第28卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 28, No. 2
2002年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 2002

短文

一种基于 H_∞ 理论的鲁棒预测控制方法[1)]

陈 虹[1] 刘志远[2]
[1](吉林大学控制科学与工程系 长春 130025)
[2](哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150001)
(E-mail: chenh@jlu.edu.cn zhiyuan@public.hr.hl.cn)

摘 要 融合 H_∞ 控制的鲁棒概念和预测控制的滚动优化原理，提出了一种全新的约束动态对策预测控制方法. 对有状态和控制约束的不确定线性系统，证明了闭环系统的鲁棒稳定性并给出了鲁棒性条件. 该方法同时具有 H_∞ 控制和预测控制的优点：鲁棒性和显式处理约束的能力.

关键词 预测控制，H_∞ 控制，约束系统，鲁棒稳定性
中图分类号 TP271.74

AN H_∞ APPROACH TO ROBUST MODEL PREDICTIVE CONTROL

CHEN Hong[1] LIU Zhi-Yuan[2]
[1](*Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun* 130025)
[2](*Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001)
(E-mail: chenh@jlu.edu.cn zhiyuan@public.hr.hl.cn)

Abstract By combining the robustness consideration of H_∞ control with the moving horizon principle of MPC, this paper presents a novel game approach to constrained model predictive control. Robust closed-loop stability is proven for uncertain linear system with input and state constraints, and robustness conditions are also given. The approach has advantages of both H_∞ control and MPC: robustness and ability to handle constraints explicitly.

Key words Model predictive control, H_∞ control, constrained systems, robust stability

1 引言

预测控制(缩写 MPC)的主要优点是在线处理控制量和状态量的约束并通过滚动优化使其动态满足. 近年来，MPC 的理论研究尤其在名义稳定性方面取得了重大进展[1,2]. 工业

1) 国家自然科学基金(69804004)、黑龙江省自然科学基金资助
收稿日期 1999-12-03 收修改稿日期 2000-09-20

控制中模型不确定性是不可避免的. 早期的 MPC 算法没有考虑模型不确定性，或仅将不确定性的影响假设为叠加干扰且在预测时域内保持不变. 近期开发的鲁棒 MPC 算法多数假设不确定系统属于某个给定的有限模型集合或假设不确定参数在有限域内变化（如文献[3～5]）. H_∞理论为控制系统的鲁棒分析与设计提供了较完美的理论基础. 基于 H_∞理论的预测控制便成为一种使线性时变系统鲁棒稳定的捷径（如文献[6,7]）. 但这些讨论都没有涉及系统的控制与状态约束. 本文融合 H_∞控制的鲁棒概念和预测控制的滚动优化原理，研究一种约束动态对策 MPC 方法，以获取二者的长处.

2 约束不确定线性系统的 H_∞控制及鲁棒不变域

考虑初始条件为 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 的离散线性系统

$$\boldsymbol{x}(i+1)=A\boldsymbol{x}(i)+B\boldsymbol{u}(i)+G\boldsymbol{w}(i),\ i\geqslant 0,\quad \boldsymbol{z}(i)=\begin{bmatrix}H\boldsymbol{x}(i)\\ \boldsymbol{u}(i)\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(i)\in\Re^n$ 为状态变量，$\boldsymbol{u}(i)\in\Re^m$ 为控制输入变量，$\boldsymbol{w}(i)\in\Re^p$ 为外部输入变量，$\boldsymbol{z}(i)\in\Re^q$ 为被控变量，A,B,G,H 为具有相应维数的实矩阵且假设

A1) (A,B)可稳定，(A,H)可测.

设系统(1)的控制和状态约束分别为 $\boldsymbol{u}(i)\in U$ 和 $\boldsymbol{x}(i)\in X$，$i=0,1,2,\cdots$，且假设

A2) $U\subset\Re^m$ 和 $X\subseteq\Re^n$ 是凸的，点(0,0)包含在 $U\times X$ 的内部，

即允许的控制序列为$\{\boldsymbol{u}(i)\in U,\ i=0,1,2,\cdots\}$. 记所有允许控制序列的集合为 $\mathscr{U}$，所有初始时刻为 k、长度为 $N+1$ 的允许控制序列的集合为 $\mathscr{U}[k,k+N]$. 又设不确定性 Δ 影响系统的方式为 $\boldsymbol{w}=\Delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}$，其中 $\Delta(\boldsymbol{x})$是光滑的且满足 $\|\Delta(\boldsymbol{x})\|\leqslant d_{\max}<1$. 对给定初始值 $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}$ 及控制序列 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{U}[k,k+N]$，允许的外部输入序列为$\{\boldsymbol{w}(i),\ i\in[k,k+N]\}$，其沿着系统(1)的轨迹满足 $\|\boldsymbol{w}(i)\|^2\leqslant d_{\max}^2(\|H\boldsymbol{x}(i)\|^2+\|\boldsymbol{u}(i)\|^2)$，$i\geqslant k$. 所有允许的外部输入序列的集合记为 $\mathscr{W}(\boldsymbol{x},k,\boldsymbol{u})$.

暂不考虑系统约束，上述不确定系统鲁棒综合问题可由线性 H_∞理论解决[8]. 如果假设

A3) Riccati 方程 $P=H^{\mathrm T}H+A^{\mathrm T}P\Lambda^{-1}A$，$\Lambda:=I+(BB^{\mathrm T}-GG^{\mathrm T})P$ 有一个正定解 P.

且满足 $I-G^{\mathrm T}PG>0$，则系统(1)的无限时域动态对策问题$\min\limits_{u}\max\limits_{w}\sum\limits_{i=0}^{\infty}(\|\boldsymbol{z}(i)\|^2-\|\boldsymbol{w}(i)\|^2)$有解：$\boldsymbol{u}^\infty(x)=-B^{\mathrm T}P\Lambda^{-1}A\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{w}^\infty(\boldsymbol{x})=G^{\mathrm T}P\Lambda^{-1}A\boldsymbol{x}$. 将反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^\infty(\boldsymbol{x})$作用于系统，则对任何允许的 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}_0,0,\boldsymbol{u}^\infty)$有

$$\|\boldsymbol{x}(i)\|_P^2\geqslant(1-d_{\max}^2)(\|H\boldsymbol{x}(i)\|^2+\|\boldsymbol{u}^\infty(\boldsymbol{x}(i))\|^2)+\|\boldsymbol{x}(i+1)\|_P^2,\ i\geqslant 0 \tag{2}$$

因为$d_{\max}<1$，则 $\|\boldsymbol{x}\|_P^2$ 是系统 $\boldsymbol{x}(i+1)=(A-BB^{\mathrm T}P\Lambda^{-1}A)\boldsymbol{x}(i)+G\boldsymbol{w}(i)$，$i\geqslant 0$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$的一个 Lyapunov 函数，表明系统对所有考虑的不确定性是鲁棒渐近稳定的.

考虑有约束的情况. 定义点 $\boldsymbol{x}=0$ 的一个邻域 $\Omega:=\{\boldsymbol{x}\in\Re^n\mid\|\boldsymbol{x}\|_P^2\leqslant\alpha,\alpha>0\}$满足条件

$$1)\ \Omega\subseteq X,\qquad 2)\ \boldsymbol{u}^\infty(\boldsymbol{x})\in U,\ \forall\ \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

由式(2)知，Ω 是约束系统(1)在线性 H_∞控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^\infty(\boldsymbol{x})$作用下的一个鲁棒不变域. 显然，对任何 $P>0$，Ω 是凸的. 由于点(0,0)包含在 $U\times X$ 的内部，故 Ω 非空.

3 动态对策 MPC 方法及鲁棒稳定性

一般而言，约束的存在使线性 H_∞ 控制律的鲁棒稳定域很小. 为此本文提出一种基于 H_∞ 理论的预测控制. 设系统(1)在 k 时刻的初始值为 $\boldsymbol{x}(k)$，定义有限时域目标函数为

$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k,k+N)=\sum_{i=k}^{k+N-1}(\|\boldsymbol{z}(i;\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\|^2-\|\boldsymbol{w}(i)\|^2)+\|\boldsymbol{x}(k+N;\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\|_P^2 \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}(i;\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)$ 和 $\boldsymbol{z}(i;\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)$，$i\in[k,k+N-1]$ 为系统(1)在给定允许输入对 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ 作用下的解. 于是，动态对策问题的数学描述为

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\mathscr{U}[k,k+N-1]}\ \max_{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u})} J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k,k+N) \tag{4}$$

其约束条件为

$$\boldsymbol{x}(i;\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\in X,\quad i\in[k,k+N] \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}(k+N;\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\in\Omega \tag{6}$$

若上述约束动态对策问题有解，则对所有考虑的不确定性，系统轨迹的末端都将位于不变域 Ω 内. 给定预测时域 $N>0$，假设对某一给定的初始值 $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}\in\Re^n$ 至少存在一允许的控制序列 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{U}[k,k+N-1]$，使得对任何 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x},k,\boldsymbol{u})$，系统(1)的解满足状态约束(5)和终端约束(6). 这样，我们就能定义一标量函数

$$S(\boldsymbol{x},k,k+N):=\min_{\boldsymbol{u}\in\mathscr{U}[k,k+N-1]}\ \max_{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x},k,\boldsymbol{u})} J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},k,k+N) \tag{7}$$

记所有这样的初始值的集合为 $IC(N)$. 已知 $U\times X$ 是凸的，Ω 也是凸的，且 $J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k,k+N)$ 对 $\boldsymbol{u}$ 来说是严格凸的. 若对某一给定的预测时域 $N>0$，$IC(N)$ 是非空的，则对于任意给定的 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u})$，上述约束动态对策问题的最小化部分有唯一解[8]. 即存在一允许控制序列 $\{\boldsymbol{u}^*(i;\boldsymbol{x}(k),k,k+N),\ i\in[k,k+N-1]\}$，简记为 $\boldsymbol{u}_k^*$，使得

$$S(\boldsymbol{x}(k),k,k+N)=\max_{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_k^*)} J(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k,k+N) \tag{8}$$

由 MPC 的基本原理，定义 k 时刻的控制为 $\boldsymbol{u}^*(k):=\boldsymbol{u}^*(k;\boldsymbol{x}(k),k,k+N)$，相应的闭环系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}^*(k)+G\boldsymbol{w}(k),\quad k\geqslant 0,\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{9}$$

约束的存在使系统(9)具有非线性动态，故将以 Lyapunov 理论为基础展开稳定性讨论. 可以证明，$IC(N)$ 对任何 $N>0$ 是非空的且 $\boldsymbol{x}=0$ 是系统(9)的一个平衡点[9].

定理 1. 如果假设 A1)～A3)成立，则预测控制系统(9)对所有考虑的不确定性是鲁棒渐近稳定的，且 $IC(N)$ 是系统的一个吸收域.

定理 2. 如果假设 A1)～A3)成立且 $\mathrm{rank}(H)=n$，则预测控制系统(9)对所有考虑的不确定性是鲁棒指数稳定的.

在证明定理 1 和定理 2 之前，先给出以下引理.

引理 1. 如果 $\boldsymbol{x}(k)\in IC(N)$，则 $S(\boldsymbol{x}(k),k,k+N)\geqslant S(\boldsymbol{x}(k),k,k+N+1)$.

引理 2. 如果 $\boldsymbol{x}(k)\in IC(N)$，则对系统(9)有

$$S(\boldsymbol{x}(k),k,k+N)\geqslant S(\boldsymbol{x}(k+1),k+1,k+N)+\|H\boldsymbol{x}(k)\|^2+\|\boldsymbol{u}^*(k)\|^2-\|\boldsymbol{w}(k)\|^2 \tag{10}$$

引理 1 和 2 的证明见附录. 由引理 1 和引理 2 导出，如果约束动态对策问题(3)～(6)的最小化部分在 $k=0$ 时有解，则在 $k>0$ 时均有解. 因此，对任何 $k\geqslant 0$ 预测控制都是有定义的.

定理 1 的证明. 对系统(9)定义一标量函数 $V(\boldsymbol{x}):=S(\boldsymbol{x},k,k+N)$，则由引理 1 和引理 2 得对 $k\geqslant 0$ 和任何允许的 $\boldsymbol{w}(k)$有

$$V(\boldsymbol{x}(k))-V(\boldsymbol{x}(k+1))\geqslant(1-d_{\max}^2)(\|H\boldsymbol{x}(k)\|^2+\|\boldsymbol{u}^*(k)\|^2) \tag{11}$$

由 $d_{\max}<1$ 得对所有考虑的不确定性，$V(\boldsymbol{x})$沿系统(9)是不增的. 此外，$V(\boldsymbol{x})$还有如下特性[9]：如果 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，则 $V(\boldsymbol{x})\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_P^2$；如果 $\boldsymbol{x}\in IC(N)$，则 $V(\boldsymbol{x})\geqslant\|\boldsymbol{x}\|_\Pi^2$，$\Pi>0$. 故 $V(\boldsymbol{x})$是系统(9)的一个 Lyapunov 函数，表明其平衡点 $\boldsymbol{x}=0$ 对所有考虑的不确定性是鲁棒稳定的. 因 $d_{\max}<1$ 和 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，所以式(11)表明当 $k\to\infty$时 $\|H\boldsymbol{x}(k)\|^2+\|\boldsymbol{u}^*(k)\|^2\to 0$，即 $\boldsymbol{u}^*(k)\to 0$. 又因(A,H)是可测的，则有当 $k\to\infty$时 $\boldsymbol{x}(k)\to 0$. 故系统(9)的平衡点 $\boldsymbol{x}=0$ 对所有考虑的不确定性是鲁棒渐近稳定的. 再则，用与文献[10]相同的方法可以证明 $IC(N)$是一个吸收域.　　证毕.

定理 2 的证明(略). 由式(11)和 $\mathrm{rank}(H)=n$ 可直接导出.

4　结束语

本文讨论了一种基于 H_∞理论的约束动态对策 MPC 方法及其闭环鲁棒稳定性. 该方法融合了 H_∞控制和预测控制的优点：鲁棒性和显式处理约束的能力. 与文献[9]相比，简化并完善了控制系统的构成及闭环鲁棒稳定性的证明.

参　考　文　献

1 Lee J H. Recent advances in model predictive control and other related areas. In: Kantor J C, Garcia C E (eds). 5th Int. Confer. Chemical Process Control, AIChE: CACHE, 1997. 201～216

2 Chen H, Allgower F. Nonlinear model predictive control schemes with guaranteed stability. In: Berber R, Kravaris (eds). Model Based Process Control. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 465～494

3 Michalska H, Mayne D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1993, **38**(11):1623～1633

4 Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10):1361～1379

5 Scokaert P O M, Mayne D Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1998, **43**(8):1136～1142

6 Tadmor G. Receding horizon revisited: An easy way to robustly stabilize an LTV system. *System & Control Letters*, 1992, **18**:285～299

7 Lall S, Glover K. A game theoretic approach to moving horizon control. In: Advances in Model-Based Predictive Control. London: Oxford University Press, 1994. 131～144

8 Basar T, Bernhard P. H_∞ Optimal and Related Minimax Design Problems. Boston: Birkhaeuser Verlag, 1991

9 Chen H, Scherer C W, Allgower F. A robust model predictive control scheme for constrained linear systems. In: Proc. IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, Corfu, 1998. 60～65

10 Chen H, Allgower F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 1998, **34**(10):1205～1217

附录 A

引理 1 的证明.

若 $\boldsymbol{x}(k)\in IC(N)$，则对任何允许的外部输入 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_k^*)$ 有 $\boldsymbol{x}(i;\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\in X$，$i\in[k,k+N-1]$ 和 $\boldsymbol{x}(k+N;\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\in\Omega$. 考虑预测时域为 $N+1$ 的情况，选择一允许控制序列 $\boldsymbol{u}_a\in\mathscr{U}[k,k+N]$如下：

$$\boldsymbol{u}_a(i)=\begin{cases}\boldsymbol{u}^*(i;\boldsymbol{x}(k),k,k+N), & i\in[k,k+N-1]\\ \boldsymbol{u}^\infty(\boldsymbol{x}(k+N;\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)), & i=k+N\end{cases}.$$

取任一允许的 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_k^*)$，在其末端与另一允许 $\boldsymbol{w}_0\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k+N;\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k),k+N,\boldsymbol{u}^\infty)$的第一个元素连接构成一新的外部输入记为 $\boldsymbol{w}_a$. 显然 $\boldsymbol{w}_a\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_a)$. 由 $\boldsymbol{x}(k+N;\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k)\in\Omega$ 得，对所构造的允许输入对$(\boldsymbol{u}_a,\boldsymbol{w}_a)$有 $\max\limits_{\boldsymbol{w}_a\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_a)} J(\boldsymbol{u}_a,\boldsymbol{w}_a,\boldsymbol{x}(k),k,k+N+1)\leqslant \max\limits_{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_k^*)} J(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}(k),k,k+N)$. 由此可得结果. 证毕.

附录 B

引理 2 的证明.

取任一允许的外部输入 $\boldsymbol{w}_1\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k+1),k+1,\boldsymbol{u}_k^*)$，将允许的 $\boldsymbol{w}(k)$连接在其首端，记为 $\boldsymbol{w}_b$. 显然 $\boldsymbol{w}_b\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k),k,\boldsymbol{u}_k^*)$. 由式(9)可得，对所构造的允许输入对$(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w}_b)$有

$$S(\boldsymbol{x}(k),k,k+N)\geqslant J(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w}_b,\boldsymbol{x}(k),k,k+N)=J(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{x}(k+1),k+1,k+N)+\\ \|H\boldsymbol{x}(k)\|^2+\|\boldsymbol{u}^*(k)\|^2-\|\boldsymbol{w}(k)\|^2,$$

其对任何 $\boldsymbol{w}_1\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k+1),k+1,\boldsymbol{u}_k^*)$都成立，故

$$S(\boldsymbol{x}(k),k,k+N)\geqslant\|H\boldsymbol{x}(k)\|^2+\|\boldsymbol{u}^*(k)\|^2-\|\boldsymbol{w}(k)\|^2+\\ \max_{\boldsymbol{w}_1\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x}(k+1),k+1,\boldsymbol{u}_k^*)} J(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{x}(k+1),k+1,k+N). \tag{B1}$$

应该指出，上式只用到 $\boldsymbol{u}_k^*$ 在$[k+1,k+N-1]$域的值，其属于 $\mathscr{U}[k+1,k+N-1]$是允许的，但并不一定是最优的，因此有 $S(\boldsymbol{x}(k+1),k+1,k+N)\leqslant \max\limits_{\boldsymbol{w}_1\in W(\boldsymbol{x}(k+1),k+1,\boldsymbol{u}_k^*)} J(\boldsymbol{u}_k^*,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{x}(k+1),k+1,k+N)$. 结合式(B1)可得结果. 证毕.

陈 虹 教授，1983～1986 年在浙江大学过程控制及自动化仪表专业获工学学士和硕士学位，1997 年以最高荣誉(mit Auszeichnung)在德国斯图加特大学获工学博士学位. 主要研究领域为预测控制、最优控制、鲁棒控制及非线性控制的理论与应用.

刘志远 教授，1978～1982 年在浙江丝绸工学院获工学学士学位，1986～1993 年在哈尔滨工业大学获工学博士学位，1993～1994 年在哈尔滨工业大学机械工程博士后流动站工作. 主要研究领域为机器人控制、预测控制及高精度伺服控制方面的研究.