第 28 卷 第 3 期
2002 年 5 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 28, No. 3
May, 2002

短文

混合系统的稳定性分析

张 伟 孙优贤
（浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027）

摘 要 研究了混合系统的稳定性问题. 首先，对于混合系统给出了一种一般的模型，该模型能够描述混合状态的跳变现象. 然后，定义了一种辅助函数作为系统能量的一种度量. 基于该模型和辅助函数，得到了混合系统稳定性判定的一些新结果. 这些结果给出了在离散状态改变时，在由于连续状态的跳变而引起的系统能量增加的情况下，混合系统仍保持稳定的充分条件. 最后，给出了一种能量函数的寻找方案，并利用一个仿真实例验证了该方案的有效性.

关键词 混合系统，稳定性，弱类-李雅普诺夫函数
中图分类号 TP271

STABILITY ANALYSIS OF HYBRID SYSTEMS

ZHANG Wei SUN You-Xian
(*Institute of Industrial Process Control of Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract In this paper, the stability of hybrid systems is studied. At first, we give a general model for hybrid systems which can describe the jump phenomena of the hybrid states. Next, an auxiliary function is defined as the abstract measure of the system energy. Based on this model and the function, some new sufficient conditions for the stability of hybrid systems are established. Due to the jump of the hybrid states, the energy of the system may be increasing. In this case the stability of hybrid systems can be guaranteed by these new conditions. We then provide one method to search for the auxiliary function. At the end of the paper, the effectiveness of the method is illustrated by the simulation example.

Key words Hybrid systems, stability, weak Lyapunov-like function

1 引言

混合动态系统同时包含离散事件系统(DES)和连续变量系统(CVS)，系统的状态为一状态对——连续状态和离散状态. 系统的演化由时间和事件共同驱动，并可由一组基于连续

收稿日期 1999-10-11 收修改稿日期 2000-03-10

变量和离散变量的运动方程来描述.

本文考虑混合系统的稳定性问题.近来,文[1,2]研究了这一问题,并得到了一些重要的结果.这些结果要求当系统切换到相同的离散状态时系统的能量递减.文[3]通过引入几个连续的辅助函数得出了类似于文[1,2]中的结果.与文[1,2]有所不同,文[3]中系统的稳定性是由辅助函数序列的行为确定的,而非由对应于不同的离散状态特定的辅助函数的切换序列加以确定.本文首先对于混合系统给出一种一般的模型,该模型能够描述一大类混合系统.这一模型与文[1～3]中的模型不同,它能够很好地描述混合状态的跳变现象.然后,我们定义了一种新的辅助函数作为系统能量的一种度量.基于该模型和函数,得到了一些新的稳定性结果.这些结果给出了当系统的离散状态发生改变时,在由于连续状态的跳变而导致系统的能量增加的情况下,混合系统仍保持稳定的充分条件.

2　混合模型

定义 1. 一个混合系统由下式描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),m(t)),\quad m(t^{+})=\Phi(\boldsymbol{x}(t),m(t)) \tag{1),(2}$$

$$\boldsymbol{x}(t^{+})=g(\boldsymbol{x}(t),m(t)) \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^{n}$ 是连续状态, $m\in M=\{m_1,\cdots,m_K\}$是离散状态,$H$ 是混合状态空间 $R^{n}\times M$. 假设每一个 $f(\boldsymbol{x},\cdot)$ 是连续的. $m(t^{+})$和 $\boldsymbol{x}(t^{+})$表示在 t 时刻变迁发生后系统的离散状态和连续状态.混合系统(1)～(3)的初始状态为$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{m}_0)\in H_0$,其中 $H_0\subseteq H$ 表示初始条件集合.定义切换集为

$$S_{ij}=\{\boldsymbol{x}\in R^{n}\,|\,\boldsymbol{m}_j=\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m}_i)\} \tag{4}$$

通常 S_{ij}为超曲面 $s_{ij}(\boldsymbol{x})=0$ 的集合,例如,超平面 $s_{ij}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\xi=0$,其中 $\boldsymbol{v}$ 是常值法向量,ξ 为一常量.系统的状态演变描述如下:初始时刻为 t_0,初始状态为$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{m}_i)$,连续轨线按照 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m}_i)$进行演化,如果 $\boldsymbol{x}$ 在时刻 t_1 到达某一 $\boldsymbol{x}_1\in S_{ij}$,那么系统状态根据式(2)和(3)变为$(\boldsymbol{m}_j,\boldsymbol{x}(t_1^{+}))$,然后从这一状态出发按照 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{m}_j)$继续演化.对于由式(1),(2)和(3)来描述的混合系统,如果对于每一个 $\boldsymbol{x}\in R^{n}$,只有一个 $\boldsymbol{m}_i\in M$ 是可能的,那么我们得到一个切换系统;如果存在一些 $\boldsymbol{x}\in R^{n}$,对其可能有几个离散状态与之对应,那么这一系统称为混合系统.为了分析混合系统的稳定性,我们限定离散状态在有限的时间之内只能发生有限次切换,以避免滑模运动的产生[3].不失一般性,假设系统的平衡点位于连续状态空间的原点.这意味着$f(0,\boldsymbol{m}_i)=0,\forall\ \boldsymbol{m}_i\in M$, 同时假设 $g(\boldsymbol{x}(t),\cdot)$ 是 R^{n} 上的线性函数,即

$$\boldsymbol{x}(t^{+})=A_{ij}\boldsymbol{x}(t)+B_{ij} \tag{5}$$

其中 A_{ij}和 B_{ij}分别是常值矩阵,指标 i 和 j 表示发生切换的相应的离散状态.

现在引入一些文[1]中的标记.从一个初始状态$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{m}_0)\in H_0$ 出发,离散状态的演变可用以下的切换序列进行描述

$$\Delta_{(x_0,m_0)}=(i_0,t_0),(i_1,t_1),\cdots,(i_n,t_n),\cdots \tag{6}$$

其中 $i_k\in M,\ k\in N=\{0,1,2,\cdots\},\ t_k<t_{k+1},\ i_k\neq i_{k+1},\forall\ k\in N,i_0=\boldsymbol{m}_0$.这一序列可有限也可无限,$(i_k,t_k)$表示在 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$内 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x}(t),i_k)$.对于任意的 $j\in M$,记 $\Delta_{(x_0,m_0)}|j$ 为进入和离开系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},j)$的切换时间序列,即

$$\Delta_{(x_0,m_0)}|j=\{t_{k_1},t_{k_1+1},t_{k_2},t_{k_2+1},\cdots,t_{k_n},t_{k_n+1},\cdots;\ i_{k_m}=j,\ m\in N\} \tag{7}$$

对于严格递增的时间序列 $T=\{t_0,t_1,\cdots,t_n,\cdots\}$,记 $I(T)=\bigcup_{j\in N}(t_{2j},t_{2j+1}]$,并记 T 的偶数序

列为 $\varepsilon(T)=t_0,t_2,t_4,\cdots$,奇数序列为 $o(T)=t_1,t_3,t_5,\cdots$.

文[1～3]研究了由式(1)和(2)所组成的系统的稳定性问题,并给出了一些稳定性结果.这些结果具有相当的一般性,可以用于许多种非线性系统,所有这些结果都要求存在一个或多个辅助函数,并要求辅助函数在 $\varepsilon(T)$上非增.这些被称之为类-李雅普诺夫函数(Lyapunov-like function)或弱类-李雅普诺夫函数(weak Lyapunov-like function)的辅助函数可以解释为系统能量的一种抽象度量.李雅普诺夫函数的寻找一直是稳定性理论的一大难题.文[3]将这一问题转化为线形矩阵不等式(LMI)的求解问题.下面,我们给出由式(1),(2)和(3)所组成的混合系统的稳定性结果,这些结果并不要求辅助函数在 $\varepsilon(T)$上是非增的.当然,这一结果对于离散状态发生改变时,辅助函数在 $\varepsilon(T)$上是非增的情况仍然成立.为此,我们首先给出以下一些定义.

定义 2. 记 $R^+=[0,\infty)$,一个函数 $\Phi\in C[R^+,R^+]$称为 K 类函数,如果 $\Phi(0)=0$ 并且 Φ 是严格递增的;如果 Φ 是 K 类函数,且$\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(r)=\infty$,则称 Φ 是 KR 类函数;如果 V 是正定的并且对所有 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 存在 KR 类函数 Φ 满足 $V(\boldsymbol{x})\geqslant\Phi(\|\boldsymbol{x}\|)$,则称 V 是径向无界的.

定义 3(候选李雅普诺夫函数[3]). 一个函数称为候选李雅普诺夫函数,如果它是关于原点正定的并且具有连续的偏导数.

定义 4(弱类-李雅普诺夫函数). 给定一个严格递增的时间序列 $T=\{t_0,t_1,\cdots,t_n,\cdots\}$,如果 i) 存在函数 $h\in C[R^+,R^+]$满足 $h(0)=0$,对所有 $t\in(t_{2j},t_{2j+1}]$和 $j\in N$ 成立 $V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant h(V(\boldsymbol{x}(t_{2j}^+)))$; ii) V 关于 $o(T)$单调非增. 我们称 V 是 T 上的一个关于 f 和轨线 $\boldsymbol{x}(\cdot)$ 的弱类 - 李雅普诺夫函数.

与文[1～3]中的定义不同,在定义 4 中我们要求 V 关于 $o(T)$而非 $\varepsilon(T)$单调非增,这对于处理混合系统中的跳变现象具有重要作用.对于由式(1),(2)和(3)所描述的混合系统,当离散状态发生改变时,可能发生连续状态的跳变.此时,利用文[1～3]的结果寻找在 $\varepsilon(T)$上非增的辅助函数将变得更为困难,而对于文[3]中的方法则可能导致线形矩阵不等式(LMI)问题无解.利用定义 4 及以下的稳定性定理则有助于解决这一问题.

3 稳定性定理

定理 1. 假设有径向无界的函数 V_j, $j\in M$, 如果对于系统(1),(2)和(3)的每一个 j 和由切换序列(6)所确定的轨线 x_Δ,V_j 是 $\Delta_{(x_0,m_0)}|j$ 上的关于 $f(\boldsymbol{x},j)$和 x_Δ 的弱类-李雅普诺夫函数,并且存在常数 $C>0$,对于$\forall\ i,j\in M$ 成立 $\|A_{ij}\|\leqslant C$, $\|B_{ij}\|\leqslant C$,则系统的平衡点 $\boldsymbol{x}=0$在李雅普诺夫意义下是稳定的.

定理 1 给出了混合系统稳定的充分条件,但是该定理并未给出如何寻找弱类 - 李雅普诺夫函数 $V_j,j\in M$ 和函数 $h(\cdot)$. 另外,利用这一定理需要知道混合状态轨线的有关信息,至少需要知道当系统的离散状态发生改变时系统状态轨线的有关信息,而这些信息一般是未知的.为此,我们加强定理 1 中的条件,则类似于定理 1 我们有如下结果.

定理 2. 假设我们有径向无界的候选李雅普诺夫函数 $V_j,j\in M$,混合系统由式(1),(2)和(3)进行描述,并且有 $f(0,\boldsymbol{m}_i)=0$, $\forall\ \boldsymbol{m}_i\in M$. 如果对于初始状态$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{m}_0)\in H_0$ 和式(6)中的 切换序列 $\Delta_{(x_0,m_0)}$,以下条件成立:1) $\dot{V}_j(\boldsymbol{x}(t))\leqslant 0,\forall\ t\in I(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$; 2) $V_j(\boldsymbol{x}(t_{j+1}))\leqslant V_j(\boldsymbol{x}(t_j))$, $t_j,t_{j+1}\in o(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$; 3) 存在$C>0$,对于$\forall\ i,j\in M$ 有 $\|A_{ij}\|\leqslant C$, $\|B_{ij}\|\leqslant C$. 这里 C 为一常数. 那么,系统的平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 在李雅普诺夫意义下是稳定的.

定义一个有限的径向无界的候选李雅普诺夫函数的集合为 $V=\{V_1,V_2,\cdots,V_K\}$，$j\in M$，V_j 是 $\Delta_{(x_0,m_0)}|j$ 上的候选李雅普诺夫函数. 当系统(1)，(2)和(3)按照切换序列 $\Delta_{(x_0,m_0)}$ 进行演化时，相继使用一系列的候选李雅普诺夫函数

$$\Lambda_{(x_0,m_0)}=(v_0,t_0),(v_1,t_1),\cdots,\ v_k\in V,\ k\in N \tag{8}$$

(v_k,t_k) 意味着在区间 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ 内系统的能量由 v_k 进行测量，则我们有以下结果.

系 1. 混合系统由式(1)，(2)和(3)进行描述，并且有 $f(0,m_i)=0,\forall\ \boldsymbol{m}_i\in M$. 如果对于初始状态 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{m}_0)\in H_0$ 和式(8)中的切换序列 $\Delta_{(x_0,m_0)}$，以下条件成立：1) $\dot{v}_k(\boldsymbol{x}(t))\leqslant 0,\forall\ t\in(t_k,t_{k+1}]$，$t_k,t_{k+1}\in T$；2) $v_{k+1}(\boldsymbol{x}(t_{k+1}^{+}))\leqslant v_k(\boldsymbol{x}(t_{k+1}))$，$t_k\in T$；3) 存在 $C>0$，对于 $\forall\ i,j\in M$ 有 $\|A_{ij}\|\leqslant C$，$\|B_{ij}\|\leqslant C$. 这里 $v_k\in V$，C 为一常数. 那么，系统的平衡点 $\boldsymbol{x}=0$ 在李雅普诺夫意义下是稳定的.

系 1 的结果是文[3]中结果的推广. 利用这一结果，可以将寻找李雅普诺夫函数的问题转化为线性矩阵不等式(LMI)的求解问题，若线性矩阵不等式(LMI)问题可解，则系统是稳定的. 利用 MATLAB 的 LMI 工具箱可以很容易地解决这一问题. 但是，需要指出的是利用这一方法，仍需要李雅普诺夫函数在切换的时刻是单调非增的. 如何利用定理 1 和定理 2 的结果来寻找李雅普诺夫函数仍是进一步努力的方向.

4　仿真实例

考虑一个线性混合系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(\boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{x}(t)(i=1,2),\quad A(\boldsymbol{m}_1)=\begin{bmatrix}1 & -20\\ 20 & 1\end{bmatrix},\quad A(\boldsymbol{m}_2)=\begin{bmatrix}1 & 20\\ -20 & 1\end{bmatrix},$$

$$G_{12}=\begin{bmatrix}-1.5 & 1\\ -1.2 & 1\end{bmatrix},\quad G_{21}=\begin{bmatrix}-0.8 & -1\\ -1 & 1.5\end{bmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2$ 为离散状态；跳变函数为 G_{12},G_{21}；$A(\boldsymbol{m}_1),A(\boldsymbol{m}_2)$ 均为不稳定系统. 现取切换面为 $\boldsymbol{s}_{12}=\{(x_1,x_2)|x_1=-x_2\}$，$\boldsymbol{s}_{21}=\{(x_1,x_2)|x_2=0\}$；两个坐标轴及两条直线 $x_1=\pm x_2$ 将整个状态空间分成 8 部分，如图 1 所示. 若相邻两条直线之间的部分为同一区域，则整个状态空间分为 4 个区域：(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ). 按照逆时针方向(Ⅰ)→(Ⅱ)→(Ⅲ)→(Ⅳ)的区域对应于离散状态 $\boldsymbol{m}_1$，顺时针为 $\boldsymbol{m}_2$. 对应于每一个区域取李雅普诺夫函数为 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}$，利用 MATLAB 的 LMI 工具箱求得 LMI 问题有解，则混合系统是稳定的. 求得对应于每一个区域的 $P_i(i=1,2,3,4)$ 为

$$P_1=\begin{bmatrix}0.2871 & -0.0076\\ -0.0076 & 0.2649\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}0.2989 & -0.0399\\ -0.0399 & 0.3818\end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix}0.3727 & -0.0370\\ -0.0370 & 0.2983\end{bmatrix},\quad P_4=\begin{bmatrix}0.3670 & 0.0348\\ 0.0348 & 0.2980\end{bmatrix}.$$

若取初值 $\boldsymbol{x}_0=(0.25,-0.125)$，$\boldsymbol{m}_0=\boldsymbol{m}_1$，则得到系统的状态轨线如图 2～图 4 所示.

注 1. 与文献[1～3]中的定理不同，在定理 1 和定理 2 中，我们要求辅助函数在序列 $o(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$ 而不是 $\varepsilon(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$ 上单调非增，这意味着允许系统的能量在序列 $\varepsilon(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$ 上是增加的，但是增量必须有界. 同时，在离散状态发生改变之前，系统的能量必须减少，并且最低减至在序列 $o(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$ 中的上一时刻系统所拥有的能量水平.

注 2. 由于在定理中没有对系统的能量在序列 $\varepsilon(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$ 上的增减性作特别的要求，

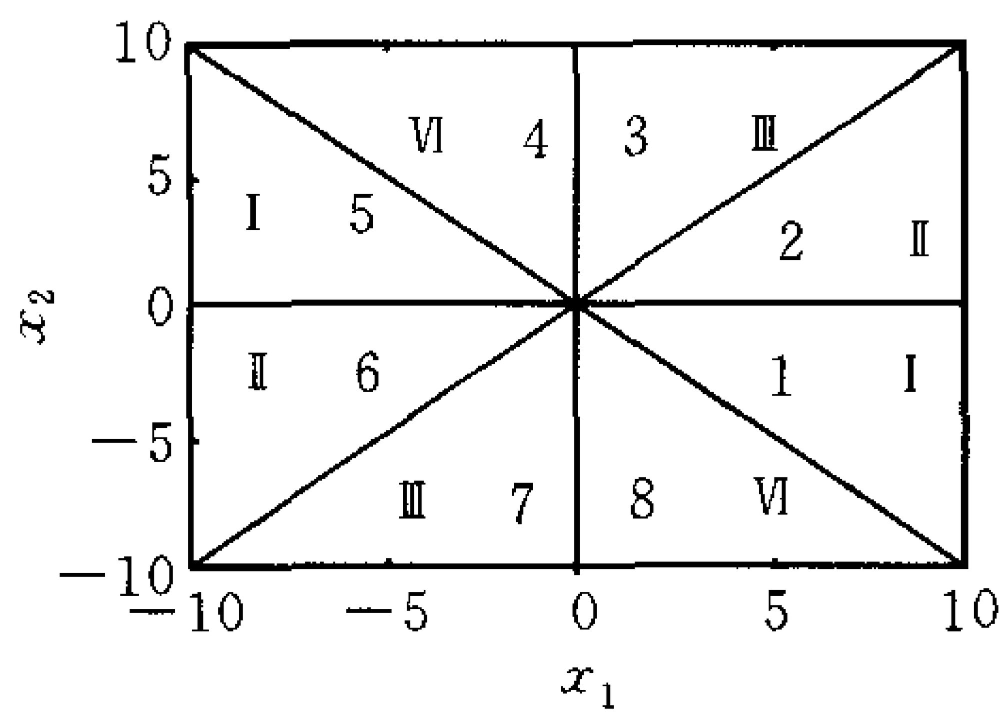

图 1

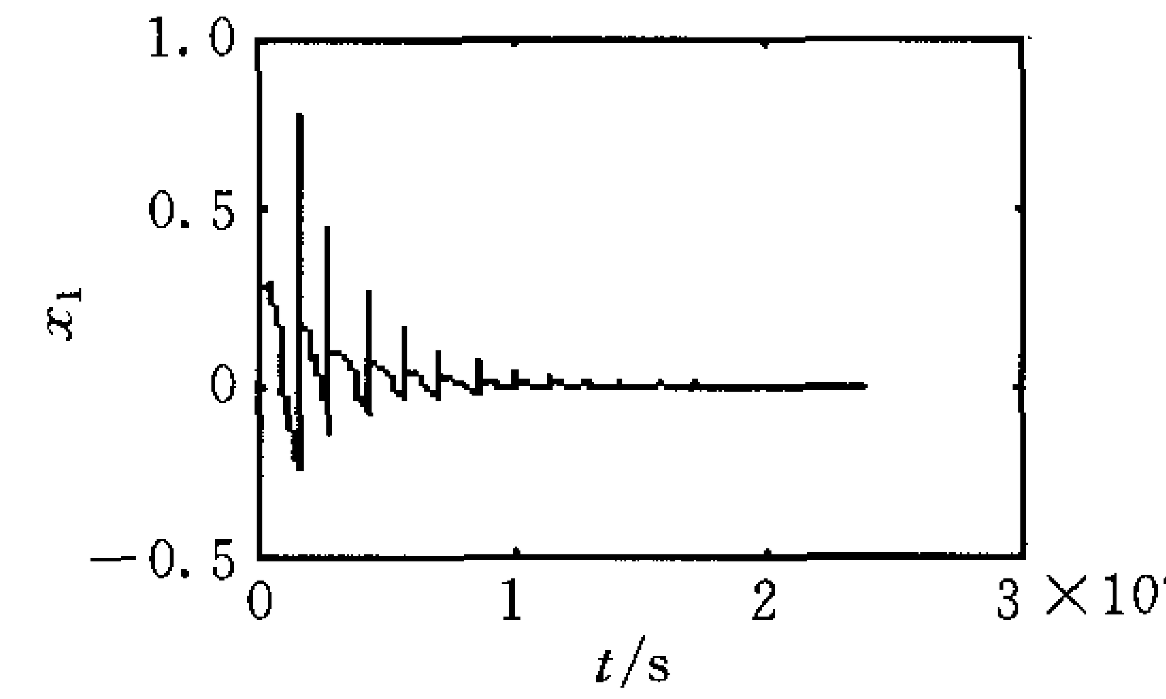

图 2

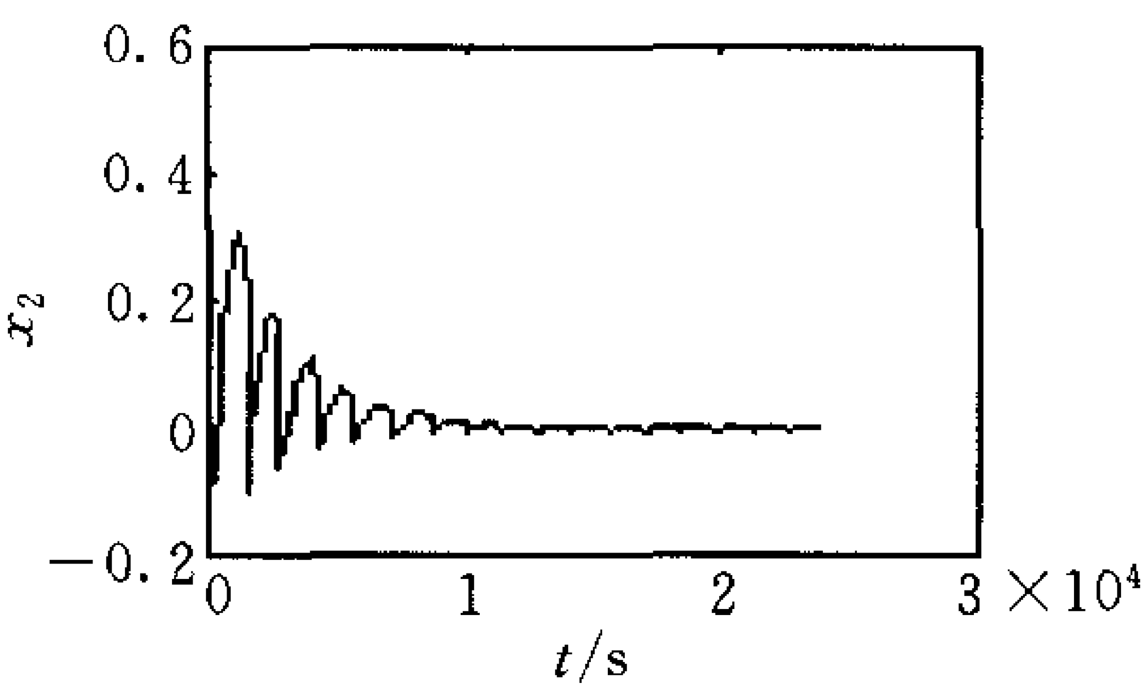

图 3

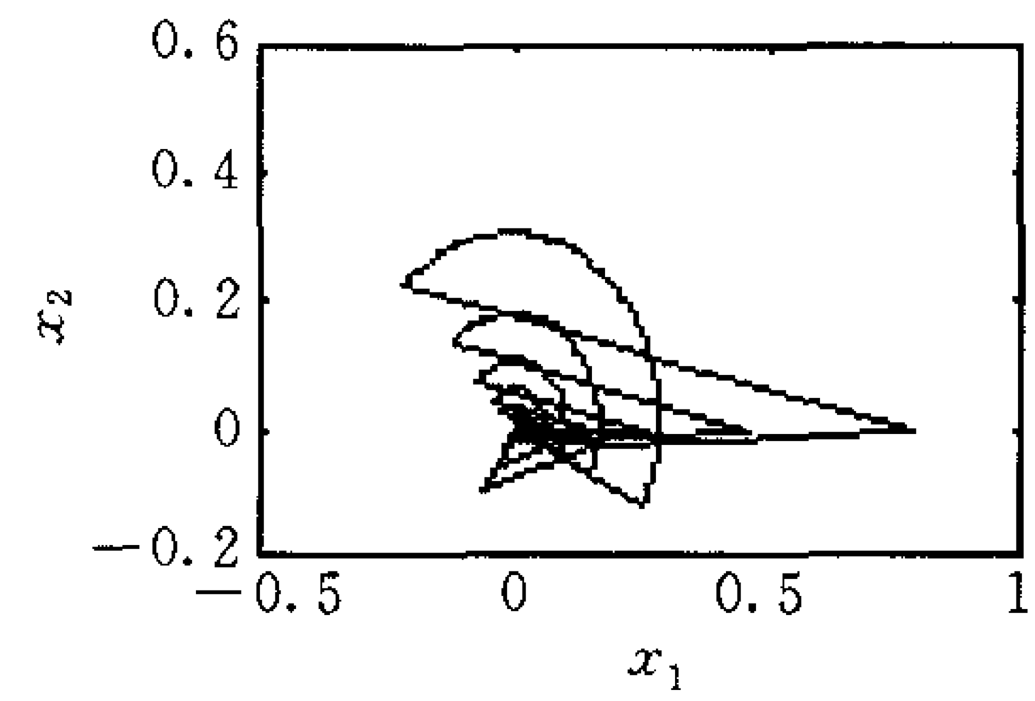

图 4

所以当系统的能量在序列 $\varepsilon(\Delta_{(x_0,m_0)}|j)$ 上减少时定理的结论仍然成立.

5 结论

本文首先给出了一种一般的混合模型，然后研究了混合系统的稳定性问题，得出一些新的稳定性结果.这些结果给出了当离散状态发生改变时，在系统能量增加的情况下，混合系统仍保持稳定的充分条件.最后，给出了一种能量函数的寻找方案并指出了进一步的努力方向.仿真实例验证了该方案的有效性.

参 考 文 献

1 Branicky M. Stability of switched and hybrid system. In:Proc. 33rd CDC, Lake Buena Vista, FL, 1994, 3498～3503

2 Hou LIng, Michel Anthony N, Ye Hui. Stability analysis of switched systems. In: Proc. 35th CDC, Kobe, Japan, 1996,1208～1212

3 Pettersson Stefan, Lennartson Bengt. Stability and robustness for hybrid systems. In:Proc. 35th CDC, Kobe, Japan, 1996, 1202～1207

4 Antsaklis Panos J, Stiver James A, Lemmon Michael. Hybrid System Modeling and autonomous Control Systems. Lecture Notes in Computer Science 736, Springer Verlag, 1993, 366～392

5 Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *SIAM J. Appl. & Math.*, 1994,**15**:

6 Tittus Michael, Egardt Bo. Control Design for Integrator Hybrid System. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**: 491～500

张 伟 浙江大学工业控制技术研究所博士研究生.研究方向为生产制造系统、离散事件动态系统、智能控制、混合系统和计算机集成制造系统.

孙优贤 教授，博士生导师，中国工程院院士.浙江大学工业控制技术研究所所长，国家重点实验室和国家工程研究中心主任.研究领域为过程控制理论及应用、鲁棒控制理论及应用、容错控制理论及应用，以及造纸过程的模型化和计算机控制.