第30卷 第3期
2004年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 3
May, 2004

# 区间参数不确定系统优化的可行性分析[1)]

程志强 戴连奎 孙优贤

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)

(E-mail: zqcheng@iipc.zju.edu.cn)

**摘 要** 针对过程工业系统的特点，以区间参数表示的不确定非线性系统的优化问题转化为一个极大极小型优化命题，并结合遗传算法和常规非线性优化方法对其可行性进行了分析. 最后，通过计算示例表明了上述方法的有效性.

**关键词** 不确定系统，区间参数，可行性分析，递阶优化，遗传算法

**中图分类号** O224

# Feasibility Analysis for Optimization of Uncertain Systems with Interval Parameters

CHENG Zhi-Qiang DAI Lian-Kui SUN You-Xian

*(National Laboratory of Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

(E-mail: zqcheng@iipc.zju.edu.cn)

**Abstract** The optimization problem of uncertain systems with interval parameters is transformed into a minimax optimization problem. To analyze the feasibility of the minimax problem, a hierarchical algorithm composed of genetic algorithms and nonlinear programming is proposed. Finally, a simulation example shows the effectiveness of the hierarchical algorithm.

**Key words** Uncertain systems, interval parameters, feasibility analysis, hierarchical optimization, genetic algorithms

## 1 引言

与确定性系统的优化不同，不确定系统的优化是研究模型参数不确定时的优化，其复杂度大大增加. 目前对于不确定系统的优化，依据不确定参数描述的不同，一般有鲁棒优化[1,2]和模糊规划[3]两种不同的解决方法. 以上两类方法分别依赖于参数的随机概率分布和模糊可能性度量，然而不幸的是，在实际系统中，参数的这些性质却往往很难客观准确地获得. 相反，要获得参数的置信区间却要容易得多. 正是这方面的原因，促进了区间参数不确定

1) 国家"863"项目(9845005)资助

Supported by the National High-Technology Program of P. R. China(9845005)

收稿日期 2003-05-13 收修改稿日期 2003-11-28

Received May 13, 2003; in revised form November 28, 2003

规划的发展. 对于目标函数系数为区间数的线性规划问题,Stefan 定义了基于区间数序关系的求解方法,把原问题转化为一个两目标优化问题非劣解的求解问题[4]. 刘新旺与达庆利针对目标函数和约束条件系数均为区间数的线性规划问题[5],提出了一种基于模糊约束满意度的求解方法,将原问题转化为确定型的一般参数规划问题来求解. 而针对一般形式的具有区间参数的非线性多目标决策问题,祝世京等人探讨了决策人在决策的最优性与决策结果的不确定性之间权衡,提出了鲁棒有效解的概念,并研究了其最优性条件,但文中没有涉及可行性分析及如何有效地进行求解[6].

本文针对过程工业系统的特点,提出了以区间参数描述的不确定系统多目标优化的一般性问题,并在此基础上分析其可行性条件. 针对该可行性问题的具体特点,给出了一种结合遗传算法和常规非线性优化方法的递阶优化求解策略. 最后,对一个实例进行了可行性分析.

## 2 优化可行性问题的分析与求解

许多实际不确定非线性系统的多目标优化问题可描述为

$$P_1:\ \min_{u} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \min_{u}(J_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\ J_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\ \cdots,\ J_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \in [\boldsymbol{y}_{\min},\boldsymbol{y}_{\max}],\boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{u}_{\min},\boldsymbol{u}_{\max}],\ \boldsymbol{w} \in [\boldsymbol{w}_{\min},\boldsymbol{w}_{\max}]$$

其中$\{J_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\ i=1,2,\cdots,n\}$为系统的 $n$ 个优化目标;$\boldsymbol{u}\in R^m$ 为决策变量或操作变量,$\boldsymbol{u}_{\min},\boldsymbol{u}_{\max}$为 $\boldsymbol{u}$ 的约束范围;$\boldsymbol{y}\in R^r$ 为系统约束输出,$\boldsymbol{y}_{\min},\boldsymbol{y}_{\max}$为系统输出的约束范围. $\boldsymbol{w}\in R^q$ 为系统参数,既可以表示与目标函数 $J$ 或系统输出 $\boldsymbol{y}$ 有关的产品价格系数或模型参数;也可以表示工业系统中的不可测扰动输入,如工业装置的原料组成与性质等. $\boldsymbol{w}_{\min},\boldsymbol{w}_{\max}$分别为不确定参数 $\boldsymbol{w}$ 置信区间的下界与上界.

令参数 $\boldsymbol{w}$ 的变化区域为 $W=[\boldsymbol{w}_{\min},\boldsymbol{w}_{\max}]$,对于给定的 $\boldsymbol{u}\in[\boldsymbol{u}_{\min},\boldsymbol{u}_{\max}]$,定义

$$y_j^+ = \max_{w\in W} y_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\quad y_j^- = \min_{w\in W} y_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\quad j=1,2,\cdots,r \tag{2}$$

则对上述优化命题 $P_1$ 的可行性分析,即指:是否存在 $\boldsymbol{u}\in[\boldsymbol{u}_{\min},\boldsymbol{u}_{\max}]$,满足 $y_{j\min}\leqslant y_j^-(\boldsymbol{u})\leqslant y_j^+(\boldsymbol{u})\leqslant y_{j\max},\ j=1,2,\cdots,r$.

为便于求解,引入系统约束输出松弛变量

$$Z_{Hj}(\boldsymbol{u}) = \max(0,\ y_j^+(\boldsymbol{u})-y_{j\max}),\quad Z_{Lj}(\boldsymbol{u}) = \max(0,\ y_{j\min}-y_j^-(\boldsymbol{u})),\quad j=1,2,\cdots,r$$

以及系统输出未满足约束时的惩罚因子 $C_{Hj}>0,\ C_{Lj}>0,\ j=1,2,\cdots,r$.

令 $$\boldsymbol{C}_H = (C_{H1},\ C_{H2},\ \cdots,\ C_{Hr}),\ \boldsymbol{C}_L = (C_{L1},\ C_{L2},\ \cdots,\ C_{Lr})$$

$$\boldsymbol{Z}_H(\boldsymbol{u}) = (Z_{H1}(\boldsymbol{u}),\ Z_{H2}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ Z_{Hr}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Z}_L(\boldsymbol{u}) = (Z_{L1}(\boldsymbol{u}),\ Z_{L2}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ Z_{Lr}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}$$

则 $P_1$ 的可行性分析由定理 1 给出.

**定理 1.** 优化命题 $P_1$ 存在可行解当且仅当以下优化命题目标函数的最优解为零:

$$P_2:\ \min_{u} \boldsymbol{C}_H\boldsymbol{Z}_H(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{Z}_L(\boldsymbol{u}),\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{u}_{\min}\leqslant \boldsymbol{u}\leqslant \boldsymbol{u}_{\max} \tag{3}$$

**证明.** 设 $\boldsymbol{u}^*$ 为 $P_2$ 的最优解,

1)充分性: 如果 $\boldsymbol{C}_H\boldsymbol{Z}_H(\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{Z}_L(\boldsymbol{u}^*)=0$

因为 $C_{Hj}>0,\ C_{Lj}>0,\quad \therefore Z_{Hj}(\boldsymbol{u}^*) = Z_{Lj}(\boldsymbol{u}^*) = 0,\ j=1,2,\cdots,r$

即 $$y_j^+(\boldsymbol{u}^*)-y_{j\max}\leqslant 0,\ y_{j\min}-y_j^-(\boldsymbol{u}^*)\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,r$$

所以 $\boldsymbol{u}^*$ 为 $P_1$ 的一个可行点.

2)必要性: 如果 $\boldsymbol{C}_H\boldsymbol{Z}_H(\boldsymbol{u}^*)+\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{Z}_L(\boldsymbol{u}^*)=C>0,\ \forall\boldsymbol{u}\in[\boldsymbol{u}_{\min},\boldsymbol{u}_{\max}]$

则
$$C_H Z_H(u) + C_L Z_L(u) \geqslant C > 0$$
因为　　$C_{Hj} > 0$，　$C_{Lj} > 0, j = 1,2,\cdots,r$，　所以 $Z_{Hj}, Z_{Lj}$ 不全为零

即至少有一个输出 $y_i, 1 \leqslant i \leqslant r$ 不满足约束 $y_{i\min} \leqslant y_i^-(u) \leqslant y_i^+(u) \leqslant y_{i\max}$，因此原问题 $P_1$ 不存在可行点.　　证毕.

对于优化命题 $P_2$，由于目标函数并不一定处处可导，用基于导数的常规优化方法很难进行求解，并且易陷入局部最小点；而遗传算法(genetic algorithms, GA)作为智能优化算法的代表之一，它是一种随机优化和搜索方法，不但与目标函数局部是否可导无关，而且具有良好的全局优化性能和稳健性[7]，适合于此类优化问题的求解. 而对于局部优化问题(2)式，一般情况下都具有良好的解析性质，可以用常规非线性优化方法进行求解.

为了更好地适应大规模问题求解的实时性要求，可以将 $P_2$ 的优化和问题(2)式的求解分开进行. 基于这一思想，本文提出如图 1 所示的递阶优化算法. 该算法通过一个应用遗传算法的主计算单元(可以是主处理器)，将群体中的各个体 $u_i$ 分别传送给下层计算单元进行优化求解. 下层计算单元运用常规非线性优化方法完成优化任务后，将结果送回主计算单元，由其进行目标的评价和遗传操作，然后再将新群体分成一个个的个体，启动新的一轮计算. 本算法实现步骤如下：

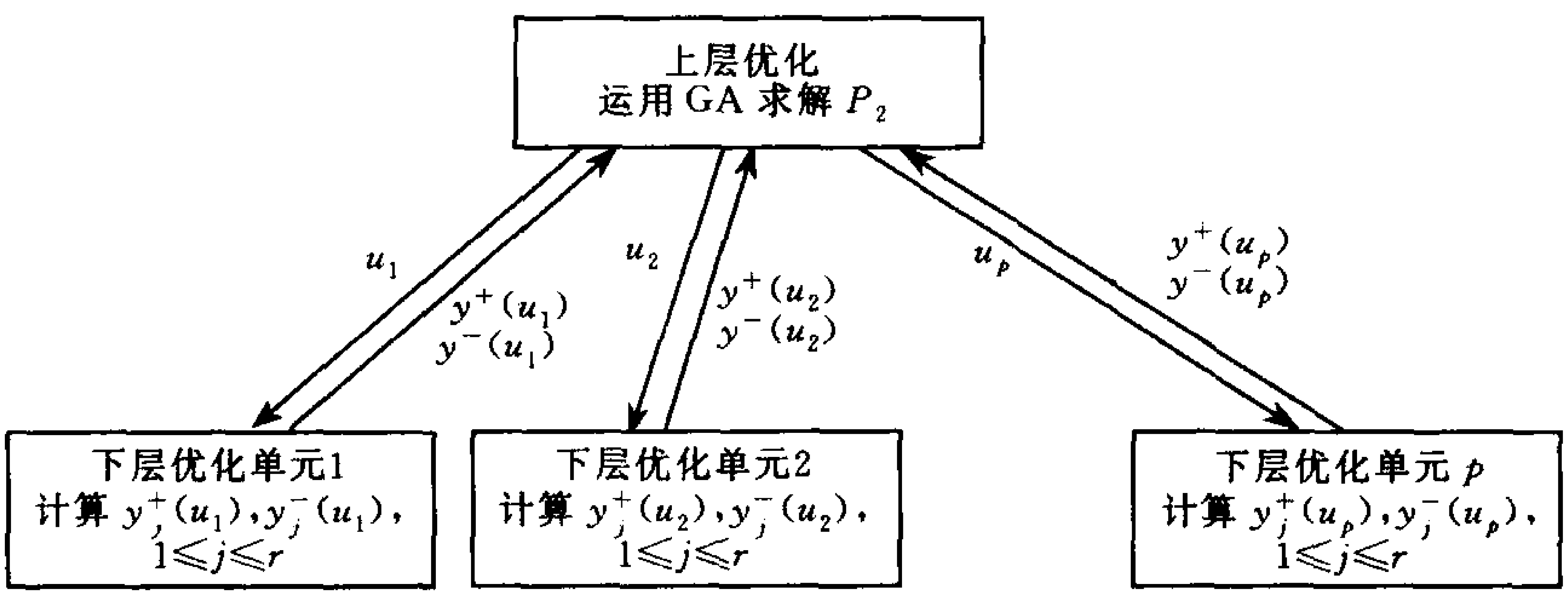



图 1　可行性问题 $P_2$ 递阶优化方案

Fig. 1　Hierarchical optimization algorithm for the problem $P_2$

1) 主计算单元产生大小为 $p$ 的初始种群，同时设定群体进化代数；
2) 将每个个体 $u_i, 1 \leqslant i \leqslant p$ 分配到各下层计算单元；
3) 在各下层优化单元求解：$y_j^+ = \max\limits_{w \in W} y_j(u,w)$，$y_j^- = \min\limits_{w \in W} y_j(u,w)$，$1 \leqslant j \leqslant r$，
4) 将 $y^+(u_i), y^-(u_i), j = 1,2,\cdots,p$ 送回主计算单元；
5) 目标评价；
6) 如果已完成群体进化代数，转 8)，否则继续下一步；
7) 进行交叉、变异等遗传操作，产生新的种群，转 2)；
8) 最优解 $u^*$ 输出.

## 3　示例

设有优化问题可由下式描述：
$$\min_u J(y,u,w), \quad \text{s. t.} \quad y(u,w) \in [y_{\min}, y_{\max}], \quad u \in [u_{\min}, u_{\max}]$$
其中 $u = [u_1, u_2]^T$ 为操作变量，$y = [y_1, y_2]^T$ 为输出变量，$w = [w_1, w_2]^T$ 为不确定性参数，

$$y_1 = (u_1 - 3)^2 + (u_2 - 3)^2 - w_1^{\ 2}, \quad y_2 = u_1^2/w_2^2 + u_2^2/3^2 - 1$$

$$\boldsymbol{y}_{\min} = [-9, -1]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{y}_{\max} = [0, 0]^{\mathrm{T}}; \quad \boldsymbol{u}_{\min} = [0,\ 0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_{\max} = [100,\ 100]^{\mathrm{T}}$$

取松弛变量为

$$\boldsymbol{Z}_H = [Z_{H1}, Z_{H2}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \max(0, \max\limits_{w} y_1) \\ \max(0, \max\limits_{w} y_2) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{Z}_L = [Z_{L1}, Z_{L2}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \max(0, -9 - \min\limits_{w} y_1) \\ \max(0, -1 - \min\limits_{w} y_2) \end{bmatrix}$$

令惩罚因子 $\boldsymbol{C}_H = \boldsymbol{C}_L = [1,\ 1]$，根据定理 1，原问题可行性分析可转化为如下的寻优问题：

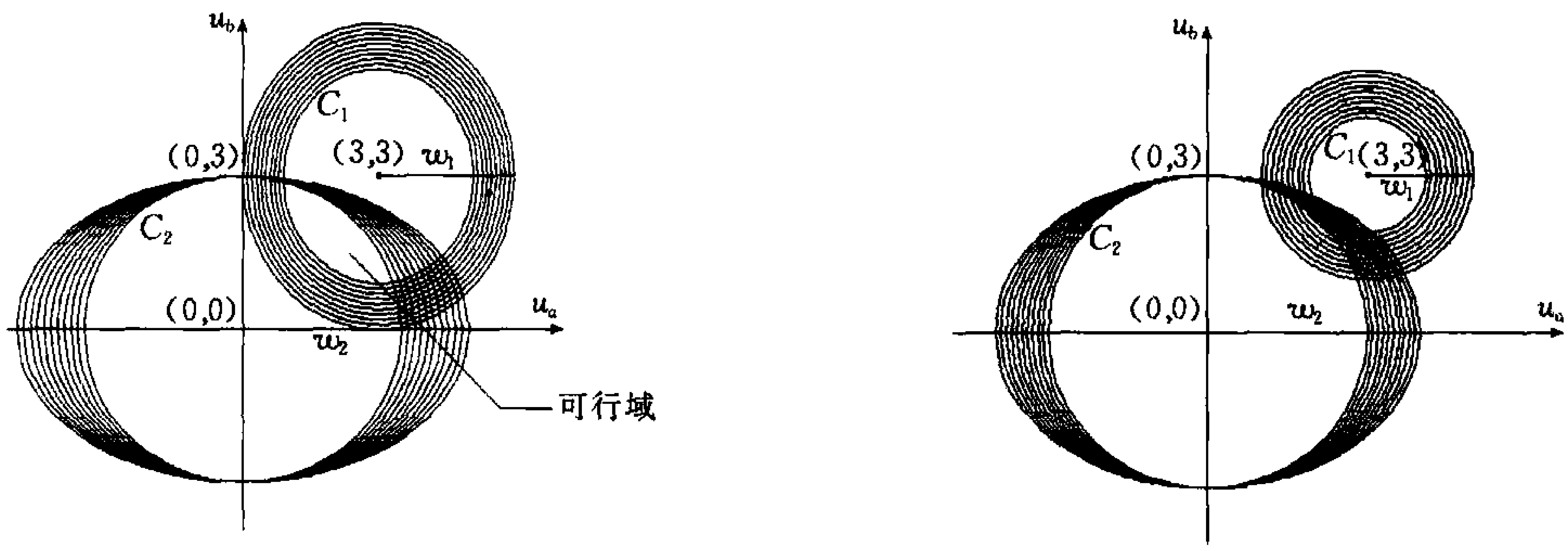
$$\min_{u}(\boldsymbol{C}_H \boldsymbol{Z}_H + \boldsymbol{C}_L \boldsymbol{Z}_L), \quad \text{s.t.} \quad 0 \leqslant u_1 \leqslant 100, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 100 \tag{4}$$

优化问题的可行域可视为一圆域 $C_1$ 和一椭圆域 $C_2$ 的重合区域，下面按参数 $w$ 不同的不确定区间范围分别讨论：

情形 a)：$w_1 \in [2,3]$，$w_2 \in [3.5,5]$；情形 b)：$w_1 \in [1,2]$，$w_2 \in [3,4]$.

图 2 为该两种情形的可行性区域，图 3 则是运用递阶混合遗传算法求解这两种情形下优化问题(4)的典型寻优过程.

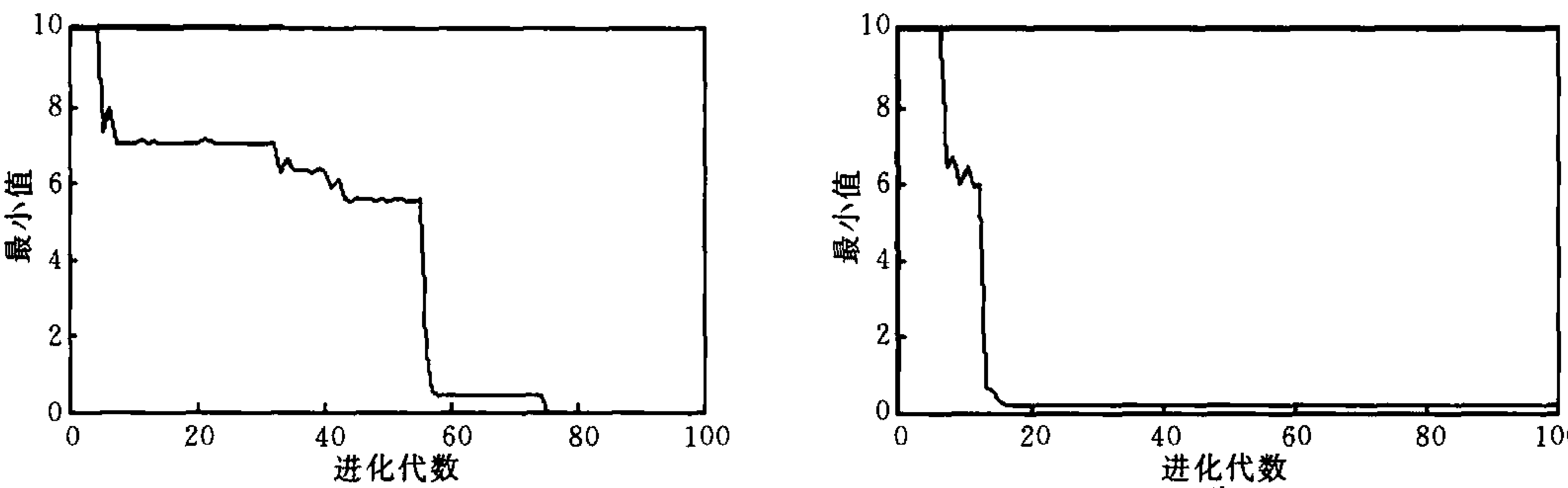
优化结果显示，对于情形 a)，当 $u_1 = 1.465$，$u_2 = 1.953$ 时，有最优解为 0，即表明原问题存在可行域；而对于情形 b)，优化结果显示当 $u_1 = 2.246$，$u_2 = 2.246$ 时目标函数取最小值 $0.243 > 0$，表明原问题不存在可行域.




(a) (b)

图 2 可行性分析图示

Fig. 2 Feasibility area representation




(a) (b)

图 3 优化命题(4)的典型寻优过程

Fig. 3 Searching processes for the problem(4)

## 4 结论

针对过程工业系统的特点，本文以区间参数表示的不确定非线性系统的多目标优化问

题转化为一般性的极大极小优化命题. 进而对文献[6]中并未涉及到的可行性问题进行研究，得出了可行性分析的等效优化命题，并针对此命题的具体特点，给出了一种行之有效的递阶优化求解策略. 最后，本文分析了一个具体的实例，得出其参数在不同区间内的可行性结论.

## References


1 Darlingtong J, Pantelides C C, Rustem B, Tanyi B A. An algorithm for contrained nonlinear optimization under uncertainly. *Automatica*, 1999, **35**(2): 217～228

2 Mulvey J, Ruszcczynski A. Robust optimization of large-scale systems. *Operation Research*, 1995, **43**(2): 264～280

3 Tang Jiā-Fu, Wang Ding-Wei. Fuzzy optimization theory and methodology: a survey. *Control Theory and Application*, 2000, **17**(2): 159～164(in Chinese)

4 Stefan C, Doreta K. Multi-objective programming in optimization of interval objective functions—A generalized approach. *European Journal of Operational Research*, 1996, **94**(3): 594～598

5 Liu Xin-Wang, Da Qing-Li. A satisfactory solution for interval number linear programming. *Journal of Systems Engineering*, 1999, **14**(2):123～128(in Chinese)

6 Zhu Shi-Jing, Luo Yun-Feng, Wang Shu-Ning. A kind of robustly efficient solutions of multiobjective decision with uncertain parameters. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(3):395～399(in Chinese)

7 Xi Yu-Geng, Chai Tian-You, Yun Wei-Min. Survey on genetic algorithm. *Control Theory and Application*, 1996, **13**(6): 697～708(in Chinese)



**程志强**　现为浙江大学控制系博士研究生. 研究方向为预测控制和过程优化.

(**CHENG Zhi-Qiang**　Ph. D. candidate in the Control Department at Zheijiang University. His research interests include model predictive control and process optimization.)

**戴连奎**　1993 年获浙江大学工业自动化专业博士学位，现为浙江大学副教授. 研究方向为复杂工业过程的建模、预测控制与过程优化.

(**DAI Lian-Kui**　Received his Ph. D. degree in 1993. He is currently an associated professor in the Control Department at Zhejiang University. His research interests include modeling, control, and optimization of complex systems.)

**孙优贤**　教授，中国工程院院士. 浙江大学国家工程研究中心主任. 长期从事过程控制、鲁棒控制理论及应用、容错控制理论及应用研究以及造纸过程模型化和计算机控制.

(**SUN You-Xian**　Professor, the academician of Chinese National Engineering Academy, director of the National Industrial Automation Research Center at Zhejiang University. His research interests include process control, robust control theory and its application, fault tolerance control theory and its application, and modeling and computer control of pulp and paper-making processes.)