第 29 卷 第 1 期
2003 年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 29, No. 1
Jan., 2003

不确定离散广义系统的 D 稳定鲁棒控制[1)]

胡 刚[1] 谢湘生[2]

[1](广东工业大学自动化学院 广州 510090)

[2](广东工业大学系统工程研究所 广州 510090)

(E-mail: hg@gdut.edu.cn)

摘 要 研究了具有圆盘区域极点约束的一类不确定离散广义系统的鲁棒控制问题.首先,研究了控制输入项不含扰动的不确定离散广义系统,提出了广义二次 D 镇定的概念,基于矩阵不等式和广义 Riccati 方程,给出了一种广义二次 D 镇定器的设计方法,所得到的结论能够实现研究目标;然后,讨论了控制输入项含有扰动的不确定离散广义系统,在一定的假设条件下,给出了期望状态反馈增益阵的存在条件及其解析表达式.最后,用数值示例说明所给方法的有效性及可行性.

关键词 不确定性,离散广义系统,D 稳定,鲁棒控制

中图分类号 TP273

Robust Control for Uncertain Discrete-Time Singular Systems with D-Stability

HU Gang[1] XIE Xiang-Sheng[2]

[1](*College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou* 510090)

[2](*Institute of System Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou* 510090)

(E-mail: hg@gdut.edu.cn)

Abstract This paper is concerned with the robust control problems for uncertain discrete-time singular systems with disk pole constraints. First of all, we discuss the uncertain discrete-time singular system without control input matrix perturbation. The concept of generalized quadratic D-stabilizability is put forward for uncertain discrete-time singular systems. A method of designing the state feedback controller is presented based on some matrix inequalities and the generalized Riccati equation, so that the singular closed-loop system is regular, causal, and satisfies that all finite closed-loop poles are located within a pre-assigned circular region for all admissible parameter uncertainties. Secondly, we discuss the uncertain discrete-time singular system with control input matrix perturbation. The condition for the existence of desired robust state feedback

1) 广东省自然科学基金(020163)资助

Supported by Natural Science Foundation of Guangdong Province(020163)

收稿日期 2001-07-05 收修改稿日期 2002-04-30

Received July 5, 2001; in revised form April 30, 2002

gain matrix is obtained; furthermore, the analytical expression of the desired robust state feedback gain matrix is also derived. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words　Uncertainty, discrete-time singular systems, D-stability, robust control

1　引言

在实际系统中，因各种不可避免的因素，如系统运行环境的变化、测量误差、模型近似化以及建模过程中条件的取舍等，都将出现一些不确定性参数. 这些不确定性参数可能会改变系统的结构，甚至可能造成系统的崩塌. 因此，不考虑不确定性因素的系统控制可能将难以获得理想的实际效果. 近年来，人们对不确定系统的区域极点配置问题进行了大量的研究，目的是对所有容许的不确定性，使不确定系统所有极点均位于复平面上的一个给定圆盘区域内（对连续系统，这个圆盘区域是指位于复平面左半平面内的圆形区域；对离散系统，这个圆盘区域则指位于圆心在原点的单位圆内的圆形区域），以保证系统具有一定的稳态和动态性能[1~4]. 然而对广义系统，在这方面的研究常常没有考虑不确定因素[5,6].

本文首次考虑了具有圆盘区域极点约束的一类不确定离散广义系统的鲁棒控制问题. 目的是针对控制输入项不含扰动和控制输入项含有扰动的不确定离散广义系统，寻找状态反馈控制律的设计方法，以便对于所有容许的参数不确定性，广义闭环系统是正则、因果的，且其有限极点配置在预先给定的圆盘中. 文中实例说明所提方法的有效性及可行性.

2　问题的描述及概念

首先考虑具有如下形式的不确定离散广义系统

$$E\boldsymbol{x}(k+1) = (A+\Delta A)\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$，$\boldsymbol{u}(k)\in R^m$ 分别是系统的状态向量、控制输入向量；$E\in R^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}E=n_1<n$（若 $n_1=n$，系统为通常的正常系统）；A，B 是已知的适当维数的常数阵，ΔA 为具时不变不确定参数的状态矩阵，其具体形式如下：

$$\Delta A = HFE_a \tag{2}$$

其中矩阵 $F\in R^{l\times k}$ 是未知的实有界函数且满足 $F^{\mathrm T}F\leqslant I_k$，这里 I_k 是 $k\times k$ 单位阵，H，E_a 是已知的适当维数的常数阵.

现对不确定离散广义系统(1)可作如下的状态反馈

$$\boldsymbol{u}(k) = K\boldsymbol{x}(k) \tag{3}$$

则其闭环系统为

$$E\boldsymbol{x}(k+1) = A_c(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{4}$$

其中 K 是状态反馈增益阵，$A_c=A+BK+HFE_a$.

定义 1. 如果闭环系统(4)是正则、因果的，且所有有限极点均位于预先给定的中心在 $\alpha+j0$、半径为 r 的圆盘 $D(\alpha,r)$ 内，即 $\sigma(E,A_c)\subset D(\alpha,r)$，其中 $\sigma(E,A_c)=\{s\mid \det(sE-A_c)=0,\ s\in C\}$，$|\alpha|+r<1$. 则称不确定离散广义系统(1)的闭环系统是 D 稳定的.

本文所讨论的 D 稳定鲁棒控制问题，其目的是设法找出线性状态反馈增益 $K\in R^{m\times n}$，

以使不确定离散广义系统(1)在状态反馈 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{x}(k)$作用下对所有容许的不确定性 ΔA 满足:

1)闭环系统(4)是正则、因果,其中 $A_c=A+BK+HFE_a$;

2)闭环系统(4)所有有限极点均位于预先给定的中心在 $\alpha+j0$、半径为 r 的圆盘 $D(\alpha,r)$ 内,即$\sigma(E,A_c)\subset D(\alpha,r)$,其中 $\sigma(E,A_c)=\{s\,|\det(sE-A_c)=0,s\in C\}$,$|\alpha|+r<1$.

下面给出离散广义系统正则、无脉冲,且其有限极点位于一给定圆形区域的充要条件.为此,先引入两个引理.

引理 1[7]. 离散广义系统

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k) \tag{5}$$

正则、因果且稳定的充要条件是,存在可逆对称阵 $P\in R^{n\times n}$使得两个不等式 $E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0$, $A^{\mathrm{T}}PA-E^{\mathrm{T}}PE<0$ 同时成立.

引理 2. 考虑离散广义系统

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(k+1)=(aE+bA)\boldsymbol{x}(k) \tag{6}$$

其中 $a,b\in C,b\neq 0$. 则存在以下两个性质:

1)两个系统的有限特征根满足

$$\lambda_{(6)}=a+b\lambda_{(5)} \tag{7}$$

2)离散广义系统(5)是正则、因果的当且仅当离散广义系统(6) 是正则、因果的.

定理 1. 离散广义系统 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)$是正则、因果,且满足

$$\sigma(E,A)\subset D(\alpha,r) \tag{8}$$

的充分必要条件是存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$,使得以下两个不等式同时成立:

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\quad A^{\mathrm{T}}PA-\alpha E^{\mathrm{T}}PA-\alpha A^{\mathrm{T}}PE+(\alpha^2-r^2)E^{\mathrm{T}}PE<0 \qquad (9),(10)$$

证明. 在引理 2 中,取 $a=-\frac{\alpha}{r},b=\frac{1}{r}$. 根据引理 1,不难知道离散广义系统(6) 是正则、因果且稳定的充要条件是存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$,使得式(9)和(10)同时成立.

注意到$|\alpha|+r<1$,由引理 2,离散广义系统(5) 是正则、因果的,且满足 $\sigma(E,A)\subset D(\alpha,r)$. 当且仅当离散广义系统(6) 是正则、因果且稳定的. 故定理 1 结论成立. 证毕.

根据上述定理,我们建立以下概念.

定义 2. 如果存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$,使得不确定离散广义系统(1)由状态反馈 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{x}(k)$作用下对所有容许的 ΔA,有不等式(9)和

$$A_c^{\mathrm{T}}PA_c-\alpha E^{\mathrm{T}}PA_c-\alpha A_c^{\mathrm{T}}PE+(\alpha^2-r^2)E^{\mathrm{T}}PE<0 \tag{11}$$

同时成立,则称不确定离散广义系统(1)的闭环系统是广义二次 D 镇定的,$\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$为不确定离散广义系统(1)的一个广义二次 D 镇定器.

3 主要结论

为了便于问题的讨论,我们分别研究控制输入矩阵不含扰动和控制输入矩阵含有扰动两种情形的不确定广义系统的 D 稳定鲁棒控制问题.

3.1 控制输入矩阵不含扰动的情形

定理 2. 若不确定离散广义系统(1)是广义二次 D 镇定的,则其一定是正则、因果,且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$内,即 $\sigma(E,A)\subset D(\alpha,r)$.

推论 1. 取 $A_{c\alpha}=A_c-\alpha E$，若存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$，使得不确定离散广义系统(1)由状态反馈 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{x}(k)$ 作用下对所有容许的 ΔA，有不等式(9)和

$$A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{c\alpha}-r^2E^{\mathrm{T}}PE<0 \tag{12}$$

同时成立，则不确定离散广义系统(1)的闭环系统是正则、因果，且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$ 内.

定理 3. 取 $A_{b\alpha}=A+BK-\alpha E$，如果存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 和常数 $\varepsilon>0$，使下列不等式同时成立：

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\quad \varepsilon H^{\mathrm{T}}PH<I,$$
$$A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}[P+PH(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1}H^{\mathrm{T}}P]A_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a-r^2E^{\mathrm{T}}PE<0 \tag{13}$$

则不确定离散广义系统(1)的闭环系统是正则、因果，且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$ 内.

证明. 注意到 $A_{c\alpha}=A_{b\alpha}+HFE_a$ 和 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I_k$. 我们首先证明

$$A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{c\alpha}\leqslant A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}[P+PH(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1}H^{\mathrm{T}}P]A_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a \tag{14}$$

令 $R=[A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}PH(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1/2}-E_a^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{1/2}]$，则有

$$\begin{aligned}0\leqslant RR^{\mathrm{T}}&=A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}PH(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1}H^{\mathrm{T}}PA_{b\alpha}-A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}PHFE_a-\\&E_a^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}PA_{b\alpha}+E_a^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)FE_a\leqslant\\&A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}PH(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1}H^{\mathrm{T}}PA_{b\alpha}-A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{c\alpha}+A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a.\end{aligned}$$

因而式(14)成立. 于是由条件所给不等式，知

$$A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{c\alpha}-r^2E^{\mathrm{T}}PE\leqslant A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}[P+PH(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1}H^{\mathrm{T}}P]A_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a-r^2E^{\mathrm{T}}PE<0.$$

根据推论 1，知相应闭环系统是正则、因果，且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$ 内.　证毕.

引理 3. 如果 $P,Q\in R^{n\times n}$ 是可逆对称矩阵，M 是适当维数矩阵，则 $Q-M^{\mathrm{T}}PM$ 可逆的充要条件是 $P^{-1}-MQ^{-1}M^{\mathrm{T}}$ 可逆，且 $(P^{-1}-MQ^{-1}M^{\mathrm{T}})^{-1}=P+PM(Q-M^{\mathrm{T}}PM)^{-1}M^{\mathrm{T}}P$.

定理 4. 设 $Q\in R^{n\times n}$，$R\in R^{m\times m}$ 均为正定对称矩阵，如果存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 和常数 $\varepsilon>0$，使下列公式

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\ \varepsilon H^{\mathrm{T}}PH<I \tag{15}$$

$$(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)-r^2E^{\mathrm{T}}PE+\varepsilon^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a+Q=0 \tag{16}$$

同时成立，则不确定离散广义系统(1)的闭环系统是广义二次 D 镇定的，且相应的状态反馈增益矩阵 K 满足

$$K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E) \tag{17}$$

类似地，我们称式(16)为广义 Riccati 方程.

证明. 由条件知，存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 和常数 $\varepsilon>0$，使不等式(15)与式(16)同时成立. 于是，根据定理 2 的推导过程，不难发现

$$\begin{aligned}&A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{c\alpha}-r^2E^{\mathrm{T}}PE\leqslant A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}A_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}E_a^{\mathrm{T}}E_a-r^2E^{\mathrm{T}}PE\leqslant\\&A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}A_{b\alpha}-(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)-Q\end{aligned} \tag{18}$$

令 $U=(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)$，即有 $A-\alpha E=(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U$，

故 $(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)=U^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U=$
$U^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}U+U^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U.$

考虑到
$$K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E),$$
即
$$K=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}U.$$

而由 $A-\alpha E=(P^{-1}+BR^{-1}B^{\mathrm{T}}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U$，可知 $(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U=(A-\alpha E)-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}U$，

所以有 $A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}A_{b\alpha}=[(A-\alpha E)-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}U](P^{-1}-\varepsilon HH)^{-1}[(A-\alpha E)-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}U]=[(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U]^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}[(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U]=U^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U$，故

$$A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}A_{b\alpha}-U^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})U=0.$$

因而，由式(18)，有 $A_{c\alpha}^{\mathrm{T}}PA_{c\alpha}-r^2E^{\mathrm{T}}PE\leqslant-[Q+K^{\mathrm{T}}RK]\leqslant-Q<0$. 根据定理 3，不确定广义系统(1)的闭环系统是广义二次 D 镇定的. 证毕.

3.2 控制输入矩阵含有扰动的情形

考虑如下控制输入系数矩阵含有扰动的离散广义系统

$$Ex(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k) \tag{19}$$

其中 $\Delta B=HFE_b$，E_b是已知的适当维数的满秩矩阵，其它记号同系统(1).

这里研究的目的是寻找线性状态反馈增益 $K\in R^{m\times n}$，以使不确定离散广义系统(19)在状态反馈 $u(k)=Kx(k)$作用下对所有容许的不确定参数 ΔA，其相应的闭环系统是正则、因果，且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$内.

定理 5. 如果存在可逆对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$、正定对称矩阵 $Q\in R^{n\times n}$和常数$\varepsilon>0$，使

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant0,\ P^{-1}>\varepsilon HH^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

$$A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}A_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}(E_a+E_bK)^{\mathrm{T}}(E_a+E_bK)-r^2E^{\mathrm{T}}PE+Q=0 \tag{21}$$

同时成立，则不确定离散广义系统(19)的闭环系统是正则、因果，且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$内.

定理 6. 对给定的$\varepsilon>0$ 和正定对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 及 $Q\in R^{n\times n}$，当满足 $P^{-1}>\varepsilon HH^{\mathrm{T}}$ 及 $-T+N^{\mathrm{T}}M^{-1}N\geqslant0$ 时，可取状态反馈增益矩阵 $K=-M^{-1}N+M^{-1/2}VU$，使得不确定离散广义系统(19)的闭环系统是正则、因果，且所有有限极点均位于圆盘 $D(\alpha,r)$内，其中 $V\in R^{m\times m}$为一正交矩阵，

$$M=B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}B+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_b,$$
$$N=B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_a,$$
$$T=(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)+\varepsilon^{-1}E_aE_a-r^2E^{\mathrm{T}}PE+Q.$$

证明. 由于 $P^{-1}>\varepsilon HH^{\mathrm{T}}$，则 $P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}}$ 为正定对称矩阵，根据引理 3，知$(\varepsilon^{-1}I-H^{\mathrm{T}}PH)^{-1}$必然存在. 考虑到 $A_{b\alpha}=A+BK-\alpha E$，则

$$\begin{gathered}A_{b\alpha}^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}A_{b\alpha}+\varepsilon^{-1}(E_a+E_bK)^{\mathrm{T}}(E_a+E_bK)-r^2E^{\mathrm{T}}PE+Q=\\K^{\mathrm{T}}[B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}B+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_b]K+K^{\mathrm{T}}[B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_a]+\\{}[(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}B+\varepsilon^{-1}E_a{}^{\mathrm{T}}E_b]K+(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)+\\\varepsilon^{-1}E_aE_a-r^2E^{\mathrm{T}}PE+Q\end{gathered} \tag{22}$$

为方便起见，令

$$M=B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}B+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_b,$$
$$N=B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_a,$$
$$T=(A-\alpha E)^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}(A-\alpha E)+\varepsilon^{-1}E_aE_a-r^2E^{\mathrm{T}}PE+Q.$$

由于 E_b满秩，知 $M=B^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\varepsilon HH^{\mathrm{T}})^{-1}B+\varepsilon^{-1}E_b{}^{\mathrm{T}}E_b>0$，于是由式(22)可知，式(21)成立的充要条件是

$$(M^{1/2}K+M^{-1/2}N)^{\mathrm{T}}(M^{1/2}K+M^{-1/2}N)=-T+N^{\mathrm{T}}M^{-1}N \tag{23}$$

当 K 存在时，必存在 $U\in R^{m\times n}$，使得 $U^{\mathrm{T}}U=-T+N^{\mathrm{T}}M^{-1}N\geqslant0$.

根据文献[8]，式(23)成立的充要条件是存在正交矩阵 $V\in R^{m\times m}$，有 $M^{1/2}K+M^{-1/2}N=VU$，即 $K=-M^{-1}N+M^{-1/2}VU$. 于是结论成立. 证毕.

4　数值实例

对于不确定离散广义系统(1)，考虑

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-0.1&0.8&0.01\\0.9&-1&0.2\\-0.15&-0.02&0.31\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0.75\\-0.8&1.2\\0.3&0.81\end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix}1.5&0.86\\1.2&0.95\\1.3&2.1\end{bmatrix},\quad E_a=\begin{bmatrix}0.01&0.005&0.01\\0.018&0.003&0.001\end{bmatrix},$$

对于正定对称矩阵 $R=\begin{bmatrix}0.21&-0.09\\-0.09&0.3\end{bmatrix}$及 $Q=\begin{bmatrix}0.07843405&0.07994851&-0.01024226\\0.07994851&0.17341176&-0.00121285\\-0.01024226&-0.00121285&0.01785886\end{bmatrix}$，

取 $r=0.78$，$\alpha=0.009$，则存在 $\varepsilon=1.5$ 和可逆对称矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.00047694&-0.00014866&4.55126580\\-0.00014866&0.00061801&-7.19761711\\4.55126580&-7.19761711&2.78432924\end{bmatrix}\times 10^3,$$

使得不等式(15)和(16)同时成立. 根据定理 4，可知不确定离散广义系统(1)的闭环系统是广义二次 D 镇定的，且相应的状态反馈增益矩阵 K 满足

$$K=\begin{bmatrix}0.43055694&-1.03734115&0.16471546\\-0.62602877&-0.06154995&0.19643071\end{bmatrix}.$$

5　结论

本文对于不确定离散广义系统，首次提出了广义二次 D 镇定的概念，并分别针对控制输入项不含扰动情形和控制输入项含有扰动情形，利用矩阵不等式和广义 Riccati 方程，研究了具有圆盘区域极点约束的一类不确定离散广义系统的鲁棒控制器问题，给出了广义二次 D 镇定器的设计方法.

References

1　Haddad W M, Bernstein D S. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(1): 54～69

2　Garcia G, Bernussou J. Pole assignment for uncertain system in a specified disk by state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 995, **40**(1): 184～190

3　Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, **32**(5): 423～427

4　Wang Z D, Tang G Q, Chen X M. Robust controller design for uncertain linear systems with circular pole constraints. *International Journal of Control*, 1996, **65**(6): 1045～1054

5　Fletcher L R. Pole assignment and controllability subspaces in descriptor systems. *International Journal of Control*, 1997, **66**(5):677～709

6 Cobb D. Feedback and pole placement in descriptor variable systems. *International Journal of Control*, 1981, **33**(6): 1135～1146

7 Xu S Y, Yang C W. Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 1999, **35**(9):1613～1617

8 Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverse: Theory and Applications. London: John Wiley and Sona Inc., 1974

9 Xu S Y, Qi S Y, Yang C W. Pole assignment in a specified circular region for uncertain singular systems. *Information and Control*, 1999, **28**(3):168～171(in Chinese)

胡 刚 2001年于华南理工大学自动控制系获工学博士学位，现为广东工业大学副教授. 主要研究兴趣为广义系统和时滞系统稳定与控制.

(**HU Gang** Received the Ph. D. degree from Automatic Control Engineering Department of South China University of Technology in 2001. He is currently an associate professor in Guangdong University of Technology. His main research interests are stable and control of singular systems and time-delay systems.)

谢湘生 1997年于华南理工大学获博士学位，现为广东工业大学系统工程研究所教授. 目前的研究兴趣为广义系统和滞后系统的基本理论与控制.

(**XIE Xiang-Sheng** Received the Ph. D. degree from Automatic Control Engineering Department of South China University of Technology in 1997. He is a professor in Guangdong University of Technology. His currently research interests are basic theory and control of singular systems and time-delay systems.)