

H_∞ 滤波问题数值求解的精细积分算法¹⁾

吴志刚 钟万勰

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116023)

(E-mail: wuzhg@dlut.edu.cn zwoffice@dlut.edu.cn)

摘 要 有限时间 H_∞ 滤波的 Riccati 方程和滤波方程分别为非线性矩阵微分方程和线性变系数微分方程, 而且 Riccati 微分方程解的存在性还依赖于参数 γ^{-2} , 因此求这些方程的数值解一般比较困难. 按照结构力学与最优控制的模拟关系, Riccati 方程解存在的临界参数 γ_{cr}^{-2} 对应于广义 Rayleigh 商的一阶本征值. 因此可以用精细积分法结合扩展的 Wittrick-Williams (W-W) 算法计算 γ_{cr}^{-2} 并求解 Riccati 方程, 滤波微分方程的解也可以由精细积分法计算.

关键词 H_∞ 滤波, Riccati 方程, 精细积分法, 扩展 Wittrick-Williams 算法

中图分类号 TP273

PRECISE INTEGRATION METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION TO H_∞ FILTERING PROBLEM

WU Zhi-Gang ZHONG Wan-Xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian 116023)

(E-mail: wuzhg@dlut.edu.cn zwoffice@dlut.edu.cn)

Abstract For finite horizon H_∞ filtering problem, the Riccati equation is a nonlinear matrix differential equation and the filtering equation is a linear time-variant one. Furthermore, the existence of the solution to the Riccati equation depends on γ^{-2} . So it is not very easy to solve these equations by general numerical algorithm. According to the analogy between structural mechanics and optimal control, the critical parameter γ_{cr}^{-2} corresponds to the fundamental eigenvalue of a generalized Rayleigh quotient. Therefore, the precise integration method can be employed to solve the Riccati differential equation and to compute γ_{cr}^{-2} with the extended Wittrick-Williams (W-W) algorithm. The numerical solution to the filtering equation can also be obtained by the precise integration method, although it is a time-variant differential equation.

Key words H_∞ filtering, Riccati equation, precise integration method, extended Wittrick-Williams algorithm

1) 国家重点基础研究发展规划项目(G1999032805)和中国博士后科学基金(1999)资助

1 引言

H_∞ 滤波是 H_∞ 控制理论的核心内容之一^[1~4]. 考虑线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y = Cx + v \quad (1b)$$

$$z = Lx \quad (1c)$$

其中 x 为 n 维状态向量, y 为 q 维量测向量, z 为 p 维输出向量, w 为 l 维过程干扰向量, v 为 q 维量测干扰向量, w 和 $v \in L_2[0, T]$. 定常矩阵 A, B, C 和 L 有恰当的维数. 且 (A, B) , (A, C) 分别可控可观. H_∞ 滤波问题要利用 y 给出对状态组合 $z = Lx$ 的最优估计

$$\hat{z} = Fy \quad (2)$$

其中滤波器 F 为线性因果算子. 并且估计误差 $(\hat{z} - Lx)$ 满足

$$\int_0^T (\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) dt < \gamma^2 \left[\int_0^T (w^T w + v^T v) dt + (\hat{x}_0 - x_0)^T Q_0^{-1} (\hat{x}_0 - x_0) \right] \quad (3)$$

其中 $\hat{x}_0 - x_0$ 是对初始状态的估计误差, 对称矩阵 $Q_0^{-1} > 0$. 下列方程描述的滤波器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + QC^T(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (4a)$$

$$\hat{z} = L\hat{x} \quad (4b)$$

是上述问题的一个解. 其中 Q 满足 Riccati 微分方程

$$\dot{Q} = BB^T + AQ + QA^T - Q(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)Q, \quad Q(0) = Q_0 \quad (5)$$

Riccati 微分方程中的参数 γ^{-2} 大于临界值 γ_{cr}^{-2} 时, 方程在区间 $[0, T]$ 无解. 所以需要首先确定 γ_{cr}^{-2} , 并根据 γ_{cr}^{-2} 的值选定合适的 γ^{-2} 再求解相应的 Riccati 方程并构造滤波器. 文献 [5] 中指出临界值 γ_{cr}^{-2} 对应于广义 Rayleigh 商的最小本征值, 满足

$$\gamma_{cr}^{-2} = \text{st} \left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2} \right) \quad (6)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_0^T (\lambda^T \dot{x} - \lambda^T Ax + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda) dt + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \quad (7a)$$

$$\Pi_2 = \int_0^T \frac{1}{2} x^T L^T L x dt \quad (7b)$$

临界参数 γ_{cr}^{-2} 的计算需利用扩展的 Wittrick-Williams (W-W) 方法^[6] 结合 Riccati 方程的精细积分进行.

由对偶方程

$$\dot{x} = Ax + BB^T \lambda \quad (8a)$$

$$\dot{\lambda} = (C^T C - \gamma^{-2} L^T L)x - A^T \lambda - C^T y + \gamma^{-2} L^T \hat{z} \quad (8b)$$

可以导出 Riccati 微分方程 (5) 和滤波方程 (4a)^[5]. 且对偶方程等价于下列变分式

$$J_A = \int_0^T [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda) - x^T C^T y + \gamma^{-2} x^T L^T \hat{z}] dt, \quad (9)$$

$$\delta J_A = 0,$$

其中

$$H(x, \lambda) = \lambda^T A x - \frac{1}{2} x^T (C^T C - \gamma^{-2} L^T L) x + \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda.$$

无限长时间 H_∞ 滤波问题需求解 Riccati 代数方程及定常线性滤波微分方程, 有相应的数值方法^[4]. 本文主要讨论有限时间 H_∞ 滤波问题, 但这里的方法可稍作变化用于无限长时间滤波计算.

2 精细积分方法

设定步长 η 及计算时刻

$$t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, t_k = k\eta, \dots, T = k_f \eta \tag{10}$$

根据 2^N 类算法的特点及精细积分法的要求, 一般取 $N=20$, 将 η 等分为

$$\tau = \eta/2^N \approx \eta \cdot 10^{-6} \tag{11}$$

2.1 区段混合能定义

根据变分式(9), 对图 1 中所示区段 (t_a, t_b) 定义区段混合能

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda) - x^T C^T y + \gamma^{-2} x^T L^T \hat{z}] dt \tag{12}$$

其中 $0 < t_a < t_b < T$. 显然 $V(x_a, \lambda_b)$ 是 x_a 与 λ_b 的二次式, 其一般形式为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a - \frac{1}{2} x_a^T E x_a + \frac{1}{2} \lambda_b^T G \lambda_b + \lambda_b^T r_x + x_a^T r_\lambda \tag{13}$$

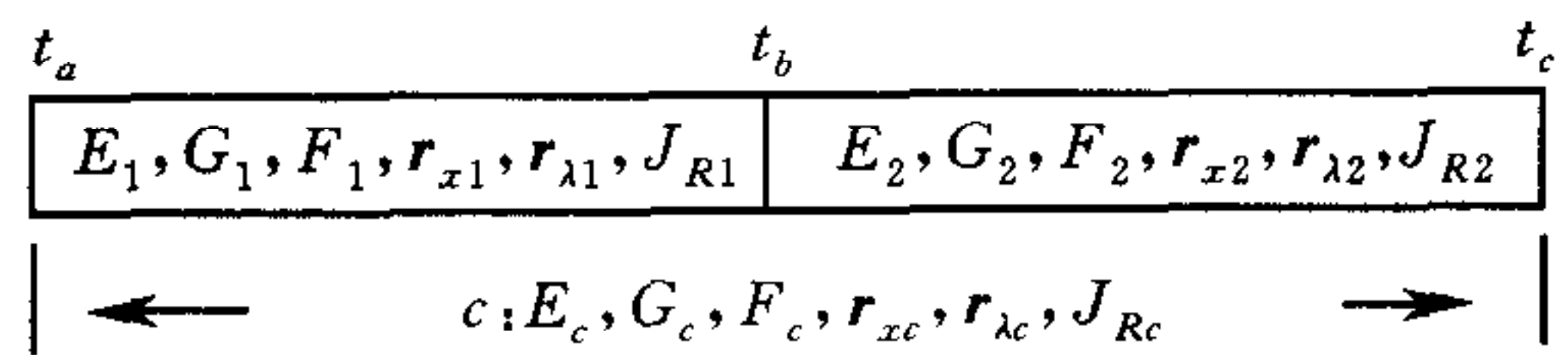


图 1 区段合并

其中 E, G, F 为 $n \times n$ 阶区段混合能矩阵, $E^T = E, G^T = G, r_x$ 和 r_λ 为 n 维向量. 对定常系统, 可以证明^[7,8], 矩阵 E, G, F 及向量 r_x, r_λ , 满足下列微分方程

$$\frac{dG}{dt} = B B^T + A G + G A^T - G (C^T C - \gamma^{-2} L^T L) G \tag{14a}$$

$$\frac{dE}{dt} = F^T (C^T C - \gamma^{-2} L^T L) F \tag{14b}$$

$$\frac{dF}{dt} = (A - G (C^T C - \gamma^{-2} L^T L)) F \tag{14c}$$

$$\frac{dr_x}{dt} = A r_x + G C^T (y - C r_x) + \gamma^{-2} G L^T (L r_x - \hat{z}) \tag{15a}$$

$$\frac{dr_\lambda}{dt} = F^T C^T (y - C r_x) + \gamma^{-2} F^T L^T (L r_x - \hat{z}) \tag{15b}$$

比较方程(15a)与滤波方程(4a), 若以 \hat{x} 代替 r_x , 并利用式(4b), 可将式(15a), (15b)化为

$$\frac{dr_x}{dt} = A r_x + G C^T (y - C r_x) \tag{16a}$$

$$\frac{dr_\lambda}{dt} = F^T C^T (y - C r_x) \tag{16b}$$

当 $t_a \rightarrow t_b$ 时

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I, r_x \rightarrow 0, r_\lambda \rightarrow 0 \tag{17}$$

其中 I 为 n 阶单位阵. 这是微分方程(14a)~(14c), (16a), (16b)的初值条件. 设在 (t_a, t_b) 区段内, $y(t)$ 线性变化, 则 $y(t)$ 可以由矩阵 $Y_0 = I_p$ 及 $Y_1 = \tau I_p$ 的 $2p$ 个列向量线性组合而成, I_p 为 p 阶单位阵. 从而可将向量微分方程(16a), (16b)转化为等价的矩阵微分方程

$$\frac{dR_x}{dt} = AR_x + GC^T(Y - CR_x) \quad (18a)$$

$$\frac{dR_\lambda}{dt} = F^T C^T (Y - CR_x) \quad (18b)$$

式中 Y 是由 $y(t)$ 的基底向量构成的矩阵. 将 $Y_0 = I_q$ 代入式(18a), (18b)积分所得矩阵记作 $R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$, 即

$$\frac{dR_x^{(0)}}{dt} = AR_x^{(0)} + GC^T(I_q - CR_x^{(0)}) \quad (19a)$$

$$\frac{dR_\lambda^{(0)}}{dt} = F^T C^T (I_q - CR_x^{(0)}) \quad (19b)$$

将 $Y_1 = \tau I_q$ 代入(18a), (18b)积分所得矩阵记作 $R_x^{(1)}(0, \tau), R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$, 即

$$\frac{dR_x^{(1)}}{dt} = AR_x^{(1)} + GC^T(\tau I_q - CR_x^{(1)}) \quad (20a)$$

$$\frac{dR_\lambda^{(1)}}{dt} = F^T C^T (\tau I_q - CR_x^{(1)}) \quad (20b)$$

比较方程(14a)与 Riccati 方程(5), 可知两者仅在初值条件上有差别, 而式(16a)和滤波方程(4a)的差别为 G 和 Q . 上述区段混合能矩阵的微分方程都可以利用区段合并公式求解.

2.2 区段合并及本征值计数公式

如图 1 所示, 相邻区段 (t_a, t_b) 及 (t_b, t_c) 通过对 x_b, λ_b 的消元合并成区段 (t_a, t_c) , 其相应的混合能矩阵 E_c, G_c, F_c 由原来两个区段的混合能矩阵表示为

$$G_c = G_2 + F_2(G_1^{-1} + E_2)^{-1}F_2^T \quad (21a)$$

$$E_c = E_1 + F_1^T(E_2^{-1} + G_1)^{-1}F_1 \quad (21b)$$

$$F_c = F_2(I + G_1E_2)^{-1}F_1 \quad (21c)$$

$$r_{\lambda c} = r_{\lambda 1} + F_1^T(I + E_2G_1)^{-1}(r_{\lambda 2} - E_2r_{x1}) \quad (22a)$$

$$r_{xc} = r_{x2} + F_2(I + G_1E_2)^{-1}(r_{x1} + G_1r_{\lambda 2}) \quad (22b)$$

式(22a), (22b)为向量形式, 其矩阵形式为

$$R_{\lambda c} = R_{\lambda 1} + F_1^T(I + E_2G_1)^{-1}(R_{\lambda 2} - E_2R_{x1}) \quad (23a)$$

$$R_{xc} = R_{x2} + F_2(I + G_1E_2)^{-1}(R_{x1} + G_1R_{\lambda 2}) \quad (23b)$$

此即区段合并消元公式.

任意长度区段的广义 Rayleigh 商本征值也按式(6)定义, 只是定义区间不同. 根据区段合并公式的特点, 定义区段的本征值计数后, 就可以结合扩展的 W-W 算法确定区段合并后的本征值计数, 进而得到整个区间的本征值计数. 这个计数可以用来结合二分法计算最小本征值^[5,6]. 所谓本征值计数是指: 对于给定的正实数 $\gamma_{\#}^{-2}$, 区段在其两端分别给定为 $x_a = 0, \lambda_b = 0$ 的条件下, 区段本征值小于 $\gamma_{\#}^{-2}$ 的数目, 可以用 $J_R(\gamma_{\#}^{-2}, t_a, t_b)$ 表示这一计数, 简称为 $J_R(\gamma_{\#}^{-2})$. 为简单起见, 区段 1 小于 $\gamma_{\#}^{-2}$ 的本征值个数用 $J_{R1}(\gamma_{\#}^{-2})$ 表示, $J_{Rc}(\gamma_{\#}^{-2}), J_{R2}(\gamma_{\#}^{-2})$ 的意义类同. 合并后区段的本征值计数为

$$J_{R_c}(\gamma_{\#}^{-2}) = J_{R_1}(\gamma_{\#}^{-2}) + J_{R_2}(\gamma_{\#}^{-2}) - s\{G_1\} + s\{G_1^{-1} + E_2\} \quad (24)$$

式中的 $s\{M\}$ 表示将 M 阵三角分解为 $M=LDL^T$ 后, D 阵对角线元素小于 0 的个数.

2.3 区段混合能矩阵计算

对长度为 τ 的区段矩阵 $E(\tau), G(\tau), F(\tau), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$ 作 Taylor 级数展开, 并忽略高于 4 阶的项有

$$E(\tau) \approx e_1\tau + e_2\tau^2 + e_3\tau^3 + e_4\tau^4 \quad (25a)$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4 \quad (25b)$$

$$F(\tau) \approx I + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 = I + F'(\tau) \quad (25c)$$

$$R_x^{(0)}(\tau) \approx \rho_{x01}\tau + \rho_{x02}\tau^2 + \rho_{x03}\tau^3 + \rho_{x04}\tau^4 \quad (26a)$$

$$R_\lambda^{(0)}(\tau) \approx \rho_{\lambda01}\tau + \rho_{\lambda02}\tau^2 + \rho_{\lambda03}\tau^3 + \rho_{\lambda04}\tau^4 \quad (26b)$$

展开式与微分方程(14a)~(14c)的初始条件(17)相容. 由于 $R_x^{(1)}(0, \tau)$ 和 $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ 的特殊性, 后面将单独介绍其算法. 将式(25a)~(25c)分别代入微分方程(14a)~(14c), 比较同幂次项有

$$e_1 = C^T C - \gamma^{-2} L^T L, \quad e_2 = (f_1^T e_1 + e_1 f_1)/2, \quad e_3 = (f_2^T e_1 + e_1 f_2 + f_1^T e_1 f_1)/3, \\ e_4 = (f_3^T e_1 + e_1 f_3 + f_2^T e_1 f_1 + f_1^T e_1 f_2)/4 \quad (27a)$$

$$g_1 = B B^T, \quad g_2 = (A g_1 + g_1 A^T)/2, \quad g_3 = (A g_2 + g_2 A^T - g_1 e_1 g_1)/3, \\ g_4 = (A g_3 + g_3 A^T - g_2 e_1 g_1 - g_1 e_1 g_2)/4 \quad (27b)$$

$$f_1 = A, \quad f_2 = (A f_1 - g_1 e_1)/2, \quad f_3 = (A f_2 - g_2 e_1 - g_1 e_1 f_1)/3, \\ f_4 = (A f_3 - g_3 e_1 - g_2 e_1 f_1 - g_1 e_1 f_2)/4 \quad (27c)$$

将(26a), (26b)代入微分方程(19a), (19b), 比较同幂次项有

$$\rho_{x01} = 0, \quad \rho_{x02} = g_1^T C^T / 2, \quad \rho_{x03} = (A \rho_{x02} + g_2 C^T) / 3, \\ \rho_{x04} = (A \rho_{x03} - g_1 e_1 \rho_{x02} + g_3 C^T) / 4 \quad (28a)$$

$$\rho_{\lambda01} = C^T, \quad \rho_{\lambda02} = f_1^T C^T / 2, \quad \rho_{\lambda03} = (f_2^T C^T - e_1 \rho_{x02}) / 3, \\ \rho_{\lambda04} = (f_3^T C^T - f_1^T e_1 \rho_{x02} - e_1 \rho_{x03}) / 4 \quad (28b)$$

相邻区段的 $E(\tau), G(\tau), F(\tau), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$ 相同, 因而由 τ 时段的矩阵通过执行区段合并公式 N 次计算 η 时段的混合能矩阵并不需要其它的步骤, 而 $R_x^{(1)}(0, \tau)$ 和 $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ 则不同. 按(25a)~(25c)计算时, 因区段非常短, 该区段的一阶本征值是一个非常大的正数, 对于任何给定的有限大的 $\gamma_{\#}^{-2}$, 一般有 $J_R=0$. 若 $J_R \neq 0$, 只需将 τ 取更小些使 $J_R=0$ 即可. 为避免丧失计算精度, 此阶段计算的合并公式(21c)由下式代替

$$F'_c = (F' - GE/2)(I + GE)^{-1} + (I + GE)^{-1}(F' - GE/2) + F'(I + GE)^{-1}F' \quad (21c')$$

这是精细积分算法的关键步骤之一.

因为矩阵 $R_x^{(1)}(0, \tau)$ 和 $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ 满足的微分方程是(20a), (20b), 其中含有 τ , 所以相邻两个区段 $(0, \tau)$ 和 $(\tau, 2\tau)$ 的矩阵 $R_{x1}^{(1)}, R_{\lambda1}^{(1)}$ 和 $R_{x2}^{(1)}, R_{\lambda2}^{(1)}$ 是不同的. 但依据叠加原理及量测 $y(t)$ 在 η 区段内线性变化的假设, 也可以得到适用于 2^N 算法的表达式^[8]. 对于 $(0, \tau)$ 区段

$$R_{x1}^{(1)} = R_x^{(1)}(0, \tau), \quad R_{\lambda1}^{(1)} = R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \quad (29a)$$

对于 $(\tau, 2\tau)$ 区段

$$R_{x2}^{(1)} = \tau R_x^{(0)}(\tau) + R_x^{(1)}(0, \tau), \quad R_{\lambda2}^{(1)} = \tau R_\lambda^{(0)}(\tau) + R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \quad (29b)$$

式(29a), (29b)中的 $R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$ 由式(26a), (26b)计算, 而 $R_x^{(1)}(0, \tau)$ 和 $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ 则由其

Taylor 级数展开式

$$R_x^{(1)}(0, \tau) \approx \rho_{x11}\tau + \rho_{x12}\tau^2 + \rho_{x13}\tau^3 + \rho_{x14}\tau^4 \quad (30a)$$

$$R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \approx \rho_{\lambda11}\tau + \rho_{\lambda12}\tau^2 + \rho_{\lambda13}\tau^3 + \rho_{\lambda14}\tau^4 \quad (30b)$$

计算. 将(30a), (30b)代入(20a), (20b), 比较同幂次项可得上式中的系数为

$$\rho_{x11} = 0, \quad \rho_{x12} = 0, \quad \rho_{x13} = g_1 C^T / 3, \quad \rho_{x14} = (A\rho_{x13} + g_2 C^T) / 4 \quad (31a)$$

$$\rho_{\lambda11} = 0, \quad \rho_{\lambda12} = C^T / 2, \quad \rho_{\lambda13} = f_1^T C^T / 3, \quad \rho_{\lambda14} = (f_2^T C^T - e_1 \rho_{x13}) / 4 \quad (31b)$$

至此已可以计算混合能矩阵 $E(\eta), G(\eta), F(\eta), R_x^{(0)}(\eta), R_\lambda^{(0)}(\eta), R_x^{(1)}(0, \eta), R_\lambda^{(1)}(0, \eta)$.

3 Riccati 方程和滤波方程的精细积分

3.1 Riccati 方程精细积分及临界参数 γ_{cr}^{-2} 计算

由 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ 可以递推计算长度为 $2\eta, 3\eta, \dots, k\eta$ 区段的混合能矩阵. 若已计算了 $k\eta$ 长的区段, 以它为区段 1, 而 η 长的区段为区段 2, 由式(21a)~(21c)可以计算 $(k+1)\eta$ 长区段的 E, G, F . 但按此计算的 E 阵是方程(5)在边界条件为 0 时的解. 为求方程在任意边界条件 Q_0 时的解, 需假设在 t_0 处有一集中区段, 该区段的混合能矩阵为 $G_1 = Q_0, E_1 = 0, F_1 = I$, 以已经计算出的 $k\eta$ 长区段作为区段 2 按公式

$$Q = G + F(Q_0^{-1} + E)^{-1}F^T \quad (32)$$

$$F_q = F(I + Q_0 E)^{-1} \quad (33)$$

进行合并, 即可得 $k\eta$ 处 Riccati 方程(5)的解及微分方程(14c)在初始条件变化后的解. 本征值计数也应按下述公式再执行一遍

$$J_{Rq} = J_R - s\{Q_0\} + s\{Q_0^{-1}\} + E \quad (34)$$

按照文献[8]中的方法, 可以证明

$$\frac{dQ}{dt} = BB^T + AQ + QA^T - Q(C^T C - \gamma^{-2}L^T L)Q \quad (35)$$

当 $t=0$ 时, $E=G=0, F=I$, 可知由式(32)计算的 $Q(0) = Q_0$. 在所考虑的区间, 要求在最后执行完区段合并及本征值计数后 $J_{Rq} = 0$. 这表示可以增大给定的 $\gamma_{\#}^{-2}$. 如果此时 $J_{Rq} > 0$, 则表示 $\gamma_{\#}^{-2}$ 应当减小. 结合二分法经过多次迭代, 可以得到满足给定精度要求的临界参数 γ_{cr}^{-2} , 详细算法见文献[5].

3.2 滤波方程精细积分

得到临界参数 γ_{cr}^{-2} 后, 可根据要求取小于 γ_{cr}^{-2} 的值, 按上文的方法重新求解相应参数 γ^{-2} 的 Riccati 方程, 为求解滤波方程提供数据, 此时不再需要进行本征值计数. 可以验证式(33)中的 F_q 满足微分方程

$$\frac{dF_q}{dt} = (A - QC^T C)F_q \quad (36)$$

且 $F_q(0) = I$. 所以 F_q 的各列向量必满足滤波方程(4a)的齐次方程, 则(4a)的齐次方程的解可以表示为 $F_q \hat{x}_0$. 根据线性微分方程解的叠加原理, 齐次方程的解加上零初值条件时非齐次方程的解可构成滤波方程完整的解. 仍设在 t_0 处有一集中区段作为区段 1, 其区段矩阵为 $G_1 = Q_0, E_1 = 0, F_1 = I, R_{x1} = 0, R_{\lambda1} = 0$, 而 $k\eta$ 长的区段作为区段 2, 按合并公式(23)有

$$R_{xq} = R_x + F_q Q_0 R_\lambda \quad (37a)$$

$$R_{\lambda q} = (I + EQ_0)^{-1}R_\lambda \tag{37b}$$

其中 F_q 按(33)式计算. 可以证明 R_{xq} 满足的微分方程为

$$\frac{dR_{xq}}{dt} = (A - QC^T C)R_{xq} + QC^T Y \tag{38}$$

这与滤波方程相同. 因为 y 由 Y 线性组合而成, $\hat{x}(t)$ 可以由 R_{xq} 同样线性组合. 并且 $t \rightarrow 0$ 时, $R_{xq} = 0$, 所以 R_{xq} 是滤波方程零初值条件的解.

混合能矩阵 $E(\eta), G(\eta), F(\eta), R_x^{(0)}(\eta), R_\lambda^{(0)}(\eta), R_x^{(1)}(0, \eta), R_\lambda^{(1)}(0, \eta)$ 与量测 y 无关, 可以先计算存储. 滤波实时计算采用单步递推算法, 将已经算出的 $t_k = k\eta$ 时的 $Q(k)$ 和 $\hat{x}(k)$ 作为 Q_0, \hat{x}_0 进行下一步的计算.

4 算例

考虑二维系统初值响应的滤波, 设 w 为零, v 是均值为零、方差为 1 的白噪声. 其它数据为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad L = [0 \quad 0.2],$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T = 25.$$

首先利用精细积分法结合扩展的 W-W 算法计算临界参数

$$\gamma_{cr}^{-2} = 18.723 \ 298 \ 25,$$

然后取 $\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{cr}^{-2}$, 计算 Riccati 微分方程的解. 图 2 为 Riccati 微分方程的解.

Riccati 微分方程在 $T = 25$ 时的解记作 Q_T , 而对应的 Riccati 代数方程的解由 Matlab 软件中的函数 *are* 求解, 记作 Q_∞ . 其值分别为

$$Q_T = \begin{bmatrix} 1.138 \ 876 \ 908 & 0.607 \ 124 \ 167 \\ 0.607 \ 124 \ 167 & 1.610 \ 630 \ 415 \end{bmatrix}, \quad Q_\infty = \begin{bmatrix} 1.138 \ 877 \ 020 & 0.607 \ 124 \ 179 \\ 0.607 \ 124 \ 179 & 1.610 \ 630 \ 434 \end{bmatrix}.$$

可见两矩阵非常接近. 增加 T 则微分方程的稳态解趋近于对应代数方程的解, 两者将更加接近. 这也进一步验证了算法的可靠性. 系统状态及其滤波见图 3, 其中 $\hat{x}_0 = 0$.

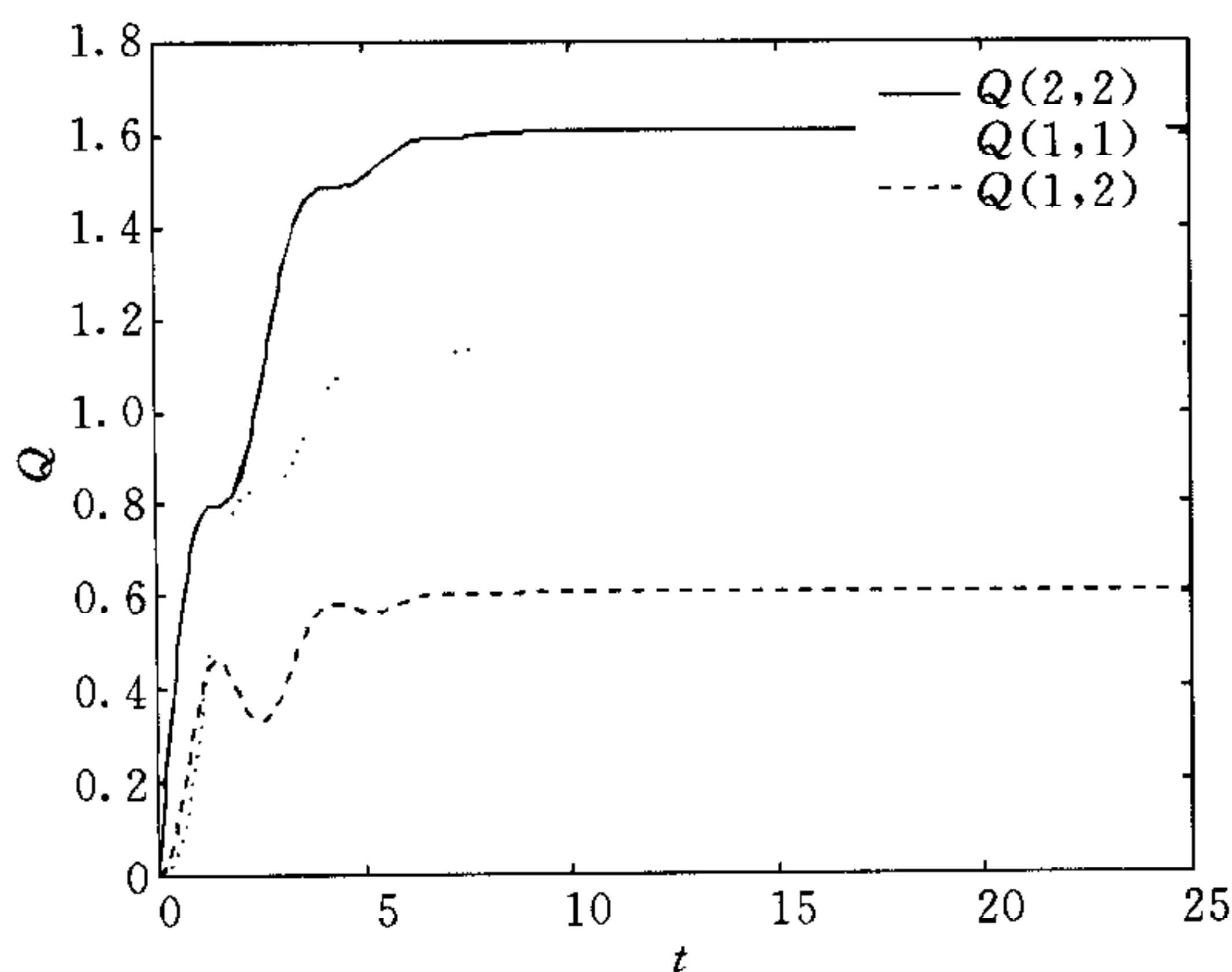


图 2 Riccati 微分方程的解

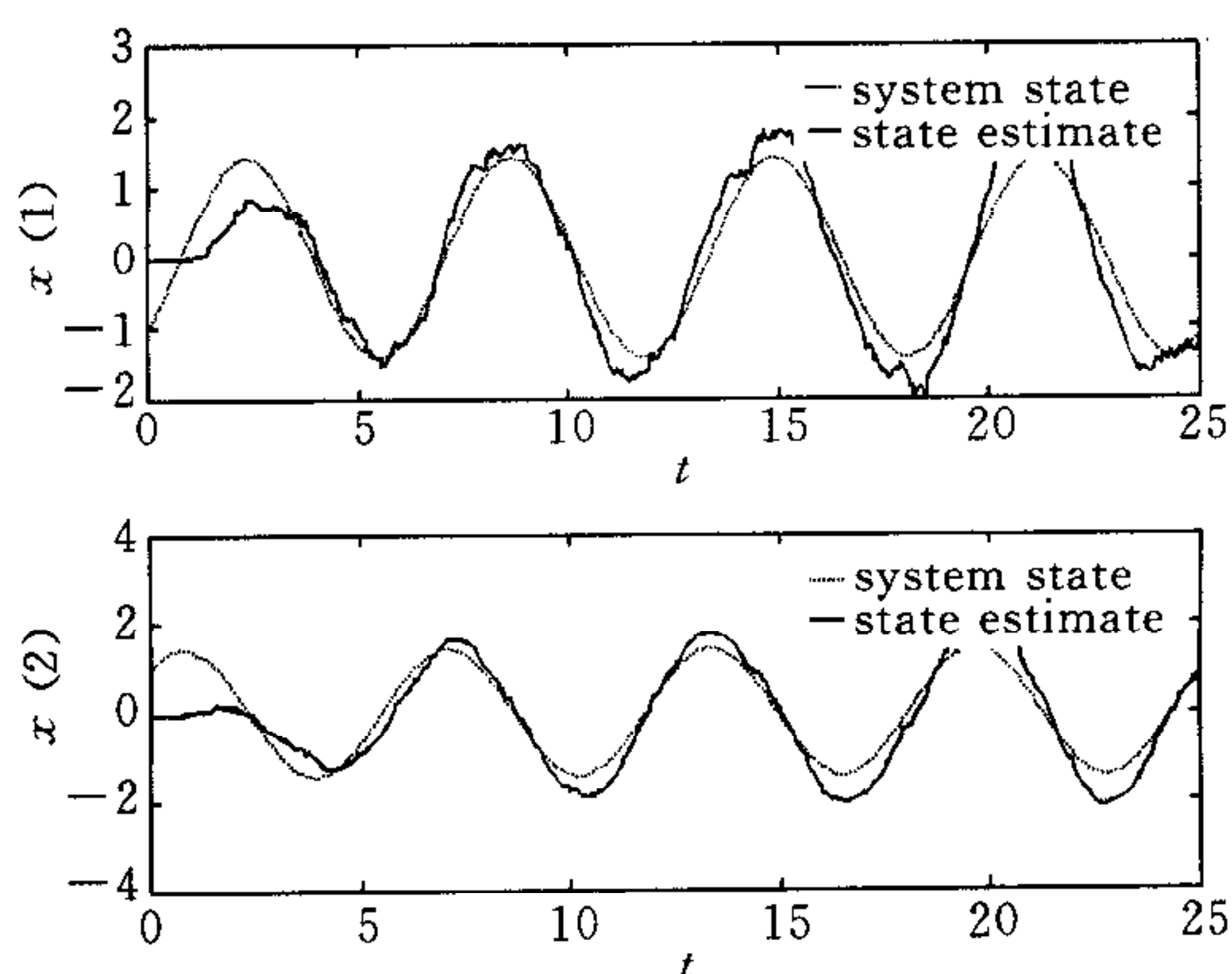


图 3 系统的状态及其滤波

5 结束语

对于有限时间段 H_∞ 滤波问题数值求解的研究文献并不多见, 本文在文献[5,8]的基础上介绍了用于这一问题数值求解的算法. 文中精细积分法的结果与 Matlab 函数计算结果的一致性也表明所介绍的算法是可靠有效的. 精细积分算法结合扩展 W-W 算法已经用于求解有限时间 H_∞ 控制中的计算问题, 这方面的内容参见文献[9,10].

参 考 文 献

- 1 Green M, Limebeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1995. 263~280
- 2 Doyal J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B. A State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **34**(8):831~847
- 3 解学书, 钟宜生. H_∞ 控制理论. 北京:清华大学出版社, 1994. 1~12
- 4 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用. 北京:清华大学出版社, 1996. 1~19
- 5 Zhong W X, Williams F W. H_∞ filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 1999, **46**(7):1017~1030
- 6 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. *Trans. ASME, J. Vibration and Acoustics*, 1997, **119**(7):334~340
- 7 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连:大连理工大学出版社, 1993. 106~127
- 8 钟万勰. 卡尔曼-布西滤波的精细积分. 大连理工大学学报, 1999, **39**(2):191~200
- 9 钟万勰. H_∞ 状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1998, **15**(4):1~8
- 10 Wu Z G, Zhong W X. Precise integration method for finite horizon H_∞ generalized regulator problem. In: Mao Jian-Qin, Cao Xi-Ren, Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, Hefei: Press of USTC, 2000, **5**:3436~3440

吴志刚 博士. 研究兴趣为 H_∞ 控制系统设计的数值方法及振动主动控制.

钟万勰 中国科学院院士. 目前主要研究领域包括工程力学中的哈密顿体系及 H_∞ 控制理论等.