

参数鲁棒镇定问题的可解性必要条件¹⁾

伍清河¹ 徐粒² 穴泽义久²

¹(北京理工大学信息科学技术学院自动控制系 北京 100081)

²(日本秋田县立大学系统科学技术学部)

(E-mail: qinghew@bit.edu.cn)

摘要 给定对象族 $\mathcal{P}(s, \delta)$, 其参数是向量 p 范数有界的不确定参数 δ 的仿射函数. 用根轨迹法证明, $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的任意两个元素的可同时镇定性等价于 $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的每个元素的可镇定性. 结果表明, $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的可镇定性可作为一个有效的判断条件以排除那些鲁棒镇定问题肯定无解的情况, 从而更加有效的应用棱边和顶点等已知结果寻找鲁棒镇定问题的解.

关键词 参数不确定性系统, 可同时镇定性, 强可镇定性, 偶交错性

中图分类号 TP13

On the Necessary Solvability Conditions of Parametric Robust Stabilization Problem

WU Qing-He¹ XU Li² Yoshihisa Anazawa²

¹(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

²(Faculty of System Science and Technology, Akita Prefectural University, Akita 015-0055 Japan)

(E-mail: qinghew@bit.edu.cn)

Abstract By means of the root locus approach it is shown that for a plant family $\mathcal{P}(s, \delta)$ with Hölder p -norm bounded parameter uncertainty δ , every pair of elements of $\mathcal{P}(s, \delta)$ is simultaneously stabilizable if and only if every element of $\mathcal{P}(s, \delta)$ is stabilizable. This result implies that the pairwise simultaneous stabilizability does not impose additional restriction on the solvability of the robust stabilization problem (RSP), thus the stabilizability of $\mathcal{P}(s, \delta)$ is not so conservative as it appears and can serve as a criterion to exclude the part of $\mathcal{P}(s, \delta)$ whose RSP is certainly unsolvable so that the existing edge and vertex results can be more effectively applied.

Key words Systems with parameter uncertainty, simultaneous stabilizability, strong stabilizability, parity interlacing property

1) 国家自然科学基金(69904003)和国家教委博士点专项科研基金(1999000701)资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(69904003) and the Foundation for Doctoral Special Branch by the Ministry of Education of P. R. China(1999000701)

收稿日期 2003-03-27 收修改稿日期 2003-10-30

Received March 27, 2003; in revised form October 30, 2003

1 引言

考虑对象族

$$\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta}) := \left\{ P(s) : P(s) = \frac{N_0(s) + \Delta_N(s)}{D_0(s) + \Delta_D(s)} \right\} \quad (1)$$

其中 $N_0(s) = \sum_{j=0}^n b_j s^j$ 和 $D_0(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ 为已知实系数多项式,

$$\begin{aligned} \Delta_N(s) &= b_0(\boldsymbol{\delta}) + b_1(\boldsymbol{\delta})s + \cdots + b_{n-1}(\boldsymbol{\delta})s^{n-1} + b_n(\boldsymbol{\delta})s^n \\ \Delta_D(s) &= a_0(\boldsymbol{\delta}) + a_1(\boldsymbol{\delta})s + \cdots + a_{n-1}(\boldsymbol{\delta})s^{n-1} + a_n(\boldsymbol{\delta})s^n \end{aligned} \quad (2)$$

为系数具有不确定性的多项式. 假设参数向量

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\delta}) = [b_0(\boldsymbol{\delta}) \quad b_1(\boldsymbol{\delta}) \quad b_n(\boldsymbol{\delta}) \quad a_0(\boldsymbol{\delta}) \quad a_1(\boldsymbol{\delta}) \quad \cdots \quad a_n(\boldsymbol{\delta})]^T$$

是 m 维不确定参数 $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_m]^T \in \mathcal{R}^m$ 的线性函数, 即 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\delta}) = W\boldsymbol{\delta}$, 这里 $W \in$

$\mathcal{R}^{(2n+2) \times m}$ 是已知矩阵, $\boldsymbol{\delta}$ 是 Hölder p 范数有界的不确定参数, 即 $\|\boldsymbol{\delta}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^p \right)^{1/p} < \delta$,

其中 $p \geq 1$, δ 是某一正数. 为方便起见, 记 Ω_δ 为所有 p 范数小于 δ 的不确定参数 $\boldsymbol{\delta}$ 的集合. 参数鲁棒镇定问题(RSP)即要寻找控制器 $C(s)$ 镇定 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$. 当 $\boldsymbol{\delta}$ 的取值范围是 \mathcal{R}^m 中的一个凸多面体时, 可用文献[1]给出的棱边定理来检验一个给定的控制器是否鲁棒镇定对象族 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$. 区间对象族是 $p = \infty$, δ 为给定正数, W 为对角阵时 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的一种特殊情况. 文献[2]证明, 一个给定控制器镇定一个给定的区间对象族, 当且仅当它能镇定该对象族的至多 32 条棱边对象. 如果进一步限定控制器的阶次为 1, 则需镇定至多 16 个顶点对象^[3]. 这些棱边和顶点结果给出了检验一个控制器是否鲁棒镇定某一类对象族的充分必要条件. 一般情况下, 可借助于值集的概念和除零原理检验一个控制器是否是鲁棒镇定的^[4]. 然而所有这些结果都只能用来检验一个给定的控制器是否鲁棒镇定一个给定的对象族, 并不能指导鲁棒镇定器的设计. 由于这些结果没有考虑参数鲁棒镇定问题本身的可解性条件, 当我们应用这些结果判定某一给定的控制器不能镇定给定的对象族时, 我们无法确定是关于这个对象族的鲁棒镇定问题原本无解, 还是有解但我们还没有找到这个解. 这样就可能导致对一个原本无解的问题进行求解, 结果付出了大量的劳动而收获甚微.

本文试图通过研究参数鲁棒镇定问题的可解性条件, 使设计人员可以事先排除那些肯定无解的情况, 从而更加有效的应用已有结果. 其基本思路是提出某种以不确定参数 $\boldsymbol{\delta}$ 的范数刻画的可解性必要条件, 即当 $\|\boldsymbol{\delta}\|_p \geq \delta_{us}$ 时, RSP 无解. 有了这么一个条件, 在用基于值集和除零原理的方法在进行检验时, 可以避免对一个根本不可能有解的问题进行求解.

RSP 可解的一个显然的必要条件是 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 是可镇定的. 这里, 用传递函数描述的系统可镇定性系指没有不稳定的零-极相消, 对象族的可镇定性系指其所有元素都可镇定. 因为鲁棒镇定器的思想是用一个单一的控制器的镇定一族对象, 所以, 除可镇定性之外, 还要求 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的任意 n 个元素都是可同时镇定的. 由于 3 个以上对象的同时镇定问题本质上是 NP 困难的^[5], 这里只考虑对象族 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的任意两个元素 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的可同时镇定性. 显然, 同时镇定问题包括了镇定问题. 所以, 有理由期望通过分析 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的可同时镇定性, 得到比单纯的可镇定性具有更强约束性、从而更接近于充要条件的可解性必要条件.

然而,用根轨迹方法,我们将证明, $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的可镇定性等价于其所有对象对 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的可同时镇定性.从而,以目前可用的知识, $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的可镇定性并非如最初想象的那样保守,因而可作为一个有效的判断条件以排除那些肯定无解的情况.

本文分为 5 节.第 2 节通过 Youla 参数化将 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的同时镇定问题化为一个相关对象 $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 的强镇定问题.第 3 节证明, $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 的可强镇定性等价于 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的每个元素的可镇定性.第 4 节用一个例子对主要结果的证明思路做进一步的说明.最后一节对本文的结果进行总结.

2 预备知识

本节的目的是将 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的任意两点 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的同时镇定问题化为一个相关对象的强镇定问题.我们假设 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 均是可镇定的.将加权阵 W 分为

$$W = \begin{bmatrix} W_N \\ W_D \end{bmatrix}$$

其中 W_N 和 W_D 均是 $(n+1) \times m$ 矩阵,并定义向量 $[\mathbf{s}^{(n)}]^T = [1 \ s \ \cdots \ s^n]$,则 $\Delta_N(s)$ 和 $\Delta_D(s)$ 可表示为

$$\begin{bmatrix} \Delta_N(s) \\ \Delta_D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{s}^{(n)}]^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & [\mathbf{s}^{(n)}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N \\ W_D \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{N,1}(s) & w_{N,2}(s) & \cdots & w_{N,m}(s) \\ w_{D,1}(s) & w_{D,2}(s) & \cdots & w_{D,m}(s) \end{bmatrix}}_{\Delta W(s)} \boldsymbol{\delta} \quad (3)$$

其中多项式 $w_{N,j}(s)$ 的系数向量是 W_N 的第 j 个列向量, $w_{D,j}(s)$ 的系数向量是 W_D 的第 j 个列向量.记 $\mathbf{w}_N^T(s)$ 和 $\mathbf{w}_D^T(s)$ 分别是 $W(s)$ 的第一和第二个行向量,即

$$\mathbf{w}_N^T(s) = [w_{N,1}(s) \ w_{N,2}(s) \ \cdots \ w_{N,m}(s)] \quad (4a)$$

$$\mathbf{w}_D^T(s) = [w_{D,1}(s) \ w_{D,2}(s) \ \cdots \ w_{D,m}(s)] \quad (4b)$$

则 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的任何元素都可表示为 $P(s) = \frac{N_0(s) + \mathbf{w}_N^T(s)\boldsymbol{\delta}}{D_0(s) + \mathbf{w}_D^T(s)\boldsymbol{\delta}}$. 于是,令

$$P_i(s) = \frac{N_0(s) + \mathbf{w}_N^T(s)\boldsymbol{\delta}_i}{D_0(s) + \mathbf{w}_D^T(s)\boldsymbol{\delta}_i} = \frac{N_i(s)}{D_i(s)}$$

这里 $\boldsymbol{\delta}_i \in \Omega_0$, $i=1,2$. 若定义 $\boldsymbol{\delta}^* = \boldsymbol{\delta}_2 - \boldsymbol{\delta}_1$, 则 $P_2(s)$ 也可以表示为 $P_2(s) = \frac{N_1(s) + \mathbf{w}_N^T(s)\boldsymbol{\delta}^*}{D_1(s) + \mathbf{w}_D^T(s)\boldsymbol{\delta}^*}$.

记 $\Delta_N^*(s) = \mathbf{w}_N^T(s)\boldsymbol{\delta}^*$, 以及 $\Delta_D^*(s) = \mathbf{w}_D^T(s)\boldsymbol{\delta}^*$. 由 $P_1(s)$ 的可镇定性和 $P_1(s)$ 的所有镇定器的集合 $\mathcal{S}(P_1)$ 的 Youla 参数化公式^[8], 可以证明, $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 可同时镇定, 当且仅当存在 $Q(s) \in \mathcal{RH}^\infty$ 使得不等式

$$\begin{aligned} M(s, \boldsymbol{\delta}^*) &:= \left[\frac{X_1}{G_2} + \frac{D_1}{G_1} Q \right] \frac{N_1 + \Delta_N^*}{G_1} + \left[\frac{Y_1}{G_2} - \frac{N_1}{G_1} Q \right] \frac{D_1 + \Delta_D^*}{G_1} = \\ & \frac{F(s, \boldsymbol{\delta}^*)}{G_1 G_2} + \frac{B(s, \boldsymbol{\delta}^*)}{G_1 G_2} Q(s) \neq 0, \quad \forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+ \end{aligned} \quad (5)$$

成立, 上式中 $\bar{\mathcal{C}}_+$ 是右半闭平面,

$$\begin{aligned} B(s, \boldsymbol{\delta}^*) &= -N_1(s)\Delta_D^*(s) + D_1(s)\Delta_N^*(s) \\ F(s, \boldsymbol{\delta}^*) &= f_1(s) + X_1(s)\Delta_N^*(s) + Y_1(s)\Delta_D^*(s) \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $f_1(s) = X_1(s)N_1(s) + Y_1(s)D_1(s) = G_1(s)G_2(s)$ 为 $2n$ 阶 Hurwitz 多项式. 式(5)实际上是对象

$$G(s, \boldsymbol{\delta}^*) = \frac{B(s, \boldsymbol{\delta}^*)}{F(s, \boldsymbol{\delta}^*)} \quad (7)$$

和控制器 $Q(s)$ 的 Bezout 方程. 于是, $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 中任意两个元素 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的可同时镇定性等价于 $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 的可强镇定性.

文献[6]给出了强镇定问题的可解性充要条件: 1) $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 可镇定; 2) $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 具有偶交错性 (parity interlacing property, 简记为 p. i. p.) 性, 即 $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 在正实轴上 (包括 ∞ 点) 任何两个零点间的极点个数为偶数^[6]. 下一节将研究这两个性质.

3 主要结果

3.1 $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 的可镇定性

先研究 $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 和 $P_2(s)$ 的可镇定性之间的关系. 注意 $\boldsymbol{\delta}^* = \boldsymbol{\delta}_2 - \boldsymbol{\delta}_1$, $P_2(s) = \mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta}_2)$. 由定义, $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 可镇定意味着其分子 $B(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 和分母 $F(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 在 $\bar{\mathcal{C}}_+$ 中互质, 即

$$\begin{bmatrix} B(s, \boldsymbol{\delta}^*) \\ F(s, \boldsymbol{\delta}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1(s)\Delta_D^*(s) + D_1(s)\Delta_N^*(s) \\ f_1(s) + X_1(s)\Delta_N^*(s) + Y_1(s)\Delta_D^*(s) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$\forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+$. 由 $f_1(s) = X_1(s)N_1(s) + Y_1(s)D_1(s)$, 上述不等式等价于

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D_1(s) & -N_1(s) \\ X_1(s) & Y_1(s) \end{bmatrix}}_{\Delta\Phi(s)} \begin{bmatrix} N_1(s) + \Delta_N^*(s) \\ D_1(s) + \Delta_D^*(s) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+$. 容易验证 $\det\Phi(s) = f_1(s)$. 由 $f_1(s)$ 的稳定性可知 $\Phi(s)$ 对所有的 $s \in \bar{\mathcal{C}}_+$ 均非奇异. 于是, $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 的可镇定性可进一步简化为

$$\begin{bmatrix} N_1(s) + \Delta_N^*(s) \\ D_1(s) + \Delta_D^*(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2(s) \\ D_2(s) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\forall s \in \bar{\mathcal{C}}_+$. 比较式(8)和(9)可得下述结果.

引理 1. 对任何 $\boldsymbol{\delta}^* = \boldsymbol{\delta}_2 - \boldsymbol{\delta}_1$, 其中 $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \in \Omega_\delta$, $G(s, \boldsymbol{\delta}^*)$ 可镇定当且仅当 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta}_2)$ 可镇定.

引理 1 是文献[7]中的一个结果的推广.

设标称对象 $P_0(s) = \mathcal{P}(s, \mathbf{0})$ 可镇定. 由于多项式的根是其系数的连续函数, 当 $\|\boldsymbol{\delta}\|_p$ 足够小时, $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 仍然可镇定. 随着 $\|\boldsymbol{\delta}\|_p$ 的增加, $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 可镇定性可能遭到破坏. 此时存在 $s^* \in \bar{\mathcal{C}}_+$ 使得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_0(s^*) \\ D_0(s^*) \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{g}_0(s^*)} + W(s^*)\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \quad (10)$$

式(10)是 $\boldsymbol{\delta}$ 的一个线性方程组. 容易看出, 若不确定性参数的个数 $m > 4$, 则一般情况下方程(10)都会有解. 这意味着, 如果对不确定参数 $\boldsymbol{\delta}$ 不做任何限制, 则对象族 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的元素可以在复平面上任何地方发生零-极相消, 从而是不可镇定的. 所以, 为保证 $\mathcal{P}(s, \boldsymbol{\delta})$ 的可镇定性, 必须对 $\boldsymbol{\delta}$ 做某种限制. 这可以通过下述步骤实现. 设

$$\rho(s^*) = \inf \{ \|\delta\|_p : \mathbf{g}_0(s^*) + W^T(s^*)\delta = \mathbf{0} \} \quad (11)$$

即 $\rho(s^*)$ 是式(10)所有的解中范数最小的那个解的范数, 则当 $\|\delta\|_p < \rho(s^*)$ 时, $\mathbf{g}_0(s^*) + W^T(s^*)\delta \neq \mathbf{0}$. 如果进一步定义

$$\delta_s = \inf_{s^* \in \bar{C}_+} \rho(s^*) \quad (12)$$

则对所有满足 $\|\delta\|_p < \delta_s$ 的 δ , $\mathbf{g}_0(s^*) + W^T(s^*)\delta \neq \mathbf{0} \forall s^* \in \bar{C}_+$. 从而当不确定参数 δ 的范数小于 δ_s 时, 对象族 $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的所有元素均可镇定.

3.2 $G_0(s, \delta^*)$ 的偶交错性

由于 $G(s, \delta^*)$ 的可镇定性等价于 $\mathcal{P}(s, \delta_2)$ 的可镇定性, 看起来考虑 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的同时镇定性确实能对 RSP 的解提出更严格的必要条件, 因为它还要求 $G(s, \delta^*)$ 的偶交错性. 然而, 本节将证明, 对任何 $\delta_1, \delta_2 \in \Omega_\delta$, $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的可镇定性都保证了 $G(s, \delta^*)$ 的偶交错性.

我们先证明, 只要 $D_1 Y_1 + N_1 X_1$ 稳定, $G(s, \delta^*)$ 的偶交错性与 $X_1(s)$ 和 $Y_1(s)$ 的具体值无关.

定理 1. 设 $C(s) = X(s)/Y(s)$ 是任何镇定 $P_1(s)$ 的控制器, $\tilde{G}(s, \delta^*) = \tilde{B}(s, \delta^*)/\tilde{F}(s, \delta^*)$ 是式(7)中用 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 替代 $X_1(s)$ 和 $Y_1(s)$ 而定义的相关对象, 则 $\tilde{G}(s, \delta^*)$ 具有偶交错性当且仅当 $G(s, \delta^*)$ 具有偶交错性.

证明. 将 Youla 参数 $Q(s)$ 表示为 $Q(s) = N_q(s)/D_q(s)$, 则任何 $C(s) \in \mathcal{S}(P_1)$ 都可以表示为 $C(s) = \frac{X_1(s)D_q(s) + D_1(s)N_q(s)}{Y_1(s)D_q(s) - N_1(s)N_q(s)}$, 这里 $D_q(s)$ 是稳定的多项式. 将 $X(s) = X_1(s)D_q(s) + D_1(s)N_q(s)$ 和 $Y(s) = Y_1(s)D_q(s) - N_1(s)N_q(s)$ 分别替代式(6)第二式中的 $X_1(s)$ 和 $Y_1(s)$, 可得新的相关对象 $\tilde{G}(s, \delta^*) = B(s, \delta^*)/\tilde{F}(s, \delta^*)$ 的分母多项式为 $\tilde{F}(s, \delta^*) = F(s, \delta^*)D_q(s) + B(s, \delta^*)N_q(s)$. 由于检验 $\tilde{G}(s, \delta^*)$ 的偶交错性可以简化为检验 $\tilde{F}(s, \delta^*)$ 在 $B(s, \delta^*)$ 的正零点处的符号问题^[6], 而稳定多项式 $D_q(s)$ 在所有 $s > 0$ 处的符号不变, 对所有稳定的 $D_q(s)$, $\tilde{G}(s, \delta^*)$ 具有 p. i. 性质当且仅当 $G(s, \delta^*)$ 具有偶交错性. 证毕.

定理 2. 设 $\mathcal{P}(s, \delta)$ 对所有的 $\delta \in \Omega_\delta$ 可镇定, 则对任何 $\delta^* = \delta_2 - \delta_1$, 其中 $\delta_2, \delta_1 \in \Omega_\delta$, $G(s, \delta^*)$ 具有偶交错性.

证明. 在构造 $G(s, \delta^*)$ 的时候, 如果用 $P_2(s, \lambda) = \frac{N_1(s) + \lambda w_N^T(s)\delta^*}{D_1(s) + \lambda w_D^T(s)\delta^*}$ 替代 $P_2(s)$, 则相

应的对象 $G(s, \delta^*)$ 就成为

$$G(s, \delta^*, \lambda) = \frac{\lambda(-N_1(s)\Delta_D^*(s) + D_1(s)\Delta_N^*(s))}{f_1(s) + \lambda(X_1(s)\Delta_N^*(s) + Y_1(s)\Delta_D^*(s))} = \frac{B(s, \delta^*, \lambda)}{F(s, \delta^*, \lambda)}$$

显然, $G(s, \delta^*, 1) = G(s, \delta^*)$. 由于 $P_2(s, \lambda)$ 可表示为

$$P_2(s, \lambda) = \frac{N_0(s) + w_N^T(s)[(1-\lambda)\delta_1 + \lambda\delta_2]}{D_0(s) + w_D^T(s)[(1-\lambda)\delta_1 + \lambda\delta_2]}$$

当 λ 在区间 $[0, 1]$ 上取值时, $P_2(s, \lambda)$ 实际上是连接 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ 的棱边对象族. 由于 Ω_δ 是凸集, $P_2(s, \lambda) \in \mathcal{P}(s, \delta) \forall \lambda \in [0, 1]$. 下面我们将证明, 如果 $G(s, \delta^*)$ 不具有 p. i. 性质, 则存在 $0 < \lambda_0 < 1$ 使得 $P_2(s, \lambda_0)$ 不可镇定, 从而 $\mathcal{P}(s, \delta)$ 不可镇定.

设 $G(s, \delta^*)$ 不具有 p. i. 性质. 不失一般性, 设 $G(s, \delta^*)$ 的正零点 (z_i) 和正极点 (p_j) 的分布如图 1. 显见, 对所有的 $\lambda \neq 0$, $B(s, \delta^*)$ 和 $B(s, \delta^*, \lambda)$ 都有相同的根. 于是, $\forall \lambda \neq 0$, $G(s, \delta^*)$ 和

$G(s, \delta^*, \lambda)$ 都有相同的零点. $G(s, \delta^*, \lambda)$ 的极点由根轨迹 $1 + \lambda \frac{X_1(s)\Delta_N^*(s) + Y_0(s)\Delta_D^*(s)}{f_1(s)} = 0$

确定, 而 $G(s, \delta^*)$ 的极点则由该根轨迹的增益 $\lambda = 1$ 时的根所确定. 由于 $f_1(s)$ Hurwitz 稳定, 根轨迹的所有分支的起点都在左半开平面. 于是, 当 λ 足够小的时候, $G(s, \delta^*, \lambda)$ 稳定, 从而具有偶交错性. 随着 λ 的增加, $F(s, \delta^*, \lambda)$ 在正实轴上的根的个数可能发生变化, 而使 $G(s, \delta^*, \lambda)$ 的偶交错性遭到破坏. 显然, 这种变化只可能以下述两种方式发生: i) $F(s, \delta^*, \lambda)$ 的一对共扼复根收敛到正实轴上一点 $\lambda_A \in \mathcal{R}_+$. 如果 λ_A 不是 $B(s, \delta^*, \lambda)$ 的根, 则偶交错性不会遭到破坏; ii) $F(s, \delta^*, \lambda)$ 的一个实根移动到了正实轴上. 只要这个正根不碰到 $B(s, \delta^*, \lambda)$ 的某个正根, 偶交错性也不会遭到破坏. 上述分析表明, 图 1 所示的零极分布只有当存在某个 $z_i \geq 0$ 和 $0 < \lambda_0 < 1$, 使得 $B(z_i, \delta^*, \lambda_0) = 0$, 且同时 $F(z_i, \delta^*, \lambda_0) = 0$ 才可能出现. 由引理 1, 这等价于 $P_2(s, \lambda_0)$ 在 $z_i \geq 0$ 处发生了零极相消从而不可镇定. 证毕.

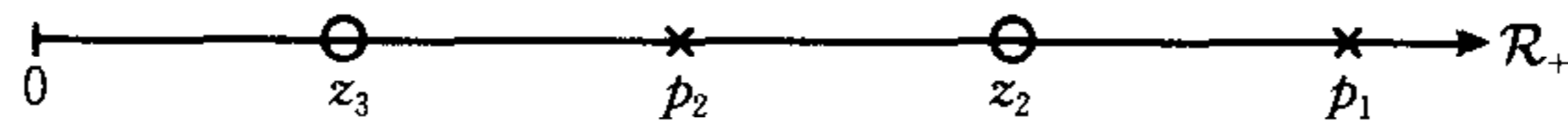


图 1 $F(s, \delta^*)$ 和 $B(s, \delta^*)$ 的根分布

Fig. 1 The roots of $F(s, \delta^*)$ and $B(s, \delta^*)$

4 示例

考虑对象族

$$P(s, \delta) = \frac{s + 2 + w_{N,1}\delta_{N,1}s + w_{N,0}\delta_{N,0}}{s^3 + s^2 + s + 1 + w_{D,2}\delta_{D,2}s^2 + w_{D,1}\delta_{D,1}s + w_{D,0}\delta_{D,0}}$$

这里 $w_{D,0} = 3, w_{D,1} = 10, w_{D,2} = 5, w_{N,0} = 0.2, w_{N,1} = 1, \delta = [\delta_{D,0} \ \delta_{D,1} \ \delta_{D,2} \ \delta_{N,0} \ \delta_{N,1}]^T$ 是受范数条件 $\|\delta\|_p \leq \delta$ 约束的不确定性. 我们将用这个例子来说明, 如果 $G(s, \delta^*)$ 不具有偶交错性, 则存在形如 $\delta = (1 - \lambda_0)\delta_1 + \lambda_0\delta_2$ 的 δ , 其中 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得 $P(s, \delta)$ 具有不稳定的零极相消.

首先, 注意标称对象 $P_0(s) = \frac{s+2}{s^3+s^2+s+1}$ 没有不稳定的零极相消, 从而是可镇定的. 如

果取 $C(s) = \frac{s^3 + 0.8s^2 + 0.2s + 0.4}{s^3 + 3s^2 + 3s + 0.2}$, 则标称系统的特征多项式为

$$f_0(s) = X_0(s)N_0(s) + Y_0(s)D_0(s) = s^6 + 4s^5 + 8s^4 + 10s^3 + 8s^2 + 4s + 1$$

这是一个 Hurwitz 多项式. 从而, $C(s)$ 镇定 $P_0(s)$.

为简便起见, 取 $\delta_1 = \mathbf{0}, \delta_2 = \delta^*$ 为 Ω_δ 的任一元素, 证明只要 $P(s, \delta)$ 可镇定, 则 $\{P_0(s), P(s, \delta^*)\}$ 可同时镇定. 或等价地证明, 若对某一个 $\delta^* \in \Omega_\delta, G(s, \delta^*)$ 不具有偶交错性, 则必存在形如 $\delta = \lambda_0\delta^*$, 且 $\lambda_0 \in (0, 1)$ 的 δ 使得 $P(s, \delta)$ 有不稳定的零极相消. 相关对象 $G(s, \delta) = B(s, \delta)/F(s, \delta)$ 为

$$B(s, \delta) = -(s + 2)(5\delta_{D,2}s^2 + 10\delta_{D,1}s + 3\delta_{D,0}) + (s^3 + s^2 + s + 1)(0.1\delta_{N,1}s + 0.2\delta_{N,0})$$

$$F_0(s, \delta) = f_0(s) + (s^3 + 0.8s^2 + 0.2s + 0.4)(0.1\delta_{N,1}s + 0.2\delta_{N,0}) + (s^3 + 3s^2 + 3s + 0.2)(5\delta_{D,2}s^2 + 10\delta_{D,1}s + 3\delta_{D,0})$$

这里 $\mathbf{0} \neq \delta \in \Omega_\delta$. 由定理 1, 只要 $C(s)$ 镇定 $P_0(s)$, 偶交错性与具体的 $C(s)$ 无关. 所以就取前面给出的 $C(s)$.

其次证明,如果对 δ 不做任何限制, $G(s, \delta)$ 确实可能不具有偶交错性. 对于本例,若令 δ^* 的元素为 $\delta_{D,0} = 2.0616, \delta_{D,1} = 0.0469, \delta_{D,2} = -1.1431, \delta_{N,0} = 18.9817, \delta_{N,1} = -3.09235$, 则相关对象 $G(s, \delta^*)$ 为

$$G(s, \delta^*) = \frac{-3.0924s^4 + 6.4194s^3 + 11.6654s^2 - 6.4194s - 8.5731}{s^6 - 1.7154s^5 - 11.7692s^4 + 1.769s^3 + 29.2376s^2 + 22.1703s + 3.7555}$$

其零点为 $\infty, 3, 1, -0.9241, -1$, 而极点为 $4, 2, -0.2464, -0.8848, -1, -2.1534$. 由于极点 $p_1 = 4$ 位于正零点 $z_1 = \infty$ 和 $z_2 = 3$ 之间, 极点 $p_2 = 2$ 位于正零点 $z_2 = 3$ 和 $z_3 = 1$ 之间, 见图 1, $G(s, \delta^*)$ 不具有偶交错性.

最后证明,存在形如 $\delta = \lambda_0 \delta^*$, 且 $\lambda_0 \in (0, 1)$ 的 δ , 使得 $G(s, \delta)$ 不可镇定, 或等价地, $G(s, \delta^*, \lambda_0)$ 不可镇定. $G(s, \delta^*, \lambda)$ 的零点对所有的 $\lambda \neq 0$ 都保持不变, 而极点由根轨迹

$$1 + \lambda \underbrace{\frac{-5.7154s^5 - 19.7692s^4 - 8.2310s^3 + 21.2376s^2 + 18.1703s + 2.7555}{f_0(s)}}_{\Delta G(s)} = 0 \quad (13)$$

确定. $G(s)$ 的有限零点(其中位于实轴上的那些在图 2 中用 Δ 标出)是 $-2.4598, -1, -0.8924, -0.2008, 1.0940$. 由根轨迹规则, 区间 $[1.094, \infty)$ 是根轨迹(13)的一部分. 由于 $f_0(s)$ 稳定, 所有的根轨迹分支都起源于左半开平面. 于是, 在区间 $[1.094, \infty)$ 内必有一个汇合点. 由根轨迹规则可求得汇合点为 $s = 2.72$ (图 2 中用双叉表示). 汇合点处的根轨迹增益为 $\lambda_{cr} = 0.9054$. 对所有的 $\lambda < \lambda_{cr}$, $G(s, \delta^*, \lambda)$ 在正实轴上都没有极点, 从而 $G(s, \delta^*, \lambda)$ 肯定具有偶交错性. 当 $\lambda = \lambda_{cr}$ 时, $G(s, \delta^*, \lambda)$ 在 $s = 2.72$ 处有一个二重极点, 仍然具有偶交错性. 随着 λ 从 λ_{cr} 的增加, 在汇合点处相遇的两条分支一条向左移动, 另一条向右移动. 向左移动的那条分支, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时终止于 $G(s)$ 的有限零点 $s = 1.094$ 而不会与 $G(s, \delta^*, \lambda)$ 的任何零点相遇. 然而, 向右移动的那条分支的终止点为 $s = \infty$, 且当 $\lambda = 1$ 时位于 $p_1 = 4$, 因此必然存在 λ_0 满足 $0.9054 < \lambda_0 < 1$ 使得这条分支在 $z_2 = 3$ 处与 $G(s, \delta^*, \lambda)$ 的零点相遇. 简单的代数运算可得 $\lambda_0 = 0.9123$, 此时 $f_0(s) + X_0(s)\Delta_N(s) + Y_0(s)\Delta_D(s)$ 确实有一个根为 $s = 3$. 于是对象 $G(s, \delta^*, \lambda_0)$ 不可镇定. 由引理 1, 这等价于当 $\delta = \lambda_0 \delta^*$ 时对象 $\mathcal{P}(s, \delta)$ 不可镇定.

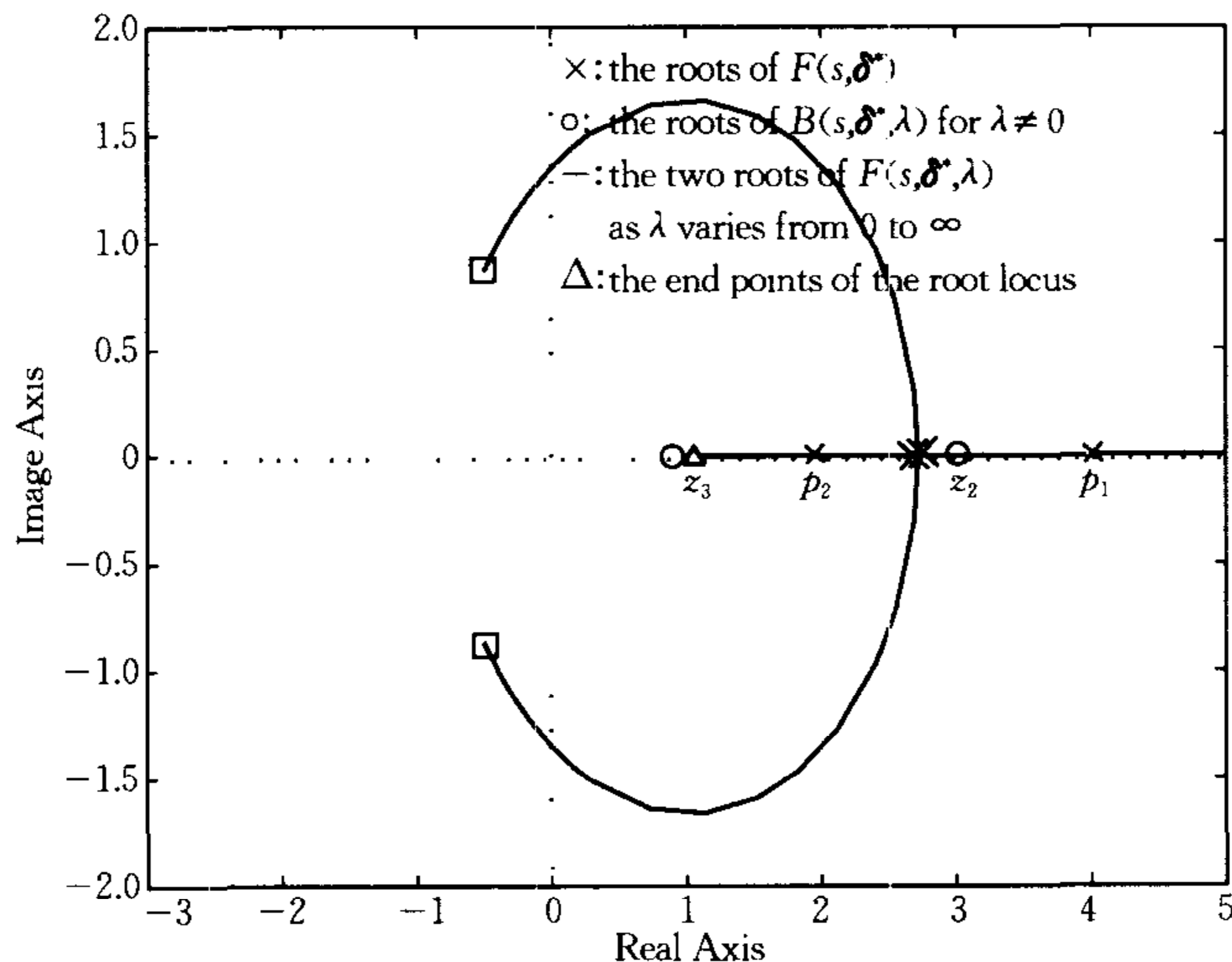


图 2 $F(s, \delta^*, \lambda_0)$ 和 $B(s, \delta^*, \lambda_0)$ 的不稳定相消

Fig. 2 Unstable cancellation between $F(s, \delta^*)$ and $B(s, \delta^*)$

5 结束语

本文分析了具有参数不确定性的对象族的鲁棒镇定问题的两个可解性必要条件:对象族的可镇定性和对象族任意两个元素的可同时镇定性. 引入了向量 p 范数意义下的可镇定半径的概念. 用根轨迹方法证明了对象族 $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的可镇定性等价于其所有对象对 $\{P_1(s), P_2(s)\}$ 的可同时镇定性. 结果表明, $\mathcal{P}(s, \delta)$ 的可镇定性并非如最初想象的那样保守, 因而可作为一个有效的判断条件以排除那些鲁棒镇定问题肯定无解的情况, 从而更加有效的应用棱边和顶点等已知结果寻找鲁棒镇定问题的解.

References

- 1 Bartlett A C, Hollot C V, Huang L. Root location of an entire polytope of polynomials; It suffices to check the edges. *Mathematics in Control Signals Systems*, 1988, **1**: 61~71
- 2 Chapellat H, Bhattacharyya S P. A generalization of Kharitonov's theorem; Robust stability of interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(3): 306~311
- 3 Barmish B R, Hollot C V, Kraus F J, Tempo R. Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(6): 707~714
- 4 Barmish B R. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. New York: Macmillan Publishing Company, 1994
- 5 Blondel V, Gevers M. Simultaneous stabilizability of three linear systems is rationally undecidable. *Mathematics in Control Signals Systems*, 1993, **6**: 135~145
- 6 Vidyasagar M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1985
- 7 Wu Q H. On the radius of parity interlacing property of plant family with parameter uncertainties. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Institute of Electrical and Electronics Engineering, Inc, 1999, 2294~2299
- 8 Youla D C, Bongiorno J J, Jr. and Jabr H A. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part I: The single-input case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(1): 3~14

伍清河 1990年在瑞士联邦苏黎世工学院(ETH)获工学博士学位,现为北京理工大学教授. 研究领域为 H_∞ 控制、鲁棒控制和多维系统理论.

(WU Qing-He Ph. D., professor at the Beijing Institute of Technology. His research interests include H_∞ control, robust control, and multidimensional systems theory.)

徐 粒 1993年在日本丰桥技术科学大学获工学博士学位,现为日本秋田县立大学副教授. 研究领域为多维系统理论和计算机代数在控制理论中的应用.

(XU Li Ph. D., associate professor at Akita Prefectural University, Japan. His research interests include multidimensional systems theory, computer algebra and its applications in control theory.)

穴泽义久 1975年在日本北海道大学获工学博士学位,现为日本秋田县立大学教授. 研究领域为线性系统理论和工业电机的设计与控制.

(Yoshihisa Anazawa Ph. D., professor at the Akita Prefectural University, Japan. His research interests include linear systems theory, design and control of industrial motors.)