第 30 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 30, No. 1
2004 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 2004

脉宽调制控制系统的适定性[1)]

范启富 施颂椒
(上海交通大学自动化系 上海 200030)
(E-mail: qffan@mail.sjtu.edu.cn)

摘 要 不连续动态系统的适定性(即解的唯一存在性)问题是混合系统研究的基本问题之一. 脉宽调制控制系统可以表示成具有时变仿射不等式约束的分段仿射系统. 该文首先在 Carathéodory 的解定义下导出了脉宽调制控制系统无滑模和跳跃的解的适定性的充分必要条件. 然后利用该结果对 PWM 型 DC-DC 降压变换器的适定性的研究表明当载波信号 $h(t)=0$ 时闭环 PWM DC-DC 变换器总是不适定的, 当载波信号 $h(t)$ 的参数和比例控制器的参数满足一定的条件时, 比例控制的闭环 PWM DC-DC 变换器是适定的.

关键词 分段仿射系统, 混合系统, 不连续系统, 适定性, lexicographic 不等式, PWM 系统
中图分类号 TP271

On Well-posedness of PWM Control System

FAN Qi-Fu SHI Song-Jiao
(*Deppartment of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
(E-mail: qffan@mail.sjtu.edu.cn)

Abstract One of the basic issues in the study of hybrid systems is the well-posedness (existence and uniqueness of solutions) problem of discontinuous dynamical systems. This paper addresses this problem for a class of piecewise affine discontinuous systems with affine inequalities such as systems with pulse-width modulator under the definition of solutions of Carathéodory in terms of an analysis based on lexicographic inequalities and the smooth continuation property of solutions. Furthermore, it is clear that when carrier signal $h(t)=0$, closed loop PWM DC-DC converters are not well-posed and when some condition is satisfied, closed loop PWM DC-DC converters with P controller are well-posed.

Key words Piecewise affine systems, hybrid systems, discontinuous systems, well-posedness, lexicographic inequalities, systems with pulse-width modulator

1) 中国博士后基金第 17 批资助
Supported by Postdoctoral Fundation of P. R. China(17th)
收稿日期 2002-04-25 收修改稿日期 2003-04-08
Received April 25, 2002; in revised form April 8, 2003

1 引言

计算机科学和控制科学研究者已经从各种不同的观点建立了混合系统建模、分析、控制综合的各种各样的方法[1,2]. 在控制科学领域,已经从动态系统和控制的观点,提出了混合系统的模型,并对稳定性、可控性等几个重要的性质进行了讨论[3~8]. 这些研究主要关心的是如何定义和分析向量场具有不连续变化和解具有跳跃的系统的各种特性. 不过,关于分段线性不连续系统的解的唯一存在性这个基本问题的研究结果还不多见. Van der Schaft 和 Schumacher 等以自然的方式推广解具有跳跃现象的物理系统的动态特性,建立了一类混合系统的建模框架,该框架称为互补建模. 它能描述包括含有二极管的电网、继电型系统及具有单向约束的机械系统在内的集中混合系统. 这种方法对混合系统中的跳跃现象给出了自然而直观的解释,并使分析变得相对容易. 关于这类系统,已经导出了适定性的几个代数条件[9~11]. 另一方面,实际上也存在向量场虽是不连续的但其解不发生或希望不发生跳跃的系统. Imura 和 Van der Schaft 基于 Lexicographic 不等式和光滑连续性的分析,给出了这类分段线性不连续系统中一类系统在 Carathéodory 的解定义下适定的充分必要条件[12,13]. 另一方面,PWM 系统的动态模型可以表示成具有时变仿射不等式约束的不连续线性系统,对于其所呈现出的各种复杂性态已进行了大量的研究,但是对适定性这一基本问题的研究结果还很少见,虽然可以将其化成具有时不变仿射约束的分段系统,但由于扩展后的状态的取值空间不是 E^{n+1},而是 $E^n\times[a,b]$,不能对它直接应用文献[17]中的检验条件. 因此,本文则试图将其进行一定的扩展,给出判定更具一般性的具有时变仿射不等式约束的不连续线性系统适定性的充分必要条件. 利用该结果研究闭环 PWM DC-DC 变换器的适定性,为 PWM DC-DC 变换器的控制器的设计提供参考. 由于篇幅的限制,删掉了一些预备知识,有兴趣的读者可参阅有关文献.

下面对本文中所用的 Lexicographic 不等式的数学符号简单说明如下:

对于 $\boldsymbol{x}\in E^n$,如果对于某个 $i, x_j=0\ (j=1,2,\cdots,i-1)$,而 $x_i>(<)0$,则它可以表示成 $\boldsymbol{x}\succ(\prec)\ 0$;另外,如果 $\boldsymbol{x}=0$ 或 $\boldsymbol{x}\succ(\prec)\ 0$,则它可以表示成 $\boldsymbol{x}\succ=(\prec=)\ 0$. 这样的不等式称为 Lexicographic 不等式.

2 预备知识

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

其中 $t\in E,\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}\in E^n$,而 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$是 $n+1$ 维空间$(t,\boldsymbol{x})$或 E^{n+1}中的某一区域上定义的 n 维实值向量函数.

在讨论系统(1) 时通常都假定 $f(t,\boldsymbol{x})$是连续的或满足 Lipschitz 条件,其解应该连续可微,系统(1)的这种连续可微解叫做柯西意义下的解. 但是对于象分段线性系统、PWM 系统这样的混合系统,式(1)的右端函数往往是不连续的,显然柯西意义下的解不存在. 对于这种不连续系统必须给解以新的定义. 对于这类具有有限间断的微分方程已进行了大量的研究,并引进了若干解的新定义. 例如,Filippov 对于右手边不连续的系统,给出了 Filippov 解的定义.

Filippov 解可以表示包括具有滑模现象的系统在内的一大类系统的解. 而 Carathéodory 意义下系统不适定是指解不存在或解不唯一，或存在滑模现象及解存在跳跃. 由于在许多实际系统如 PWM 型 DC-DC 变换器中，由于技术的限制，不希望系统发生滑模现象. 因此，本文采用 Carathéodory 意义下的解概念.

若向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在含点 τ 的某一区间 Δ 的任一闭子区间上绝对连续并满足下述条件：

1) $\boldsymbol{\varphi}(\tau)=\boldsymbol{\xi}$;

2) $(t,\boldsymbol{\varphi}(t))\in S$, $t\in\Delta$;

3) 在 Δ 上几乎处处有 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=f(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$.

则称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为系统(1)在 Carathéodory 意义下满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(\tau)=\boldsymbol{\xi}$ 的一个解. 这时 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在 Δ 上恒满足

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\xi}+\int_{\tau}^{t}f(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s,\quad t\in\Delta \tag{2}$$

本文考虑系统(1)的一种特殊形式即两模态分段线性不连续系统

$$\Sigma_o\begin{cases}\text{mode 1}: \dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}, & \text{if } y=C\boldsymbol{x}\geqslant 0\\ \text{mode 2}: \dot{\boldsymbol{x}}=B\boldsymbol{x}, & \text{if } y=C\boldsymbol{x}\leqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

那么，系统 Σ_o 在 Carathéodory 意义下的适定性可以定义如下.

定义 1. 如果对于初始状态 $\boldsymbol{x}_0\in E^n$，在 Carathéodory 意义下，在 $[0,\infty)$ 上系统 Σ_o 存在唯一解，则系统 Σ_o 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处是适定的；另外，如果对于每个初始状态 $\boldsymbol{x}_0\in E^n$，系统 Σ_o 处处是适定的，则称系统 Σ_o 是适定的.

引理 1[12]. 如果存在 $\varepsilon>0$ 使得对于每个初始状态 $\boldsymbol{x}_0\in E^n$，系统 Σ_o 在 Carathéodory 意义下，在 $[0,\varepsilon)$ 上存在唯一解，则系统 Σ_o 是适定的并且在 R 的任意区间上解绝对连续.

Lexicographic 不等式和光滑连续性在关于具有仿射不等式约束的不连续线性系统的适定性问题的研究中起着重要的作用，下面给出光滑连续性质的定义以及刻划光滑连续性质和适定性之间关系的引理.

定义 2. 若 n 维线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$ 局部保持 Lexicographic 不等式关系，即对于满足 $\boldsymbol{x}(0)\succ=(\prec=)\ 0$ 的每个初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 存在一个 $\varepsilon>0$，使得对于所有的 $t\in[0,\varepsilon]$ 有 $\boldsymbol{x}(t)\succ=(\prec=)\ 0$，则就说该系统具有光滑连续性质.

引理 2[12]. 系统 Σ_0 是适定的，当且仅当始于每个初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 的轨迹仅在两模式之一光滑连续可能，除非两模式的解在某个间隔内相同.

由该引理可知，为了证明系统的适定性仅需考虑始于每个初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 的轨迹是否光滑连续可能.

3　具有时变仿射不等式约束的两模态不连续仿射系统的适定性

这里，考虑下述系统

$$\Sigma_o\begin{cases}\text{mode 1}\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\hat{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{a}}_1, & \text{if } \hat{C}\hat{\boldsymbol{x}}+d\geqslant h(t)\\ \text{mode 2}\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\hat{A}_2\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{a}}_2, & \text{if } \hat{C}\hat{\boldsymbol{x}}+d\leqslant h(t)\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}\in E^{n-1}$，$\hat{A}_i\in E^{(n-1)\times(n-1)}$，$\hat{\boldsymbol{a}}_i\in E^{n-1}$，$\hat{C}\in E^{1\times(n-1)}$，$d\in E$ 为常数，$h(t)=\gamma+\eta(t \bmod T)$.

令 $\bar{A}_i \triangleq \begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}$, $A_i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{A}_i & 0_{(n-1)\times 1} \\ 0_{1\times(n-1)} & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{C}_i \triangleq [C_i \quad c_i]$, $\boldsymbol{a}_i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_i \\ \eta \end{bmatrix}$, $i=1,2$,

$C_1=[\hat{C} \quad -1]$, $C_2=-[\hat{C} \quad -1]$, $c_1=d-\gamma$, $c_2=-(d-\gamma)$, $\bar{\boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ z \end{bmatrix}$, $z \in [0, \eta T]$

则系统(4)可以表示成

$$\Sigma_o \begin{cases} \text{mode } 1: \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}_1 \bar{\boldsymbol{x}}, & \text{if } \bar{C}_1 \bar{\boldsymbol{x}} \geqslant 0 \\ \text{mode } 2: \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}_2 \bar{\boldsymbol{x}}, & \text{if } \bar{C}_2 \bar{\boldsymbol{x}} \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

在叙述定理之前,首先给出该定理中所用一些符号的定义.

令 $O_j(\bar{C},\bar{A})$ 为由下式定义的线性空间

$O_j(\bar{C},\bar{A}) \triangleq \mathrm{span}\{\bar{C}, \bar{C}\bar{A}, \cdots, \bar{C}\bar{A}^{j-1}\}$, $\dim(O_j(\bar{C},\bar{A}))=j$,而 $N_j(\bar{C},\bar{A})$ 为由下式定义的集合

$$N_j(\bar{C},\bar{A}) \triangleq \Big\{\hat{\boldsymbol{x}} \in E^{n-1}, z \in [0,\eta T] \,\Big|\, \bar{C}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{C}\bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \cdots = \bar{C}\bar{A}^{j-1}\bar{\boldsymbol{x}} = 0 \\ \boldsymbol{x} = [\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \quad z]^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad 1]^{\mathrm{T}}\Big\}$$

对于给定的 q,$(\bar{C},\bar{A})$属于下述集合之一.

$$P_0^q \triangleq \{(\bar{C},\bar{A}) \in E^{1\times(n+1)} \times E^{(n+1)\times(n+1)} \mid \bar{C}\bar{A}^{q-1} \in O_{q-1}(\bar{C},\bar{A})\}$$

$$P_1^q \triangleq \{(\bar{C},\bar{A}) \in E^{1\times(n+1)} \times E^{(n+1)\times(n+1)} \mid \bar{C}\bar{A}^{q-1} \notin O_{q-1}(\bar{C},\bar{A}),\ CA^{q-1} \notin O_{q-1}(C,A)\}$$

$$P_{2+}^q \triangleq \begin{Bmatrix} (\bar{C},\bar{A}) \in E^{1\times(n+1)} \times E^{(n+1)\times(n+1)} \mid \bar{C}\bar{A}^{q-1} \notin O_{q-1}(\bar{C},\bar{A}),\ CA^{q-1} \in O_{q-1}(C,A) \\ N_{q-1}(\bar{C},\bar{A}) \neq \phi,\ \bar{C}\bar{A}^{q-1}\bar{\boldsymbol{x}} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in N_{q-1}(\bar{C},\bar{A}) \end{Bmatrix}$$

$$P_{2-}^q \triangleq \begin{Bmatrix} (\bar{C},\bar{A}) \in E^{1\times(n+1)} \times E^{(n+1)\times(n+1)} \mid \bar{C}\bar{A}^{q-1} \notin O_{q-1}(\bar{C},\bar{A}),\ CA^{q-1} \in O_{q-1}(C,A) \\ N_{q-1}(\bar{C},\bar{A}) \neq \phi,\ \bar{C}\bar{A}^{q-1}\bar{\boldsymbol{x}} < 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in N_{q-1}(\bar{C},\bar{A}) \end{Bmatrix}$$

$$P_{3+}^q \triangleq \begin{Bmatrix} (\bar{C},\bar{A}) \in E^{1\times(n+1)} \times E^{(n+1)\times(n+1)} \mid \bar{C}\bar{A}^{q-1} \notin O_{q-1}(\bar{C},\bar{A}),\ CA^{q-1} \in O_{q-1}(C,A) \\ N_{q-1}(\bar{C},\bar{A}) = \phi,\ \bar{C}\bar{A}^{q-2}\bar{\boldsymbol{x}} > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in N_{q-2}(\bar{C},\bar{A}) \end{Bmatrix}.$$

$$P_{3-}^q \triangleq \begin{Bmatrix} (\bar{C},\bar{A}) \in E^{1\times(n+1)} \times E^{(n+1)\times(n+1)} \mid \bar{C}\bar{A}^{q-1} \notin O_{q-1}(\bar{C},\bar{A}),\ CA^{q-1} \in O_{q-1}(C,A) \\ N_{q-1}(\bar{C},\bar{A}) = \phi,\ \bar{C}\bar{A}^{q-2}\bar{\boldsymbol{x}} < 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in N_{q-2}(\bar{C},\bar{A}) \end{Bmatrix}$$

在上述集合中,令 $q=r$,其中 r 为$(\bar{C},\bar{A})$的可观测性指数,则$(\bar{C},\bar{A}) \in P_1^r$,$(\bar{C},\bar{A}) \in P_{2+}^r$,$(\bar{C},\bar{A}) \in P_{2-}^r$,$(\bar{C},\bar{A}) \in P_{3+}^r$,$(\bar{C},\bar{A}) \in P_{3-}^r$ 的每种情况下系统的光滑连续集合由下式给出.

$$S \triangleq \begin{cases} \{\hat{\boldsymbol{x}} \in E^{n-1}, z \in [0,\eta T] \mid \bar{T}(r)\bar{\boldsymbol{x}} >= 0\}, & \text{if } (\bar{C},\bar{A}) \in P_1^r \\ \{\hat{\boldsymbol{x}} \in E^{n-1}, z \in [0,\eta T] \mid \bar{T}(r-1)\bar{\boldsymbol{x}} >= 0\}, & \text{if } (\bar{C},\bar{A}) \in P_{2+}^r \\ \{\hat{\boldsymbol{x}} \in E^{n-1}, z \in [0,\eta T] \mid \bar{T}(r-1)\bar{\boldsymbol{x}} > 0\}, & \text{if } (\bar{C},\bar{A}) \in P_{2-}^r \\ \{\hat{\boldsymbol{x}} \in E^{n-1}, z \in [0,\eta T] \mid \bar{T}(r-2)\bar{\boldsymbol{x}} >= 0\}, & \text{if } (\bar{C},\bar{A}) \in P_{3+}^r \\ \{\hat{\boldsymbol{x}} \in E^{n-1}, z \in [0,\eta T] \mid \bar{T}(r-2)\bar{\boldsymbol{x}} > 0\}, & \text{if } (\bar{C},\bar{A}) \in P_{3-}^r \end{cases} \tag{6}$$

那么,当$(\bar{C}_i,\bar{A}_i)$的可观测性指数为 $r_i(i=1,2)$时,$(\bar{C}_1,\bar{A}_1)$和$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)$共有下述 25 种可能的组合.

C1： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_1^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_1^{r_2}$　C2： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_1^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2+}^{r_2}$

C3： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_1^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2-}^{r_2}$　C4： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_1^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3+}^{r_2}$

C5： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_1^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3-}^{r_2}$　C6： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_1^{r_2}$

C7： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2+}^{r_2}$　C8： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2-}^{r_2}$

C9： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3+}^{r_2}$　C10： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3-}^{r_2}$

C11： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_1^{r_2}$　C12： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2+}^{r_2}$

C13： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2-}^{r_2}$　C14： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3+}^{r_2}$

C15： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{2-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3-}^{r_2}$　C16： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_1^{r_2}$

C17： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2+}^{r_2}$　C18： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2-}^{r_2}$

C19： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3+}^{r_2}$　C20： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3+}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3-}^{r_2}$

C21： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_1^{r_2}$　C22： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2+}^{r_2}$

C23： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{2-}^{r_2}$　C24： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3+}^{r_2}$

C25： $(\bar{C}_1,\bar{A}_1)\in P_{3-}^{r_1}$，　$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)\in P_{3-}^{r_2}$

其中集合 $P_*^{r_i}$ 是对于$(\bar{C},\bar{A})=(\bar{C}_i,\bar{A}_i)$ $(i=1,2)$定义的.

那么,应用前面的引理可以得到关于具有周期为 T 的锯齿时变仿射不等式约束的分段仿射系统(5)适定性的充要条件.

定理 1. 令 r_i为(C_i,A_i)对的可观测性指数$(i=1,2)$,那么,具有时变仿射不等式约束的分段仿射系统(3.13)适定的充要条件是$(\bar{C}_i,\bar{A}_i)$$(i=1,2)$满足下列条件之一:

i) (C1) 和对于某个 $M\in L_+^{r_1}$,有 $\bar{T}_1(r_1)+M\bar{T}_2(r_2)=0$,并且对于所有的$\{\hat{x}\in E^{n-1},z\in[0,\eta T]\mid \bar{T}_1(r_1)\bar{x}=0\}$,$(\bar{A}_1-\bar{A}_2)\bar{x}=0$;

ii) (C3)和对于某个 $M\in L_+^{r_1}$,有 $\bar{T}_1(r_1)+M\bar{T}_2(r_2-1)=0$;

iii) (C5)和对于某个 $M\in L_+^{r_1}$,有 $\bar{T}_1(r_1)+M\bar{T}_2(r_2-2)=0$;

iv) (C8)或(C12)和对于某个 $M\in L_+^{r_1-1}$,有 $\bar{T}_1(r_1-1)+M\bar{T}_2(r_2-1)=0$;

v) (C10)或(C14)和对于某个 $M\in L_+^{r_1-1}$,有 $\bar{T}_1(r_1-1)+M\bar{T}_2(r_2-2)=0$;

vi) (C11)和对于某个 $M\in L_+^{r_1-1}$,有 $\bar{T}_1(r_1-1)+M\bar{T}_2(r_2)=0$;

vii) (C18)或(C22)和对于某个 $M\in L_+^{r_1-2}$,有 $\bar{T}_1(r_1-2)+M\bar{T}_2(r_2-1)=0$;

viii) (C20)或(C24)和对于某个 $M\in L_+^{r_1-2}$,有 $\bar{T}_1(r_1-2)+M\bar{T}_2(r_2-2)=0$;

ix) (C21)和对于某个 $M\in L_+^{r_1-2}$,有 $\bar{T}_1(r_1-2)+M\bar{T}_2(r_2)=0$.

由于篇幅的限制,证明从略,可参考文献[13].

作为举例,下一节我们应用该结果,研究在 Carathéodory 的解定义下比例控制的闭环 PWM DC-DC 降压变换器的适定性问题.

4 闭环 DC-DC 降压变换器的适定性分析

比例控制的闭环 PWM DC-DC 降压变换器的模型如下:

$$\Sigma_o\begin{cases}S_1: & \dot{\hat{x}} = \hat{A}_1\hat{x} + \hat{B}_1 u \\ S_2: & \dot{\hat{x}} = \hat{A}_2\hat{x} + \hat{B}_2 u\end{cases} \tag{7}$$

其中 $\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ -B_cC_{10} & A_c\end{bmatrix}$, $\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{10} & 0 \\ 0 & B_c\end{bmatrix}$, $\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{20} & 0 \\ -B_cC_{10} & A_c\end{bmatrix}$, $\hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{20} & 0 \\ 0 & B_c\end{bmatrix}$, $\hat{x} = [x_1^{\mathrm{T}} \quad x_c^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $u = [v_s \quad v_r]^{\mathrm{T}}$, $y = \hat{C}x + Du$, $\hat{C} = [-D_c C_{10} \quad C_c]$, $\hat{D} = [0 \quad D_c]$, $h(t) = \gamma + \eta(t \bmod T)$,这里 $A_{10}, A_{20}, B_{10}, B_{20}, C_{10}$ 为对象在各模态下的状态空间方程的状态矩阵,输入矩阵,输出矩阵,它们分别为

$$A_{10} = A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RL}\end{bmatrix},\quad B_{10} = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{L} \\ 0\end{bmatrix},\quad B_{20} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix},\quad C_{10} = [0]$$

控制器的模型为

$$\begin{cases}\dot{x}_c = A_c x_c + B_c(v_r - v_o) \\ y = C_c x_c + D_c(v_r - v_o)\end{cases} \tag{8}$$

式中 v_r 为参考输入电压,v_s 为电源电压,且 $v_s \geqslant v_r$. $A_c=0, B_c=0, C_c=0, D_c=K$

系统

$$\Sigma_1\begin{cases}S_1: & \dot{\bar{x}} = \bar{A}_1\bar{x} \quad \bar{C}\bar{x} \geqslant 0 \\ S_2: & \dot{\bar{x}} = \bar{A}_2\bar{x} \quad \bar{C}\bar{x} \leqslant 0\end{cases} \tag{9}$$

其中 $\bar{x} = [\hat{x}^{\mathrm{T}} \quad z \quad 1]^{\mathrm{T}}$,

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix}\hat{A}_1 & 0_{(n-1)\times 1} & \hat{B}_1 u \\ 0_{1\times(n-1)} & 0 & 1 \\ 0_{1\times(n-1)} & 0 & 0\end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix}\hat{A}_2 & 0_{(n-1)\times 1} & \hat{B}_2 u \\ 0_{1\times(n-1)} & 0 & 1 \\ 0_{1\times(n-1)} & 0 & 0\end{bmatrix}, \bar{C} = [\hat{C} \quad -1 \quad \hat{D}u - \gamma]$$

下面分两种情况讨论比例控制的闭环 PWM DC-DC 降压变换器的适定性.

1) $h(t)=0$ 的场合.

通过计算可知,$(\bar{C}_1, \bar{A}_1)$ 的可观测性指数 $r_1=3$,$(\bar{C}_2, \bar{A}_2)$ 的可观测性指数 $r_2=3$,(C_1, A_1) 的可观测性指数为 2,(C_2, A_2) 的可观测性指数为 2. 其中

$$\bar{T}_1(3) = \begin{bmatrix} 0 & -K & K\times v_r \\ -K/C & K/(RL) & 0 \\ K/(RLC) & K/(LC) - K/(R^2L^2) & -K\times v_s/(LC)\end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_2(3) = \begin{bmatrix} 0 & K & -K\times v_r \\ K/C & -K/(RL) & 0 \\ -K/(RLC) & -K/(LC) + K/(R^2L^2) & 0\end{bmatrix}$$

并且,对于 $\forall x \in N_2(\bar{C}_1, \bar{A}_1) = [Cv_r/(RL) \quad v_r]^{\mathrm{T}}$, $\bar{C}_1\bar{A}_1^2\bar{x} = -K(v_s - v_r)/(LC) < 0$, $(\bar{C}_1, \bar{A}_1) \in P_{2-}^3$;对于 $\forall x \in N_2(\bar{C}_2, \bar{A}_2) = [Cv_r/(RL) \quad v_r]^{\mathrm{T}}$, $\bar{C}_2\bar{A}_2^2\bar{x} = -Kv_r/(LC) < 0$, $(\bar{C}_2, \bar{A}_2) \in P_{2-}^3$, $(\bar{C}_i, \bar{A}_i)(i=1,2)$ 属于(C9),由文献[13]中的定理 3.3 知,该系统不是适定的,即不存在 Carathéodory 意义下的唯一解.

2) $h(t) = \gamma + \eta(t \bmod T)$ 的场合.

通过计算可知，$(\bar{C}_1,\bar{A}_1)$的可观测性指数 $r_1=4$，$(\bar{C}_2,\bar{A}_2)$的可观测性指数 $r_2=4$，(C_1,A_1)的可观测性指数为 3，(C_2,A_2)的可观测性指数为 3. 其中

$$\bar{T}_1(4)=\begin{bmatrix} 0 & -K & -1 & K\times v_r-\gamma \\ -K/C & K/(RL) & 0 & -\eta \\ K/(RLC) & K/(LC)-K/(R^2L^2) & 0 & -K\times v_s/(LC) \\ K(LR^2-C)/(R^2L^2C^2) & -K(2LR^2-C)/(R^3L^3C) & 0 & K\times v_s/(L^2RC) \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_2(4)=\begin{bmatrix} 0 & K & 1 & -K\times v_r+\gamma \\ K/C & -K/(RL) & 0 & \eta \\ -K/(RLC) & -K/(LC)+K/(R^2L^2) & 0 & 0 \\ -K(LR^2-C)/(R^2L^2C^2) & K(2LR^2-C)/(R^3L^3C) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并且，使得 $\bar{T}_1(3)\bar{\boldsymbol{x}}=0$ 的 $\boldsymbol{x}=[\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\quad z]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} C(RKv_s-LR^2\eta+C\eta)/(LR^2K), \\ (RKv_s+C\eta)/(RK) \\ -(RK(v_s-v_r)+R\gamma+C\eta)/R \end{bmatrix}$，由于

$z=-(RK(v_s-v_r)+R\gamma+C\eta)/R\notin[0,T]$，所以 $N_3(\bar{C}_1,\bar{A}_1)=\phi$，使得

$$\bar{T}_2(3)\bar{\boldsymbol{x}}=0 \text{ 的 } \boldsymbol{x}=[\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\quad z]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} C\eta(-LR^2\eta+C)/(LR^2K) \\ (C\eta)/(RK) \\ (RKv_r-R\gamma-C\eta)/R \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_1(2)\bar{\boldsymbol{x}}=0 \text{ 的 } \hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -C(z-Kv_r+LR\eta+\gamma)/(LRK) \\ -(z-Kv_r+\gamma)/K \end{bmatrix},\ z\in[0,\eta T]$$

$\bar{C}_1\bar{A}_1^2\bar{\boldsymbol{x}}=-(RK(v_s-v_r)+R\gamma+Rz+C\eta)/(RLC)<0,\ \forall z\in[0,\eta T]$，使得

$$\bar{T}_2(2)\bar{\boldsymbol{x}}=0 \text{ 的 } \hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} -C(z-Kv_r+LR\eta+\gamma)/(LRK) \\ -(z-Kv_r+\gamma)/K \end{bmatrix},\ z\in[0,\eta T]$$

$\bar{C}_2\bar{A}_2^2\bar{\boldsymbol{x}}=(-RKv_r+R\gamma+Rz+C\eta)/(RLC),\ z\in[0,\eta T]$

由上式可知，当 $R\gamma+C\eta>RKv_r$ 时，

$\forall z\in[0,\eta T],\ \bar{C}_2\bar{A}_2^2\bar{\boldsymbol{x}}=(-RKv_r+R\gamma+Rz+C\eta)/(RLC)>0$

并且由于对于 $M=I_{2\times 2}\in L_+^2$，有 $\bar{T}_1(2)+M\bar{T}_2(2)=0$，所以由定理 1，$R\gamma+C\eta>RKv_r$ 时，该系统适定. 即对于给定的变换器，为了使得闭环系统适定，载波信号 $h(t)$ 的参数和比例控制器的比例增益 K 应当满足不等式 $R\gamma+C\eta>RKv_r$.

5　结论

对于具有锯齿时变约束的仿射系统的适定性，本文给出了易于检验的充分必要条件，并且研究了闭环 DC-DC 降压变换器的适定性问题. 当采用继电切换控制，即当载波信号 $h(t)=0$ 时，不管是比例控制还是 PI 控制，闭环 DC-DC 降压变换器都不是适定的；当载波信号 $h(t)$ 的参数和比例控制器的参数满足一定的条件时，比例控制的闭环 PWM DC-DC 变换器是适定的.

References

1 Antsaklis P, Kohn W, Nerode A, Sastry S Eds. Hybrid systems IV. Lecture Notes in Computer Science 1273. New York: Springer-Verlag, 1997

2 Maler O Ed. Hybrid and real time systems. Lecture Notes in Computer Science 1201. New York: Springer-Verlag, 1997

3 Ezzine J, Haddad A H. Controllability and observability of hybrid systems. *International Journal of Control*, 1989, **49**(6): 2045～2055

4 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 475～482

5 Ye H, Michel N, Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 461～474

6 Wicks M A, Peleties P, DeCarlo R A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida, USA: IEEE CSS, 1994. 3492～3497

7 Johansson M, Rantzer A. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 555～559

8 Hassibi A, Boyd S. Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems. In: Proceedings of American Control Conference, Philadelphia, PA: 1998. 3659～3664

9 Van der Schaft A J, Schumacher J M. The complementary-slackness class of hybrid systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1996, (9): 266～301

10 Van der Schaft A J, Schumacher J M. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 483～490

11 Heemels W P M H, Schumacher J M, Weiland S. Complementarity problems in linear complementarity systems. In: Proceedings of American Control Conference, Philadelphia, PA, USA: 1998. 706～710

12 Imura J, Van der Schaft A J. Characterization of well-posedness of piecewise linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(9): 1600～1619

13 Imura J, Van der Schaft A J. Well-posedness of a class of piecewise linear systems with no jumps. In: Proceedings of the 2nd International Workshop on Hybrid Systems-Computation and Control (HSCC'99), Vaandrager F W, van Schuppen J H Eds. Lect. Notes in Comp. Sci., Nijmegen, Netherlands: Springer-Verlag, 1999, (1569): 123～136

范启富 日本千叶大学工学博士，上海交通大学副教授. 主要研究领域为鲁棒控制、切换控制等.

(**FAN Qi-Fu** Received his Ph. D. degree from Chiba University, Japan in 1997. Now he is an associate professor in Shanghai Jiaotong University. His research interests include robust control and switching control.)

施颂椒 上海交通大学教授，博士生导师. 主要研究领域为鲁棒控制与自适应控制.

(**SHI Song-Jiao** Professor in the Department of Automation at Shanghai Jiaotong University. His research interests include robust control and adaptive control.)