \in M_{m\times n}$ 构造调节器(3),其中

$$F = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix}, \quad H = (\Gamma \quad M) \tag{A14}$$

可以断言,这个调节器是结构稳定调节器.为证之,假设(A,B,C)在(A_0,B_0,C_0)的某个邻域内,使得当矩阵

$$\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} \tag{A15}$$

是 Hurwitz 时,闭环系统

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + B(\Gamma \quad M)\xi + Pw \\ \dot{\xi} = \begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix}Cx + \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\xi + \begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix}Qw \\ e = Cx + Qw\end{cases} \tag{A16}$$

满足$\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$.

我们要应用引理 A1,即证明式(A2)成立.

构造 Sylvester 方程

$$\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \tag{A17}$$

它的矩阵形式是[31] $\left(I\otimes\begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix} - S^{\mathrm{T}}\otimes I\right)X = V_c(E)$,其中 $X = V_c\begin{pmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{pmatrix}$. 由于 $R\sigma(A)<0$ 且 $R\sigma(S)=0$,对任意 E,式(A17)有解.令 $E=\begin{pmatrix} -P \\ -GQ \end{pmatrix}$,得到两个方程

$$A\Pi + BH\Sigma + P = \Pi S \tag{A18}$$

$$F\Sigma - \Sigma S = -G(C\Pi + Q) \tag{A19}$$

式(A18)即为式(A2)的第一式.故仅需证明式(A19)保证了式(A2)的第二式及第三式即可.为此,定义两个映射

$$W: M_{(n+mq)\times r} \to M_{(n+mq)\times r}, \quad \Sigma \mapsto W(\Sigma) = F\Sigma - \Sigma S;$$

$$\Psi: M_{m\times r} \to M_{(n+mq)\times r}, \quad Z \mapsto \Psi(Z) = GZ.$$

则式(A19)成为

$$W(\Sigma) + \Psi(C\Pi + Q) = 0 \tag{A20}$$

现在证明下面两个事实

$$\mathrm{im}(W) \cap \mathrm{im}(\Psi) = \{0\} \tag{A21}$$

并且

$$\ker(\Psi) = \{0\} \tag{A22}$$

由于式(A20)和(A21)保证

$$W(\Sigma) = 0 \tag{A23}$$

并且

$$\Psi(C\Pi + Q) = 0 \tag{A24}$$

式(A22)和(A24)隐含

$$C\Pi + Q = 0 \tag{A25}$$

我们需要下述引理.

引理 A7. 方程

$$F\Sigma + \Sigma S = 0 \tag{A26}$$

至少有 mr 个线性无关的解 Σ.

应用这个引理可知

$$\dim(\mathrm{im}(W)) \leqslant (n + mq)r - mr \tag{A27}$$

注意到 $\dim(Z) = mr$,因此

$$\dim(\mathrm{im}(\Psi)) \leqslant mr \tag{A28}$$

根据式(A17)的第二式 $\Psi(C\Pi) + W(\Sigma) = Y$ 对任意 $Y \in M_{(n+mq)\times r}$ 有解. 则

$$\mathrm{im}(W) + \mathrm{im}(\Psi) = M_{(n+mq)\times r} \tag{A29}$$

即 $\dim(\mathrm{im}(W)) = (n+mq)\times r - mr$, $\dim(\mathrm{im}(\Psi)) = mr$ 立即可得结论. 证毕.

附 录 B

局部输出调节器设计

作为引理 A1 的推广,有以下引理.

引理 B. 假设式(5)中矩阵 J 是 Hurwitz 的, 则

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}(t) = \mathbf{0} \tag{B1}$$

当且仅当存在光滑映射 $\boldsymbol{\pi}: U_0 \to R^n$, $\boldsymbol{\sigma}: U_0 \to R^v$ 具有 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 使得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{w}} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})), \boldsymbol{w}) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{w}} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w}), \mathbf{0}) \\ \mathbf{0} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}) \end{cases} \tag{B2}$$

证明. 考虑闭环系统(12),在原点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ 处的 Jacobian 矩阵是

$$\begin{bmatrix} A & BH & * \\ GC & F & * \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} J & * \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

由于 J 是 Hurwitz 的,并且 $R\sigma(S) = 0$,存在中心流形[32] $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w}))$,满足

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{w}} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})), \boldsymbol{w}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{w}} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{w}) = \eta(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w}), h(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w})) \qquad \text{(B3), (B4)}$$

式(B2)的第一个方程已满足. 先证明必要性.

($\Rightarrow$)让 $\mathbf{0}\in U\subset R^r$ 足够的小,使得中心流形存在. 让 $E>0$ 足够的小使得 $\|w_0\|<E$ 保证 $w(t,w_0)\in U$, $t\geqslant 0$,这可由式(9)的中性稳定性(因此是 Lyapunov 稳定)所保证. 我们断言 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\mathbf{0}$ 保证

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(w),w)=\mathbf{0} \tag{B5}$$

假设存在 $\|w_0\|<E$ 使得 $\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(w_0),w_0)\|=2\varepsilon>0$. 因为 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\mathbf{0}$,存在 $T>0$ 使得

$$\|e(t)\|=\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(w(t)),w(t))\|<\varepsilon.$$

由中性稳定性(因此是 Poisson 稳定),存在 $t'>T$ 使得 $w(t')$ 接近 w_0 满足

$$\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(w(t')),w(t'))-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(w_0),w_0)\|<\varepsilon$$

是荒谬的. 现在式(B4)和(B5)保证了式(B2)的第二式. 下面,证明充分性.

($\Leftarrow$)由式(B2)的第三式,有

$$e(t)=\boldsymbol{h}(x(t),w(t))-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\pi}(w(t)),w(t)) \tag{B6}$$

但中心流形$(x,\xi)=(\boldsymbol{\pi}(w),\boldsymbol{\sigma}(w))$指数吸引,因此存在 $M>0$ 和 $a>0$ 使得

$$\|x(t)-\boldsymbol{\pi}(w(t))\|\leqslant Me^{-at}\|x(0)-\boldsymbol{\pi}(w(0))\|,$$

这保证 $\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\mathbf{0}$. 证毕.

注 1. 在线性情形,可假设中心流型为 $\begin{cases}x(w)=\Pi w+0(\|w\|^2),\\ \xi(w)=\Sigma w+0(\|w\|^2),\end{cases}$ 根据式(B2),它表明(Π,Σ)满足式(A2). 至于充分性,从式(A2)出发,式(B6)及其以后的证明仍然有效.

定理 2 的证明. 使用引理 B,在式(B2)中令 $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\sigma}(w))=c(w)$, 即证得定理 2. 证毕.

定理 3 的证明.

必要性. 假设下列调节器

$$\begin{cases}\dot{\xi}=\boldsymbol{\eta}(\xi,e)=F\xi+Ge+\mathbf{0}(\|\xi,e\|^2)\\ u=\boldsymbol{\theta}(\xi)\end{cases} \tag{B7}$$

解决输出调节问题. 则方程(B2)满足. 令 $c(w)=\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\sigma}(w))$, $\gamma(\xi)=\boldsymbol{\theta}(\xi)$, $\boldsymbol{\phi}(\xi)=\eta(\xi,\mathbf{0})$, 显然 $\boldsymbol{\pi}(x),c(w)$ 满足式(14),而 $\boldsymbol{\phi}(\xi),\gamma(\xi)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial w}s(w)=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}(w))\\ c(w)=\gamma(\boldsymbol{\sigma}(w))\end{cases} \tag{B8}$$

这表明$\{V_0,s,c\}$可浸入$\{U_0,\phi,\gamma\}$,其中 $V_0:=\boldsymbol{\sigma}(U_0)$. 由定义知

$$\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial\xi}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial\xi}(\mathbf{0})=F,\quad \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\xi}(\mathbf{0})=\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}(\mathbf{0})=H.$$

又由假设 $J=\begin{pmatrix}A & BH\\ GC & F\end{pmatrix}$是 Hurwitz 的,而 $J=\begin{pmatrix}A & 0\\ GC & F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}(0\quad H)$,故矩阵对$\begin{pmatrix}A & 0\\ GC & F\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}$是能稳的. 类似地,因 $J=\begin{pmatrix}A & BH\\ 0 & F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ G\end{pmatrix}(C\quad 0)$,故矩阵对$(C\quad 0)$, $\begin{pmatrix}A & BH\\ 0 & F\end{pmatrix}$是能检测的.

充分性. 使用式(19)和式(20),有$\begin{pmatrix}A & BH\\ NC & F\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}$是能稳定的,而$(C\quad 0)$, $\begin{pmatrix}A & BH\\ NC & F\end{pmatrix}$是能检测的. 根据引理 A6 及其证明,存在 K,L,M 使得

$$D=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}A & BH\\ NC & F\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}M\\ L(C\quad 0) & K\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & BH & BM\\ NC & F & 0\\ LC & 0 & K\end{bmatrix} \tag{B9}$$

是 Hurwitz 的. 现在构造调节器

$$\begin{cases}\dot{\xi}_0=K\xi_0+Le\\ \dot{\xi}_1=\boldsymbol{\phi}(\xi_1)+Ne\\ u=M\xi_0+\gamma(\xi_1)\end{cases} \tag{B10}$$

在$(x,\xi_0,\xi_1)=(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$处,式(11)的 Jacobian 矩阵成为

$$\frac{\partial}{\partial(x,\xi_0,\xi_1)}\begin{pmatrix} f(x,M\xi_0+\gamma(\xi_1),0) \\ K\xi_0+Lh(x,0) \\ \phi(\xi_1)+Nh(x,0) \end{pmatrix}\Bigg|_{0,0,0} = \begin{pmatrix} A & BM & BH \\ LC & K & 0 \\ NC & 0 & F \end{pmatrix},$$

它是 Hurwitz 的. 此外,存在 $x=\pi(x)$, $u=c(x)$满足式(14). 又存在浸入函数 $\xi_1=\tau(w)$使得

$$\frac{\partial\tau}{\partial w}s(w)=\phi(\tau(w)),\quad c(w)=\gamma(\tau(w)) \tag{B11}$$

令$\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\end{pmatrix}=\sigma=\begin{pmatrix}0\\ \tau(w)\end{pmatrix}$,使用式(14)和(B11)即可证明式(B2)满足,亦即证明了充分性.　　证毕.

注 2. 有时将调节器(B10)分解为两部分(见文献[1])

$$\begin{cases}\dot{\xi}=K\xi_0+Le\\ u=M\xi_0\end{cases},\quad \begin{cases}\dot{\xi}_1=\phi(\xi_1)+Ne\\ u=\gamma(\xi_1)\end{cases} \tag{B12),(B13}$$

式(B12)称为稳定器,式(B13)称为内模.

程代展　1970 年毕业于清华大学, 1985 年毕业于 Washington University, 获博士学位, 现为 Automation 及 Asian Journal of Control 副主编,中国科学院系统科学研究所研究员,博士生导师. 主要研究兴趣为非线性控制与数值方法.

(**CHENG Dai-Zhan**　He graduated from Tsinghua University in 1970, received Ph. D. degree from Washington Univesrsity, St. Louis. He is currently the Associate Editor of Automatica and Asian Journal of Control, professor with Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences. His research interests include nonlinear control and numerical method.)

董亚丽　1984 年毕业于新疆大学, 1999 年于新疆大学获硕士学位,副教授, 现为中国科学院系统科学研究所博士生. 主要研究兴趣为非线性控制.

(**DONG Ya-LI**　She graduated from Xinjiang University in 1984, received master degree from Xinjiang University in 1999, and is an associate professor with Xinjiang University. She is currently a Ph. D. candidate with the Institute of Systems Sciences, Chinese Academy of Sciences. Her research interests include control of nonlinear systems.)