

T-S 模糊控制系统的稳定性分析及系统化设计¹⁾

修智宏^{1,2} 任光¹

¹⁾(大连海事大学轮机工程学院 大连 116026)

²⁾(海军大连舰艇学院指控信息系 大连 116018)

(E-mail: xiuzh@sohu.com)

摘要 研究了输入采用双交叠模糊分划的模糊控制系统的性质,提出了一个新的判定 T-S 模糊控制系统稳定的充分条件. 该条件只需在各最大交叠规则组内分别寻找公共的正定矩阵,减小了以往稳定性判定方法的局限性和难度. 运用并行分布补偿法(PDC)进一步探讨了闭环 T-S 模糊控制系统的稳定性分析和模糊控制器系统化设计方法. 通过两个例子的仿真研究验证了本文方法的有效性.

关键词 模糊控制, 稳定性, 模糊分划, 系统化设计

中图分类号 TP273.4

Stability Analysis and Systematic Design of T-S Fuzzy Control Systems

XIU Zhi-Hong^{1,2} REN Guang¹

¹⁾(Marine Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026)

²⁾(Department of C³I, Dalian Naval Academy, Dalian 116018)

(E-mail: xiuzh@sohu.com)

Abstract The properties of fuzzy control systems employing two-overlapped fuzzy partition (TFP) inputs are studied, and a new sufficient condition to check the stability of a T-S fuzzy control system is proposed. This condition only requires finding a common positive-definite matrix in each maximal overlapped-rule group. It can reduce the difficulty of former stability analysis approaches. Using the method of parallel distributed compensation (PDC), the stability analysis of closed-loop T-S fuzzy control systems and the systematic design of fuzzy controllers are investigated farther. The simulation results of two examples show that these methods are effective.

Key words Fuzzy control, stability, fuzzy partition, systematic design

1 引言

T-S 模糊控制系统是目前模糊控制领域最活跃的一个分支. 该模型是 Takagi 和 Sugeno 在

1) 高等学校博士学科点专项科研基金(20030151005)和交通部应用基础研究项目(200332922505)资助

Supported by Doctoral Foundation of Educational Committee (20030151005) and Ministry of Communication (200332922505) of P. R. China

收稿日期 2003-02-10 收修改稿日期 2003-08-12

Received February 10, 2003; in revised form August 12, 2003

1985 年提出的^[1],近年来许多学者对 T-S 模糊控制系统的设计方法及稳定性分析进行了研究. 基于 Lyapunov 直接方法, Tanaka 等人^[2]研究了 T-S 模糊控制系统的稳定性问题,最后的稳定性判据归结为在所有的局部子系统中寻找一个公共的正定矩阵 P . 然而,在工程应用中对于实际控制对象,规则数一般较大,要寻找一个适合所有规则的公共正定矩阵 P 是非常困难的. 其后 Cao^[3], Johansson^[4], Zhang^[5] 等人作了进一步的研究,他们的研究结果在一定程度上放宽了 Tanaka 等人的稳定性判定条件,但也各自存在一些不足之处. Cao 等人将 T-S 模糊系统视为一种线性不确定系统,没有充分利用模糊规则前件输入变量隶属度的结构信息,局部子系统的不确定上界较难确定. Johansson 等人虽然利用了输入变量隶属度的结构信息,但局限于所寻找的分段 Lyapunov 函数的连续性,需在数量远大于模糊规则数的局部区域内分别寻找局部公共正定矩阵,稳定性的判定较困难. Zhang 等人采用的最大隶属度去模糊法与常用的重心法相比,没有充分利用激活度较小的规则信息,应用范围有限. 综上所述,由于 T-S 模糊控制系统本质上的非线性和复杂性,其稳定性分析及系统化设计尚未得到完善的解决.

本文在文献[2~5]研究成果的基础上,总结了工程应用中绝大多数的模糊控制系统输入变量模糊隶属度函数的共同特点——两-两交叠性,定义了模糊控制系统输入变量的双交叠模糊分划,研究了输入变量采用双交叠模糊分划的模糊控制系统的性质. 在此基础上,通过构建分段光滑的 Lyapunov 函数提出了一个新的判定 T-S 模糊控制系统稳定性的充分条件. 然后,利用并行分布补偿法(PDC)^[6,7]和线性矩阵不等式(LMI)方法^[7],进一步探讨了闭环 T-S 模糊控制系统的稳定性分析和系统化设计方法.

2 输入采用双交叠模糊分划的 T-S 模糊控制系统

2.1 T-S 模糊控制系统模型

用 R_i 表示模糊系统的第 i 条规则, T-S 模糊控制系统的模型可描述如下:

$$R_i: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i \text{ THEN } \dot{x} = A_i x + B_i u, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (1)$$

其中, $x_k, F_k^i, i = 1, \dots, l, k = 1, \dots, n$, 分别为模糊系统的输入状态变量和模糊集.

$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ 为模糊系统的状态向量.

采用单点模糊法、Sum-Product 推理、重心法去模糊,模糊控制系统总体模型为

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l w_i (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^l w_i} \quad (2)$$

其中, $w_i = \prod_{k=1}^n F_k^i(x_k(t))$, 为第 i 条规则的激活度.

令 $h_i = w_i / \sum_{j=1}^l w_j$, 则(2)式可改写为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (3)$$

当输入为零时系统的自由模型可描述为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i A_i x(t) \quad (4)$$

2.2 双交叠模糊分划的有关定义

在大多数情况下,模糊控制系统中输入变量模糊分划的模糊集具有两-两交叠的性质.模糊集可以用隶属度函数来表示,假定本文所涉及的隶属度函数 $F(x)$ 在论域 X 上是连续函数,下面明确有关双交叠模糊分划的几个概念.

定义 1. 称模糊集组 $\{F_i, i=1, 2, \dots, m\}$ 为论域 X 的一个双交叠模糊分划(TFP),如果 $F_i (i=1, 2, \dots, m)$ 在论域 X 上是两-两交叠的.称数值 m 为论域 X 的模糊分划数.

定义 2. 对于系统的某一状态输入 $x=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 所有激活度 $w_i > 0$ 的规则构成了一个交叠规则组.该状态输入 x 称为此交叠规则组的一个作用点.所有作用点的集合称为该交叠规则组的作用域.

定义 3. 在所有交叠规则组中,包含规则数最多的交叠规则组称为最大交叠规则组.

2.3 输入采用双交叠模糊分划的模糊控制系统的性质

通过研究,我们得到了输入变量采用双交叠模糊分划的模糊控制系统的两个重要性质,具体证明见附录 A.

性质 1. 输入采用双交叠模糊分划的模糊控制系统,其最大交叠规则组中包含的规则数为 2^n ,最大交叠规则组共有 $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ 个.其中 n 为输入变量的个数, m_i 为第 i 个输入变量的模糊分划数.

性质 2. 如果模糊控制系统的各输入变量均采用双交叠模糊分划,则任一交叠规则组中所包含的规则均包含于某一最大交叠规则组.

3 T-S 模糊控制系统的稳定性分析

3.1 Lyapunov 稳定性理论

由 Lyapunov 直接法,判定控制系统稳定性的充分条件如下.

定理 1. 设系统可表示为 $\dot{x} = f(x)$, 其中 $x \in R^n$, $f(x)$ 为 $n \times 1$ 的函数向量,且 $f(0) = 0$. 如果存在一个标量函数 $V(x)$ 满足

- $V(0) = 0$,
- 对所有的 $x \neq 0$, $V(x) > 0$,
- 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$,
- 对所有的 $x \neq 0$, $\dot{V}(x) < 0$.

则系统的平衡状态 $x=0$ 是大范围渐进稳定的,且 $V(x)$ 是一个 Lyapunov 函数.

Cao 等人^[3]将定理 1 中 Lyapunov 函数 $V(x)$ 的条件进一步放宽为只要是分段光滑的二次型函数,且在间断点的左、右偏导数均小于 0 即可.

利用定理 1, Tanaka 等人^[2]研究了 T-S 模糊控制系统的稳定性,得到如下定理.

定理 2. (4)式所示的 T-S 模糊控制系统在平衡点是大范围渐进稳定的充分条件是存在一个公共正定矩阵 P , 对所有的子系统满足

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (5)$$

3.2 自由 T-S 模糊控制系统的稳定性分析

在定理 2 基础上,我们对输入采用双交叠模糊分划的自由 T-S 模糊控制系统的稳定性

作了进一步研究,得到如下定理.

定理 3. 对于(4)式所示的自由 T-S 模糊控制系统,如果各输入变量均采用双交叠模糊分划,则系统在平衡状态大范围渐进稳定的充分条件是:在各最大交叠规则组中分别存在一个公共的正定矩阵 P_j 满足 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0$, 对第 j 个最大交叠规则组中所有子系统都成立, $j=1, 2, \dots, \prod_{p=1}^n (m_p - 1)$; $i \in \{\text{第 } j \text{ 个最大交叠规则组中包含的规则序号}\}$.

证明. 设系统的状态输入为 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 系统共有 r 个交叠规则组, $l_j = \{\text{第 } j \text{ 个交叠规则组包含的规则序号}\}$, 各交叠规则组的作用域为: $S_j (j=1, 2, \dots, r)$, 则 $\bigcup_{j=1}^r S_j = S$.

在第 j 个交叠规则组的作用域 S_j 上系统的局部模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{l_j} h_i A_i \mathbf{x} \quad (6)$$

如果在 S_j 上存在公共正定矩阵 P_j 满足

$$A_i^T P_j + P_j A_i < 0, \quad i \in l_j \quad (7)$$

选择 $V_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_j \mathbf{x}$ 为该交叠规则组作用域上的一个 Lyapunov 函数, 则容易验证 $V_j(\mathbf{x})$ 在作用域 S_j 上满足定理 1 的 a), b), c).

对所有的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 由(6), (7)式和 $h_i > 0$, 可推出

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(\mathbf{x}) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (V_j(\mathbf{x}(t+\Delta)) - V_j(\mathbf{x}(t))) = \dot{\mathbf{x}}^T P_j \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_j \dot{\mathbf{x}} = \\ & \left(\sum_{l_j} h_i A_i \mathbf{x} \right)^T P_j \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_j \left(\sum_{l_j} h_i A_i \mathbf{x} \right) = \sum_{l_j} h_i \{ \mathbf{x}^T (A_i^T P_j + P_j A_i) \mathbf{x} \} < 0 \end{aligned} \quad (8)$$

因此 $V_j(\mathbf{x})$ 在作用域 S_j 上也满足定理 1 的 d).

仿照文献[5]中的方法, 在各交叠规则组的作用域上定义如下特征函数

$$\lambda_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in S_j \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (9)$$

则模糊系统在整个输入论域上的总模型可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(\mathbf{x}) \left(\sum_{l_j} h_i A_i \mathbf{x} \right) \quad (10)$$

令 $P = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$, 在整个输入论域上构造 Lyapunov 函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j \right) \mathbf{x} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{x}^T P_j \mathbf{x} = \sum_{j=1}^r \lambda_j V_j(\mathbf{x}) \quad (11)$$

容易验证 $V(\mathbf{x})$ 满足定理 1 的 a), b), c) 三条. 我们注意到 $V(\mathbf{x})$ 是分段连续函数, 因此在间断点的左侧和右侧分别取左导数和右导数. 由导数定义和(8)式可知当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (V(\mathbf{x}(t+\Delta)) - V(\mathbf{x}(t))) = \\ & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j V_j(\mathbf{x}(t+\Delta)) - \sum_{j=1}^r \lambda_j V_j(\mathbf{x}(t)) \right) = \\ & \sum_{j=1}^r \lambda_j \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (V_j(\mathbf{x}(t+\Delta)) - V_j(\mathbf{x}(t))) \right) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \dot{V}_j < 0 \end{aligned}$$

$V(\mathbf{x})$ 满足定理 1 的 d), 因此, $V(\mathbf{x})$ 是(4)式所示模糊系统的一个分段 Lyapunov 函数.

由此,我们可以得到如下结论:如果输入变量采用双交叠模糊分划,在(4)式所示模糊控制系统的各交叠规则组中分别存在公共的正定矩阵 P_j 使 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0$ 对该组中所有子系统成立,则系统在平衡状态是大范围渐进稳定的.

当输入变量采用双交叠模糊分划时,由性质 2 可知,只要在各最大交叠规则组内分别存在公共的正定矩阵 P_j 满足 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0$ 即可 证毕.

3.3 自由 T-S 模糊控制系统的稳定性分析示例

一个双输入单输出自由 T-S 模糊控制系统,其规则的形式如下

$$R_{ij}: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^j \text{ THEN } \dot{x} = A_{ij}x, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \quad (12)$$

x_1 的模糊分划为 $\{F_1^i, i=1, 2, 3\}$, x_2 的模糊分划为 $\{F_2^j, j=1, 2, 3\}$, F_1^i, F_2^j 均采用梯形隶属度函数,符合双交叠模糊分划的条件. 系统输入平面上的示意图见图 1. 其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -71 & -30 & 33 \\ -77 & -48 & -19 \\ -25 & 94 & -74 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -89 & 25 & -88 \\ -34 & -69 & -50 \\ -28 & 80 & -80 \end{bmatrix}, \quad A_{31} = \begin{bmatrix} -81 & -35 & -11 \\ -55 & -82 & -22 \\ -94 & -51 & -55 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 11 & 32 & 68 \\ 20 & -54 & 88 \\ -72 & -11 & -89 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -36 & -89 & -41 \\ 28 & -94 & 8 \\ 56 & 53 & 27 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} -12 & 43 & 13 \\ -65 & -49 & 4 \\ 53 & 89 & -81 \end{bmatrix},$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -66 & -27 & -69 \\ 70 & -68 & -28 \\ 26 & 17 & 82 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -96 & -75 & -65 \\ -26 & -96 & -33 \\ 79 & -78 & -70 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} -74 & 66 & -98 \\ -67 & -23 & -14 \\ 83 & 49 & -44 \end{bmatrix}$$

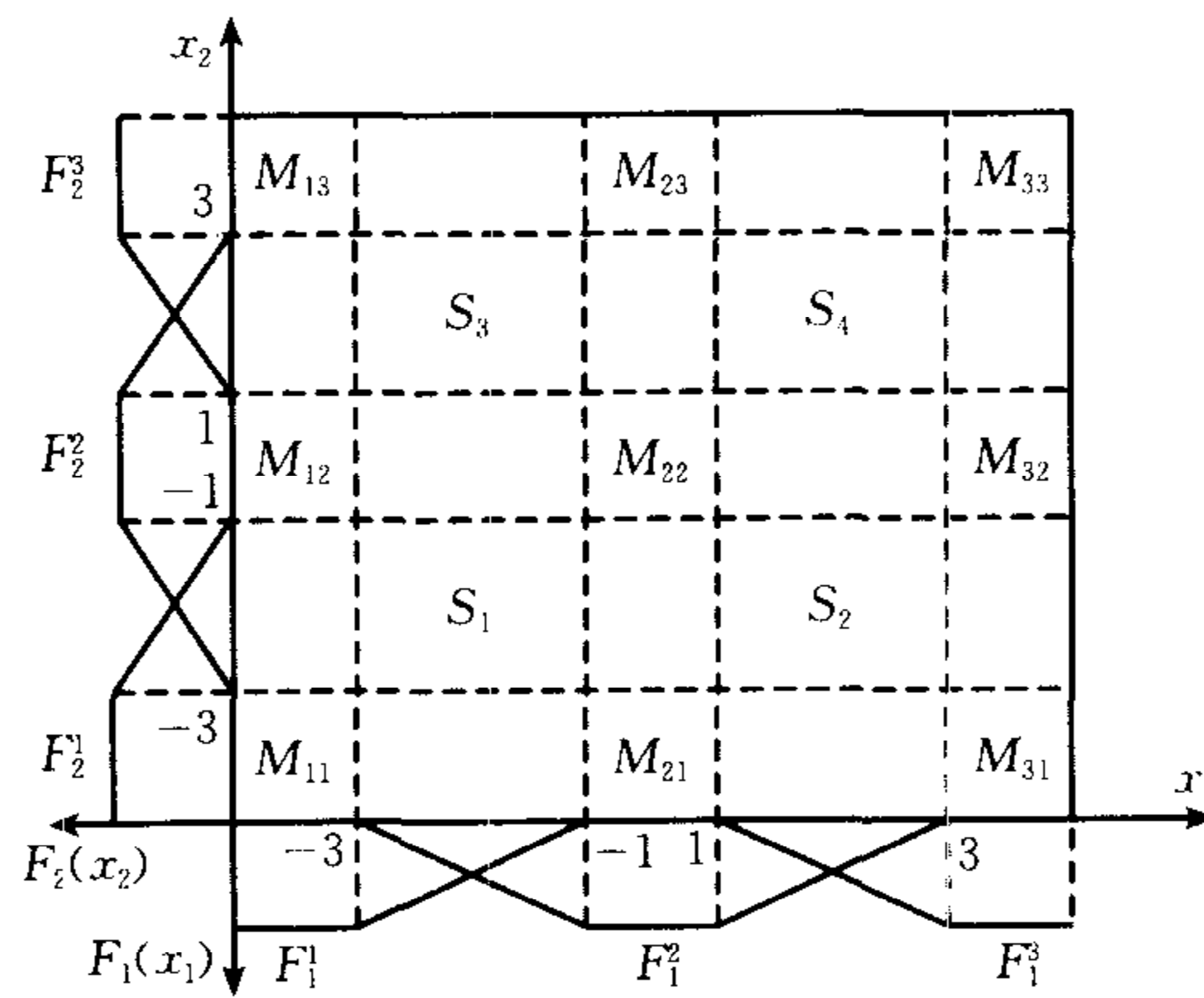


图 1 两输入单输出模糊系统的输入平面示意图

Fig. 1 The sketch map of a TISO system input space

该系统的模糊控制规则共有 9 条,如果采用定理 2,需寻找 9 个子系统的公共正定矩阵 P 满足 $A_{ij}^T P + P A_{ij} < 0, i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$. 通过 LMI 方法可以验证找不到这样的公共正定矩阵 P ,因而无法判别系统的稳定性. 从图 1 中可以清楚地看到,系统一共有 25 个交叠规则组,其中 $M_{11} \sim M_{33}$ 分别为只包含规则 R_{ij} 的单规则组的作用域; $S_1 \sim S_4$ 分别为 4 个最大交叠规则组的作用域,例如 S_1 包含了 $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ 4 条规则. 其余 12 个交叠规则组均只包含 2 条规则. 通过 LMI 方法我们在最大交叠规则组 $S_1 \sim S_4$ 中分别找到如下 4 个公共正定矩阵 P_1, P_2, P_3, P_4 , 因此根据定理 3 可以判定(12)式所示 T-S 模糊控制系统是稳定的. 这个

例子说明了定理 3 的稳定性条件比定理 2 的局限性小.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0433 & -0.0121 & 0.0243 \\ -0.0121 & 0.0324 & -0.0012 \\ 0.0243 & -0.0012 & 0.0323 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0996 & 0.0209 & 0.0455 \\ 0.0209 & 0.1225 & 0.0211 \\ 0.0455 & 0.0211 & 0.0588 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.0071 & -0.0019 & 0.0036 \\ -0.0019 & 0.0047 & 0.0001 \\ 0.0036 & 0.0001 & 0.0048 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 8.5568 & 1.7877 & 3.9194 \\ 1.7877 & 10.4678 & 1.7978 \\ 3.9194 & 1.7978 & 5.0781 \end{bmatrix}.$$

为了验证定理 3 的有效性,我们对(12)式所示的模糊控制系统进行了计算机仿真,证实了在各种初始条件下系统状态都是稳定的,图 2 为初始条件为 $x_0 = [-4, 4, 0]^T$ 时系统的状态响应曲线.

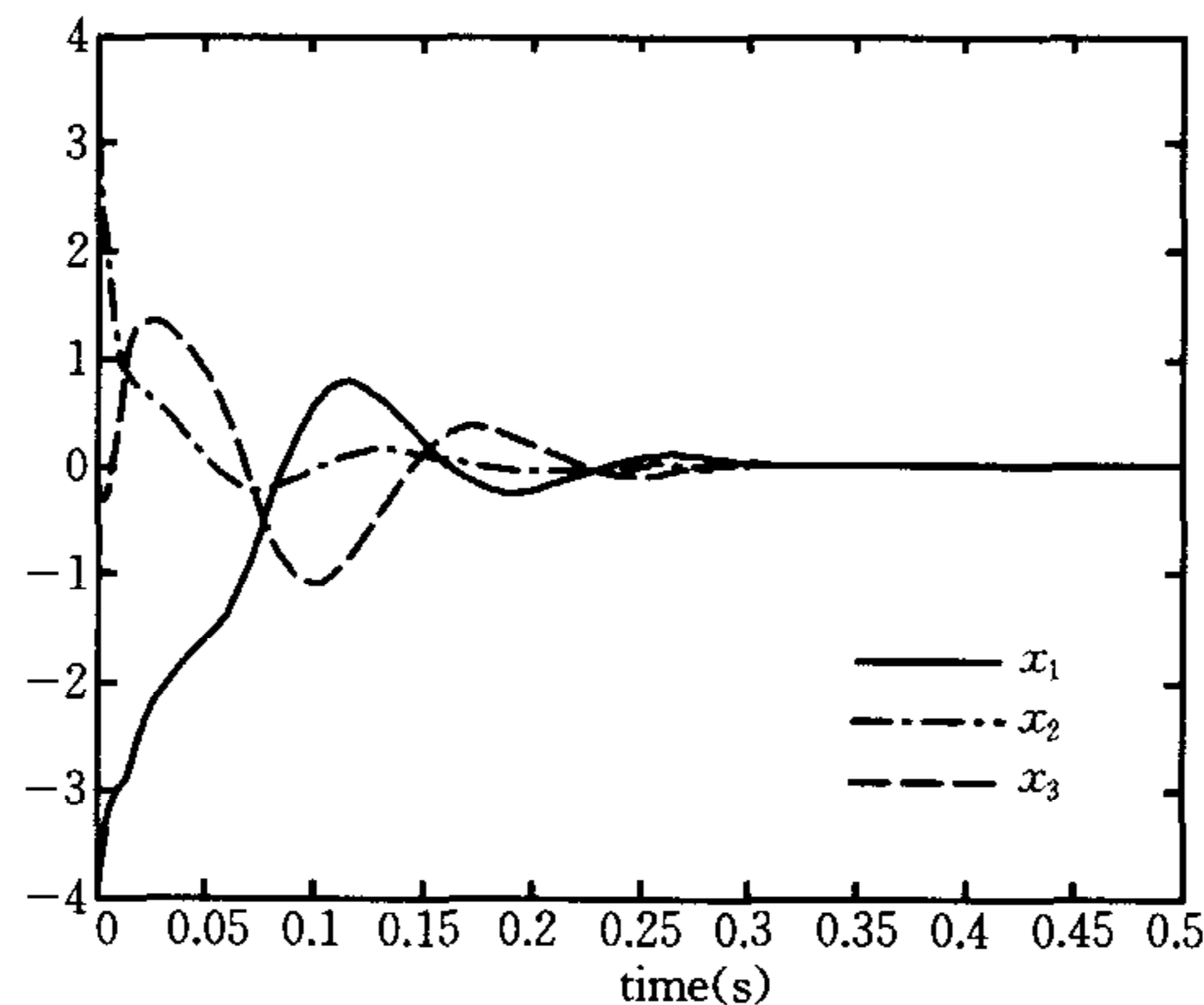


图 2 初始条件为 $x_0 = [-4, 4, 0]^T$ 时系统的状态响应曲线

Fig. 2 The system state responses under initial condition of $x_0 = [-4, 4, 0]^T$

4 T-S 模糊控制系统的系统化设计方法

4.1 并行分布补偿原理

对于(1)式所示控制对象的 T-S 模型,并行分布补偿^[6,7]的基本思路是:首先对(1)式的每一个子系统分别设计局部控制器 $u = -K_i x$,各局部控制器共享(1)式的规则前件,然后由各局部控制器合成总的模糊控制器.系统(1)相应的模糊控制器规则为

$$R_i: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i \text{ THEN } u = -K_i x, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (13)$$

模糊控制器的总体模型为

$$u = - \sum_{i=1}^l h_i K_i x \quad (14)$$

4.2 闭环 T-S 模糊控制系统的稳定性分析

当(1)式中 $B_1 = B_2 = \cdots = B_l = B$, 令 $G_i = A_i - BK_i$, 由(14)式与(3)式综合后闭环 T-S 模糊控制系统的总体模型为

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^l h_i (A_i - BK_i) x = \sum_{i=1}^l h_i G_i x \quad (15)$$

(15)式与(4)式所示自由系统模型的形式完全一致,因此在设计过程中可以利用定理 3

检验闭环模糊控制系统的稳定性.

当(1)式中 B_1, B_2, \dots, B_l 不相等时, 不能直接应用定理 3 来判定闭环控制系统稳定性. 我们在文献[7]的定理 2、定理 3 的基础上作了进一步的研究, 得到如下定理.

定理 4. 对于(1)式所示 T-S 模糊对象模型, 采用(13)式所示模糊控制器, 如果各输入变量均采用双交叠模糊分划, 令 $G_{ik} = A_i - B_i K_k$, 则闭环 T-S 模糊控制系统在平衡状态大范围渐进稳定的充分条件是: 在各最大交叠规则组中分别存在一个公共的正定矩阵 P_j , 满足条件 (C_1) 或 (C_2) .

$$(C_1): G_{ik}^T P_j + P_j G_{ik} < 0,$$

$$i, k \in \{\text{第 } j \text{ 个最大交叠规则组中包含规则的序号}\}; j = 1, 2, \dots, \prod_{p=1}^n (m_p - 1).$$

$$(C_2): G_{ii}^T P_j + P_j G_{ii} < 0,$$

$$i \in \{\text{第 } j \text{ 个最大交叠规则组中包含的规则序号}\};$$

$$\text{和 } \left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right)^T P_j + P_j \left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right) < 0,$$

$$i, k \in \{\text{第 } j \text{ 个最大交叠规则组中包含规则的序号}\} \text{ 且 } i < k;$$

$$j = 1, 2, \dots, \prod_{p=1}^n (m_p - 1).$$

证明. 在第 j 个交叠规则组的作用域 S_j 上有 $h_i, h_k \geq 0$, $\sum_{l_j} \sum_{l_j} h_i h_k = 1$, $\sum_{l_j} h_i^2 + 2 \sum_{l_j}^{i < k} h_i h_k =$

1, 因此闭环系统的局部模型为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \sum_{l_j} h_i \{ A_i \mathbf{x} - B_i (\sum_{l_j} h_k K_k \mathbf{x}) \} = \left\{ \sum_{l_j} \sum_{l_j} h_i h_k (A_i - B_i K_k) \right\} \mathbf{x} = \\ & \left\{ \sum_{l_j} \sum_{l_j} h_i h_k G_{ik} \right\} \mathbf{x} = \left\{ \sum_{l_j} h_i^2 G_{ii} + 2 \sum_{l_j}^{i < k} h_i h_k \left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right) \right\} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (16)$$

如果在 S_j 上存在公共正定矩阵 P_j , 满足条件(17)式或(18), (19)式

$$G_{ik}^T P_j + P_j G_{ik} < 0, \quad i, k \in l_j \quad (17)$$

$$G_{ii}^T P_j + P_j G_{ii} < 0, \quad i \in l_j \quad (18)$$

$$\left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right)^T P_j + P_j \left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right) < 0, \quad i, k \in l_j \text{ 且 } i < k \quad (19)$$

选择 $V_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_j \mathbf{x}$ 为该交叠规则组作用域上的一个 Lyapunov 函数, 则容易验证 $V_j(\mathbf{x})$ 在作用域 S_j 上满足定理 1 的 a), b), c). 对所有的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 由(17)或(18), (19)式, 可推出

$$\dot{V}_j(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (V_j(\mathbf{x}(t + \Delta)) - V_j(\mathbf{x}(t))) = \dot{\mathbf{x}}^T P_j \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P_j \dot{\mathbf{x}} = \left(\sum_{l_j} \sum_{l_j} h_i h_k G_{ik} \mathbf{x} \right)^T P_j \mathbf{x} +$$

$$\mathbf{x}^T P_j \left(\sum_{l_j} \sum_{l_j} h_i h_k G_{ik} \mathbf{x} \right) = \sum_{l_j} \sum_{l_j} h_i h_k \{ \mathbf{x}^T (G_{ik}^T P_j + P_j G_{ik}) \mathbf{x} \} =$$

$$\sum_{l_j} h_i^2 \{ \mathbf{x}^T (G_{ii}^T P_j + P_j G_{ii}) \mathbf{x} \} + 2 \sum_{l_j}^{i < k} h_i h_k \left\{ \mathbf{x}^T \left(\left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right)^T P_j + P_j \left(\frac{G_{ik} + G_{ki}}{2} \right) \right) \mathbf{x} \right\} < 0$$

因此 $V_j(\mathbf{x})$ 在作用域上也满足定理 1 的 d).

其余的证明过程与定理 3 的证明相同, 这里就不再赘述.

证毕.

说明. 在每个最大交叠规则组内, 当输入变量的维数为 n 时, (C1) 需判定 $1 + 2^{2n}$ 个矩阵

不等式, (C2)需判定 $1+2^{n-1}(2^n+1)$ 个矩阵不等式, 因此当输入变量维数较大时, 利用(C2)更为方便.

4.3 模糊控制器的系统化设计方法

由线性控制理论, 如果状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ 的系统状态完全可控, 则可以利用状态反馈控制器 $u = -Kx$ 来任意配置闭环系统的极点从而使系统达到期望的性能指标. 因此, 对于(1)式所示输入采用双交叠模糊分划的 T-S 模糊系统, 如果局部线性子系统均可控, 即 (A_i, B_i) , $i=1, \dots, l$ 为可控对, 则其模糊控制器的系统化设计的步骤如下.

Step 1. 对于(1)式所示的 T-S 模糊系统模型, 验证各线性子系统的可控性.

Step 2. 应用线性系统理论, 根据期望的闭环控制系统的性能指标, 选取各局部线性子系统闭环极点的位置.

Step 3. 采用 Achermann's 公式, 计算每一个局部线性子系统的状态反馈矩阵 K_i .

Step 4. 根据性质 1 找出系统所有的最大交叠规则组, 应用定理 3、4 检验闭环模糊控制系统的稳定性. 如果不满足定理 3、4 的条件, 应回到 Step2 重新配置相应子系统的闭环极点位置, 直到在所有最大交叠规则组内都满足定理 3、4 的条件.

Step 5. 按(14)式将各局部线性子系统的状态反馈控制器合成系统总体控制器模型, 通过计算机仿真或实际试验, 如果达到预期的控制效果则模糊控制器设计完毕; 否则回到 Step2 重新配置相应子系统的闭环极点位置, 直到达到预期的控制效果.

4.4 闭环 T-S 模糊控制系统稳定性分析和模糊控制器系统化设计示例

为了验证本文提出的闭环 T-S 模糊控制系统稳定性分析及模糊控制器系统化设计方法的有效性, 我们采用文献[6]的非线性质量块-弹簧-阻尼器系统为研究对象, 进行了模糊控制器设计和仿真. 该系统的微分方程为

$$\ddot{x} = -\dot{x}^3 - 0.01x - 0.1x^3 + (1 + 0.13\dot{x}^3)u \quad (20)$$

其中, x 为质量块的位置, u 是外力, 并设

$$x \in [-1.5, 1.5], \quad \dot{x} \in [-1.5, 1.5]$$

(20)式的非线性对象可以用以下 T-S 模糊系统模型来近似

$$R_i: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^i \text{ THEN } \dot{x} = A_i x + B_i u, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (21)$$

其中 $x_1 = x$, 模糊分划为 $\{F_{1j}, j=1, 2, 3\}$; $x_2 = \dot{x}$, 模糊分划为 $\{F_{2k}, k=1, 2, 3\}$; 采用如图 3 所示的三角形隶属度函数. $F_1^1 = F_1^4 = F_1^7 = F_{11}$, $F_1^2 = F_1^5 = F_1^8 = F_{12}$, $F_1^3 = F_1^6 = F_1^9 = F_{13}$, $F_2^1 = F_2^2 = F_{21}$, $F_2^4 = F_2^5 = F_2^6 = F_{22}$, $F_2^7 = F_2^8 = F_2^9 = F_{23}$.

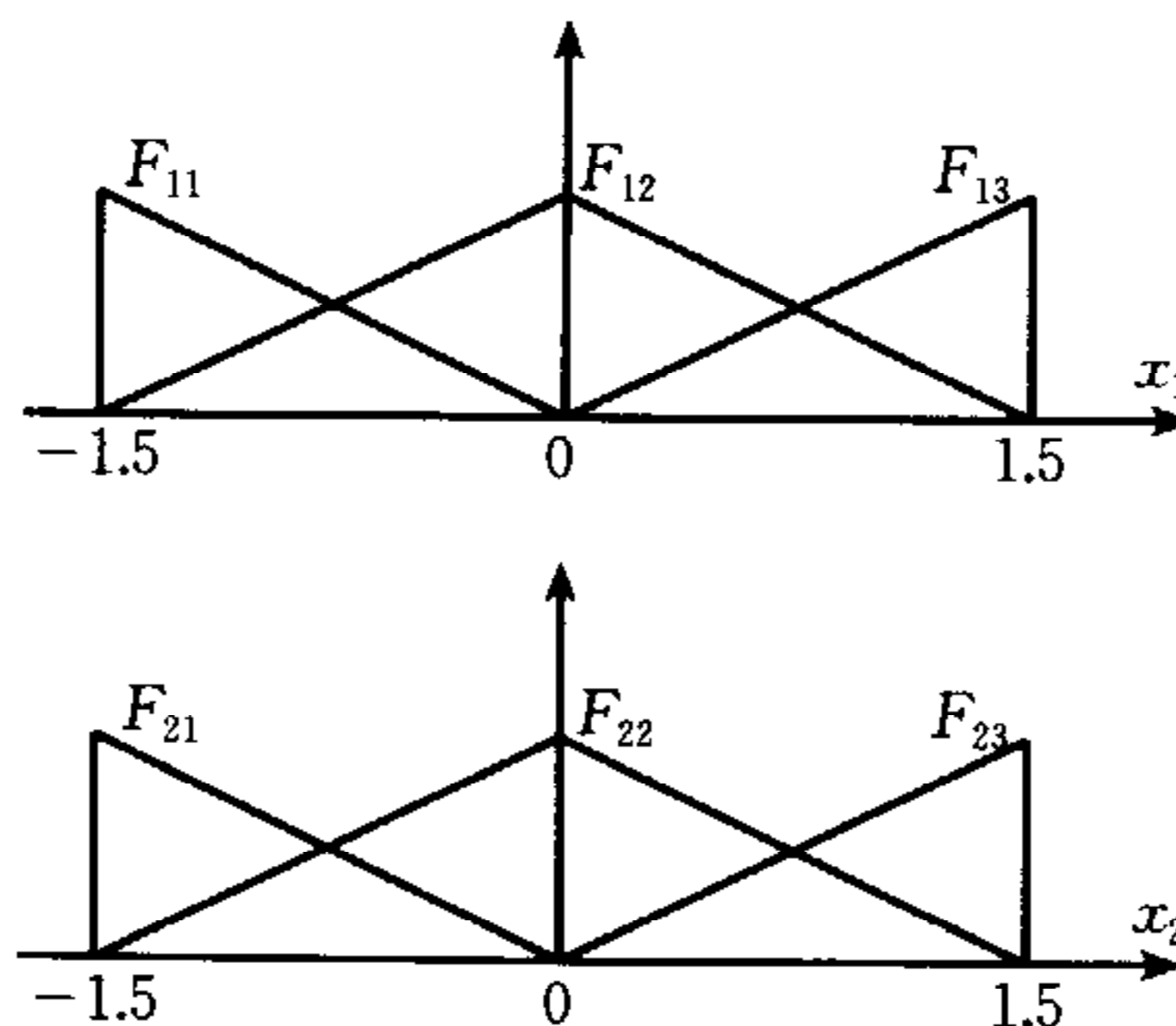


图 3 输入变量的隶属度函数

Fig. 3 The membership functions of input variables

由于输入变量采用双交叠模糊分划,根据性质 1 我们可以找到该系统的 4 个最大交叠规则组: S_1 包含了 R_1, R_2, R_4, R_5 4 条规则, S_2 包含了 R_2, R_3, R_5, R_6 4 条规则, S_3 包含了 R_4, R_5, R_7, R_8 4 条规则, S_4 包含了 R_5, R_6, R_8, R_9 4 条规则.

各线性子系统的状态矩阵为

$$A_1 = A_3 = A_7 = A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & -2.25 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -2.25 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_4 = B_7 = [0, 0.7046]^T, \quad B_2 = B_5 = B_8 = [0, 1]^T, \quad B_3 = B_6 = B_9 = [0, 1.2954]^T.$$

假设通过状态反馈 9 个局部线性子系统的期望的闭环极点位置均为 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = [-2, -2]$. 由 Achermann's 公式,可以计算出各局部线性子系统的状态反馈矩阵为 $K_1 = [5.3435, 2.4837]$, $K_2 = [3.765, 4.0]$, $K_3 = [2.9064, 1.3509]$, $K_4 = [5.6628, 2.4837]$, $K_5 = [3.99, 4.0]$, $K_6 = [3.0801, 1.3509]$, $K_7 = [5.3435, 2.4837]$, $K_8 = [3.765, 4.0]$, $K_9 = [2.9064, 1.3509]$, 然后分别计算出 $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, $i=1, 2, \dots, 9; j=1, 2, \dots, 9$.

在系统的 4 个最大交叠规则组 $S_1 \sim S_4$ 内通过 LMI 方法可以找到满足定理 4 的条件 (C1) 的公共正定矩阵

$$P_1 = P_3 = \begin{bmatrix} 24.7317 & 2.6665 \\ 2.6665 & 3.4956 \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_4 = \begin{bmatrix} 0.801 & 0.0971 \\ 0.0971 & 0.1393 \end{bmatrix},$$

因而可以判定通过状态反馈控制 $u = -Kx$ 后, (21) 式的闭环系统是稳定的.

根据 (20) 式通过计算机仿真,验证了在各种初始条件下闭环系统的状态都是稳定的,图 4 为初始条件为 $x_0 = [-1, -1]^T$ 时系统的状态响应曲线.

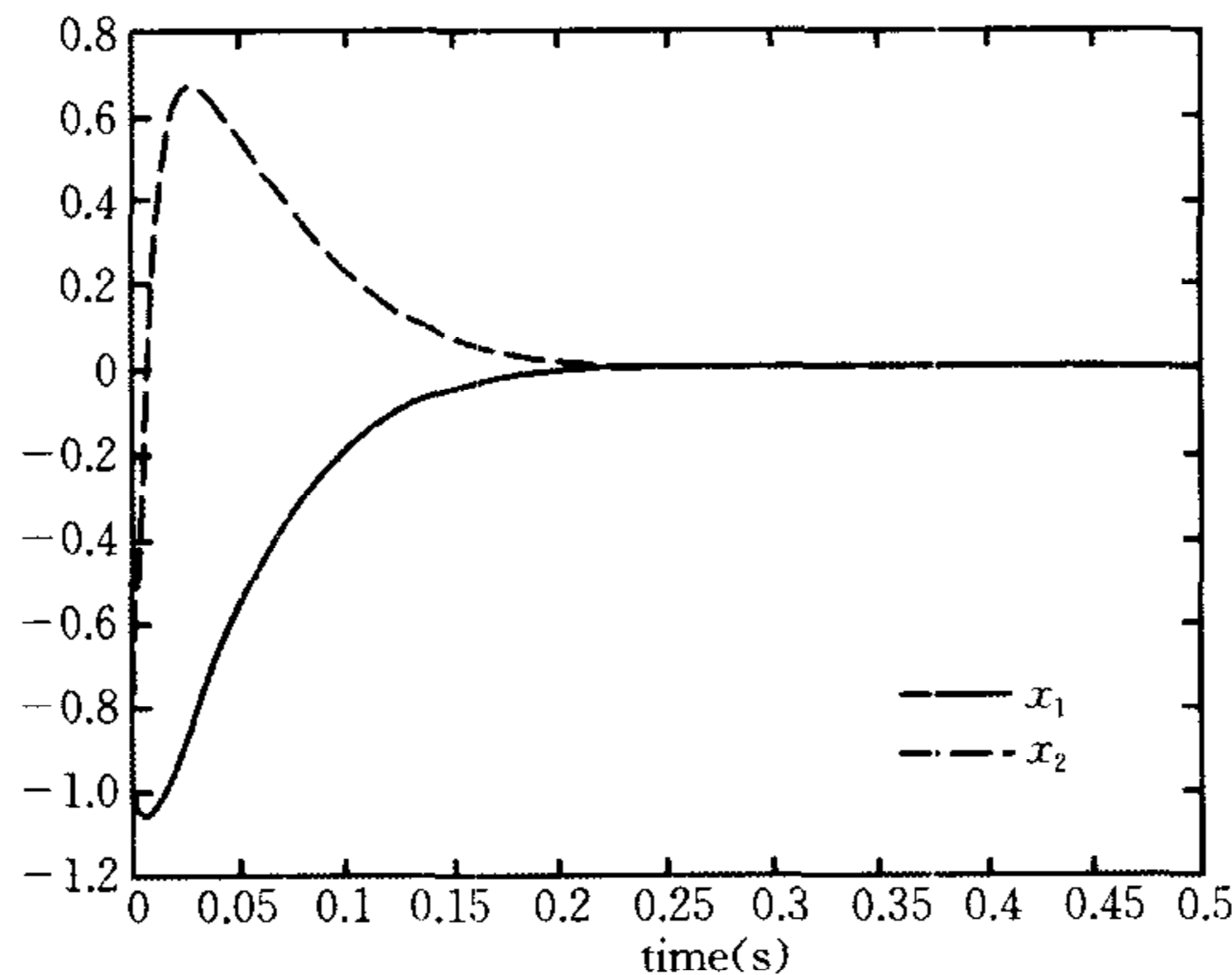


图 4 初始条件为 $x_0 = [-1, -1]^T$ 时闭环系统状态响应曲线

Fig. 4 The system state responses under initial condition of $x_0 = [-1, -1]^T$

5 小结

本文根据工程应用中绝大多数模糊控制系统输入变量模糊隶属度函数的共同特点,明

确定了模糊控制系统输入变量的双交叠模糊分划,并研究了输入变量采用双交叠模糊分划的模糊控制系统的性质.在此基础上,通过构建分段光滑的 Lyapunov 函数提出了一个新的判定 T-S 模糊控制系统稳定的充分条件,该方法充分利用了模糊规则前件输入变量模糊隶属度函数的结构信息,减小了以往稳定性判定方法的局限性和难度.利用平行分布补偿法和线性矩阵不等式方法,进一步探讨了闭环 T-S 模糊控制系统的稳定性分析和模糊控制器系统化设计方法.仿真研究结果表明,本文提出的 T-S 模糊控制系统稳定性分析和系统化设计方法是有效的.

References

- 1 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, **15**(1):116~132
- 2 Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **45**:135~156
- 3 Cao S G, Rees N W, Feng G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems. *System Science*, 1996, **27**(2):193~203
- 4 Johansson M, Rantzer A, Arzen K E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, **7**(6):713~722
- 5 Zhang J M, Li R H, Zhang P A. Stability analysis and systematic design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **120**:65~67
- 6 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stability, H_∞ control theory and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1):1~13
- 7 Wang Hua O, Tanaka K, Griffin M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1):14~23

附录 A

性质 1 的证明.

1) 当输入变量数 $n=1$ 时,命题显然成立.

2) 设当输入变量数 $n=k$ 时命题成立,即最大交叠规则组包含的规则数为 2^k ,共有 $\prod_{i=1}^k (m_i - 1)$ 个.

3) 当输入变量数 $n=k+1$ 时,设第 $k+1$ 个输入变量的模糊分划数为 m_{k+1} .输入变量数 $n=k+1$ 系统相当于在 $n=k$ 系统基础上增加了一维输入变量,即在模糊规则的前件增加了一个“and”连接项,规则数增加了 m_{k+1} 倍.第 $k+1$ 个输入变量由于采用双交叠模糊分划,交叠的模糊集共有 $m_{k+1} - 1$ 组,交叠的模糊集数为 2.这样第 $k+1$ 个输入变量交叠的 2 个模糊集分别与 $n=k$ 系统某一最大交叠规则组的每一条规则的前件用“and”联结后分别形成了 $n=k+1$ 系统的 2^k 条规则,因此输入变量数 $n=k+1$ 系统的最大交叠规则组包含的规则数为 $2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

由于第 $k+1$ 个输入变量交叠的模糊集共有 $m_{k+1} - 1$ 组,每组均分别与 $n=k$ 系统每个最大交叠规则组组合形成 $n=k+1$ 系统的最大交叠规则组,因此,输入变量数 $n=k+1$ 且采用双交叠模糊分划的模糊系

统的最大交叠规则组数为 $(m_{k+1} - 1) \prod_{i=1}^k (m_i - 1) = \prod_{i=1}^{k+1} (m_i - 1)$,命题成立.

由归纳法,命题得证.

证毕.

性质 2 的证明.

1) 当输入变量数 $n=1$ 时,命题显然成立.

2) 设当输入变量数 $n=k$ 时命题成立. 即输入变量数 $n=k$ 系统的任一非最大交叠规则组中所包含的规则均包含于某一最大交叠规则组.

3) 当输入变量数 $n=k+1$ 时, 由于第 $k+1$ 个输入变量采用双交叠模糊分划, 其单独的模糊集与 $n=k$ 系统的交叠规则组的每一条规则前件用“and”联结后所形成的交叠规则组, 一定包含于交叠的 2 个模糊集分别与 $n=k$ 系统的交叠规则组的每一条规则前件用“and”联结后所形成的交叠规则组. 因此只要研究第 $k+1$ 个输入变量交叠的 2 个模糊集分别与 $n=k$ 系统的交叠规则组的每一条规则前件用“and”联结后的情况即可. 第 $k+1$ 个输入变量交叠的 2 个模糊集分别与 $n=k$ 系统的非最大交叠规则组的每一条规则的前件用“and”联结后形成了 $n=k+1$ 系统的非最大交叠规则组(因为包含的规则数一定小于 2^{k+1}), 而分别与 $n=k$ 系统的最大交叠规则组的每一条规则的前件用“and”联结后一定会形成 $n=k+1$ 系统的最大交叠规则组(因为包含的规则数为 $2 \times 2^k = 2^{k+1}$), 因此由步骤 2) 可以推出, $n=k+1$ 系统的所有非最大交叠规则组中所包含的规则一定包含于某一最大交叠规则组, 命题成立.

由归纳法, 命题得证.

证毕.

修智宏 博士研究生, 海军大连舰艇学院指控信息系工程师. 1992 年在海军工程学院获硕士学位, 现在大连海事大学攻读博士学位. 主要研究领域为模糊控制、船舶自动化.

(**XIU Zhi-Hong** Ph. D. candidate. He is an engineer in the Department of C³I at Dalian Naval Academy. He received his master degree from Naval Engineering University in 1992. His research interests include fuzzy control and marine automatic control.)

任光 教授, 博士生导师, 大连海事大学轮机工程学院院长. 1993 年在挪威理工大学控制工程专业获博士学位. 主要研究方向为人工智能、船舶自动控制系统.

(**REN Guang** Professor. He is the dean of Marine Engineering College, Dalian Maritime University. He received his Ph. D. degree from Norwegian University of Science and Technology, Norway, in 1993. His research interests include artificial intelligence and marine automatic control systems.)