基于小波分解的 MIMO 系统辨识最优实验设计[1)]

龙图景　孙政顺　李春文　姜培刚
（清华大学自动化系　北京 100084）
E-mail: tjlong99@mails.tsinghua.edu.cn

摘　要　提出了一种基于小波分解的 MIMO 系统辨识最优输入信号的设计方法，将小波的多分辨率分析应用于 MIMO 系统的最小二乘辨识中，并且与闭环系统的控制性能指标关联起来，从而得出一种最优实验的设计方法. 由于小波变换的多分辨特性和良好的去相关作用（对有色噪声的白化作用），这种方法能获得比普通的系统辨识方法更好的结果. 仿真实验证明了这种方法的有效性.

关键词　有关控制的辨识，小波分析，最优实验设计
中图分类号　TP27

Optimal Experiment Design for Wavelet-Based MIMO System Identification

LONG Tu-Jing　SUN Zheng-Shun　LI Chun-Wen　JIANG Pei-Gang
(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)
E-mail: tjlong99@mails.tsinghua.edu.cn

Abstract　A method of optimal input signal design for MIMO system identification is proposed. We first apply the wavelet multiresolution theory to the least-squares MIMO system identification, and combine the input signal with the control performance index of the closed-loop system, then develop a method of optimal experiment design. Due to the multiresolution characteristic and the pre-whitening ability of the wavelet transform, this method could get better results than the existing system identification methods. The simulation result shows the effectiveness of the proposed method.

Key words　Control-relevant identification, wavelet analysis, optimal experiment design

1) 国家自然科学基金(69774011, 69934010)和国家重点基础研究专项基金(G1998020307)资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(69774011, 69934010) and National Key Basic Research Special Funds(G1998020307)
收稿日期　2001-11-06　　收修改稿日期　2002-01-22
Received November 06, 2001; in revised form January 22, 2002

1 引言

采用小波分解[1]的辨识方法是一种有关控制的系统辨识方法[2~5]，它考虑的是辨识模型对于控制系统的“实用性”[6]. 这种方法通过小波变换把实验数据分解到不同的频段，选取系统工作频段的数据或者对各频段加权，从而实现对控制系统工作频段的精确建模.

实验数据是系统辨识的三要素之一，近年来实验设计的研究热点是控制相关的最优实验设计方法. 文献[7,8]提出的方法就是其中的一种，以最小化闭环系统的平方误差和为准则来设计辨识输入信号，这种方法物理意义明显，递推算法简单实用. 但采用的是普通的最小二乘辨识算法，且假定系统输出噪声是白噪声，这在应用上有一定的局限性.

本文所作的主要工作是将小波分解引入到采用广义正交基展开的 MIMO 系统辨识方法中，然后根据文献[7,8]的思路，推导出基于小波分解的 MIMO 系统辨识最优实验设计方法. 研究表明，由于小波变换良好的去相关能力，本文方法不但适用于输出噪声是白噪声的情况，而且在长相关的有色噪声下也能取得良好的结果；同时，由于采用控制相关的最优输入信号设计方法和频段加权的辨识方法，得出的系统模型非常适合于控制系统的设计. 最后，从仿真结果上与传统的最小二乘法和文献[7,8]的方法做了比较.

2 基于小波分解的 MIMO 系统辨识方法

为了便于将输入信号和控制性能联系起来，我们采用基于广义正交基函数展开的系统辨识方法[9]. 有关基函数的选择可参见文献[9].

考虑 MIMO 线性定常系统

$$\boldsymbol{y}(t) = G_0(q)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{d}(t) \tag{1}$$

选用如下的线性模型作为辨识模型

$$\boldsymbol{y}(t,\Theta) = \sum_{k=1}^{n}\Theta_k f_k(q)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{d}(t) = \Theta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{d}(t) \tag{2}$$

$$\Theta^{\mathrm{T}} = [\theta_1\theta_2\cdots\theta_n] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = [f_1(q)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\cdots f_n(q)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{u}(t)\in R^{n_u}$ 是系统输入向量，$\boldsymbol{y}(t)\in R^{n_y}$ 是系统输出向量，$\Theta_k\in R^{n_y\times n_u}$ 是待辨识的系数矩阵，$\{f_k\}_{k=1,2,3,\cdots}$ 是一组正交基函数.

基于小波分解的系统辨识方法的主要思想是利用离散小波变换或者多分辨分析[1]的方法，将实验数据分解到不同的频段，选取信噪比高的频段数据进行辨识建模[2]；或者将各频段的数据加权，突出控制系统的低频段和剪切频率附近的频段，从而得出适合控制系统设计的辨识模型[3~5]. 上述文献一般考虑的是 ARX 模型或者 ARMAX 模型，本文将把小波多分辨分析分段加权的方法，应用于采用广义正交基函数的系统辨识中.

首先将式(2)中每一维输入输出写成代数形式

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_u}\theta_{jil}\varphi_{jl}(t) + d_i(t), \quad i = 1,\cdots,n_y \tag{5}$$

其中，$\theta_{jil}=[\Theta_j]_{il}$，$\varphi_{jl}(t)=f_j(q)u_l(t)$，$u_l(t)$是多维输入 $\boldsymbol{u}(t)$中的某一维.

对式(5)的两端的进行小波分解，取多分辨分析的有限个子空间 $V_{p+1}, W_p, \cdots, W_1$. 为了突出控制系统的工作频段，消除高频段的噪声和干扰等因素对控制系统性能的影响，对各小波空间加权，定义 $V_m(W_m)$ 频段权系数为 c_m，可得到

$$c_m \sum_t \psi_{mk}(t) y_i(t) = c_m \sum_t \psi_{mk}(t) \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n_u} \theta_{jil} \varphi_{jl}(t) + c_m \sum_t \psi_{mk}(t) d_i(t) \tag{6}$$

其中 $\{\psi_{mk}(t)\}$ 是 $V_m(W_m)$ 子空间的小波基函数(对于 V_m 是尺度函数).

令

$$Wy_{imk} = c_m \sum_t \psi_{mk}(t) y_i(t);\quad i = 1, \cdots, n_y;\ m = 1, \cdots, p+1 \tag{7}$$

$$W\varphi_{jlmk} = c_m \sum_t \psi_{mk}(t) \varphi_{jl}(t);\ j = 1, \cdots, n;\ l = 1, \cdots, n_u;\ m = 1, \cdots, p+1 \tag{8}$$

$$Wd_{imk} = c_m \sum_t \psi_{mk}(t) d_i(t);\ i = 1, \cdots, n_y;\ m = 1, \cdots, p+1 \tag{9}$$

这样，式(6)可写为

$$W\boldsymbol{y}_{im} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n_u} \theta_{jil} W\varphi_{jlm} + W\boldsymbol{d}_{im} \tag{10}$$

将各维输入输出写到一起

$$W\boldsymbol{y}_m = \Theta^{\mathrm{T}} W\boldsymbol{\varphi}_m + W\boldsymbol{d}_m \tag{11}$$

其中 $W\boldsymbol{y}_m = [Wy_{1m} Wy_{2m} \cdots Wy_{n_y m}]^{\mathrm{T}}$，$W\boldsymbol{\varphi}_m = [W\phi_{11m} \cdots W\phi_{1n_y m} \cdots W\phi_{jlm} \cdots W\phi_{nn_y m}]^{\mathrm{T}}$，$W\boldsymbol{d}_m = [Wd_{1m} Wd_{2m} \cdots Wd_{n_y m}]^{\mathrm{T}}$.

根据式(11)，令 $P = \left(\sum_{m=1}^{p+1} W\boldsymbol{\varphi}_m (W\boldsymbol{\varphi}_m)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$，那么最小二乘法辨识结果为

$$\hat{\Theta} = P \sum_{m=1}^{p+1} W\boldsymbol{\varphi}_m (W\boldsymbol{y}_m)^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

因而辨识参数误差为

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\Theta} - \Theta)(\hat{\Theta} - \Theta)^{\mathrm{T}}\} &= E\{P[\sum_{m=1}^{p+1} W\boldsymbol{\varphi}_m (W\boldsymbol{d}_m)^{\mathrm{T}} \sum_{m=1}^{p+1} W\boldsymbol{d}_m (W\boldsymbol{\varphi}_m)^{\mathrm{T}}]\ P\} = \\ &P(W\boldsymbol{\varphi}) E\{(W\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} W\boldsymbol{d}\} (W\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{T}} P \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $W\boldsymbol{\varphi} = [W\varphi_1 W\varphi_2 \cdots W\varphi_{p+1}]$，$W\boldsymbol{d} = [W\boldsymbol{d}_1 W\boldsymbol{d}_2 \cdots W\boldsymbol{d}_{p+1}]$.

文献[10]中指出，如果随机变量 Y 的均值为 $A\theta$，协方差为 Σ，那么它的最优线性无偏估计(Best Linear Unbiased Estimator, BLUE)是 $\hat{\Theta} = [A^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} A]^{-1} A^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} Y$. 因此，如果在式(6)中选取适当的分辨率和分段权值，使得 $E((W\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} W\boldsymbol{d}) = n_y I$(这将在本文第 3 节分析)，则式(12)就是最优线性无偏估计，同时式(13)可以化简为

$$E\{(\hat{\Theta} - \Theta)(\hat{\Theta} - \Theta)^{\mathrm{T}}\} = n_y [W\boldsymbol{\phi} (W\boldsymbol{\phi})^{\mathrm{T}}]^{-1} = n_y P \tag{14}$$

相应的辨识传递函数的误差表达式就是

$$E\{(\hat{G} - G)^{\mathrm{T}} (\hat{G} - G)\} = \Lambda(e^{j\omega})^{\mathrm{T}} E\{(\hat{\Theta} - \Theta)(\hat{\Theta} - \Theta)^{\mathrm{T}}\} \Lambda(e^{j\omega}) \tag{15}$$

$$\Lambda(e^{j\omega}) = [\Lambda_1(e^{j\omega}) \cdots \Lambda_n(e^{j\omega})]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

其中 $\Lambda_k(e^{j\omega})$ 是如式(4)所示的正交基函数 $f_k(q)$ 的频率响应.

这样，由式(14)～(16)就能得出实验输入信号(存在于矩阵 $W\boldsymbol{\phi}$ 中)和辨识模型精度之间的显式表达式.

文献[7,8]采用普通的最小二乘辨识方法，推导出如下结果

$$E\{(\hat{\Theta}-\Theta)(\hat{\Theta}-\Theta)^{\mathrm{T}}\}=[\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}E\{\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{d}(t)\}=n_y[\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)]^{-1} \quad (17)$$

这是假定输出噪声是方差为 1 的白噪声而得出的结论，应用上具有一定的局限性，不如本文方法的通用性强.

3 递推最优输入信号设计算法

假设已经得到了前一步的辨识模型 $\hat{\Theta}_{k-1}$，当前的实验数据为 $A_k=[\boldsymbol{\varphi}(1)\cdots\boldsymbol{\varphi}(N)]^{\mathrm{T}}$，$Y_k=[\boldsymbol{y}(1)\cdots\boldsymbol{y}(N)]^{\mathrm{T}}$，那么第 k 步的辨识结果可以表示如下：

$$\hat{\Theta}_k=P_k\Big(\sum_{p=1}^{m+1}(W\boldsymbol{\varphi}_p)_k^{\mathrm{T}}(W\boldsymbol{y}_p)_k+P_{k-1}^{-1}\hat{\Theta}_{k-1}\Big) \quad (18)$$

$$P_k=\Big(\sum_{p=1}^{m+1}(W\boldsymbol{\varphi}_p)_k^{\mathrm{T}}(W\boldsymbol{\varphi}_p)_k+P_{k-1}^{-1}\Big)^{-1} \quad (19)$$

由文献[7,8]可知，若以最小化闭环系统的误差平方和 $J=E(\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e})$ 为目标，则设计最优输入信号的问题可以归结于使下式

$$E(J_k)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}trace(\hat{S}\boldsymbol{\varphi}_\eta\hat{S}^*+\hat{S}E\{(\hat{G}_k-G)\times\cdots[\hat{G}_{k-1}^{-1}\hat{H}\boldsymbol{\varphi}_\eta\hat{H}^*\hat{G}_{k-1}^{-*}](\hat{G}_k-G)^*\}\hat{S}^*]\mathrm{d}\omega \quad (20)$$

最小，式中 A^* 代表矩阵 A 的复共轭，$\hat{S}=(I+\hat{G}C)^{-1}$ 是系统的灵敏度函数，$\hat{H}=I-\hat{S}=\hat{G}C(I+\hat{G}C)^{-1}$ 是补灵敏度函数，$\boldsymbol{\varphi}_\eta$ 是 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{d}$ 的功率谱.

通过上述分析，我们提出基于小波分解的系统辨识最优实验设计定理.

定理 1. 若已知第 $k-1$ 步的辨识模型 $\hat{\Theta}$ 和 P_{k-1}，以及 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{d}$ 的功率谱 $\boldsymbol{\varphi}_\eta$，那么第 k 步的最优输入信号设计可以描述如下：

$$\min_{u(1)\cdots u(N)} trace(W_kP_k) \quad (21)$$

$$W_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}trace(\hat{S}^*\hat{S})\Lambda\hat{G}_{k-1}^{-1}\hat{H}\boldsymbol{\varphi}_\eta\hat{H}^*\hat{G}_{k-1}^{-*}\Lambda^*\mathrm{d}\omega \quad (22)$$

证明. 设各维输出噪声之间互不相关，则只需考虑任意一维的噪声小波系数 d_k^m 的特性

$$E(d_k^m d_{k'}^{m'})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E[\psi_{mk}(t)d_i(t)d_i(t')\psi_{m'k'}(t)]\mathrm{d}t'\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{mk}(t)R_d(t-t')\psi_{m'k'}(t)\mathrm{d}t'\mathrm{d}t \quad (23)$$

若 d_i 是白噪声序列，则其自相关函数 $R_d(t-t')=\delta(t-t')$，于是有

$$E(d_k^m d_{k'}^{m'})=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_{mk}|^2\mathrm{d}t,\ t=t',\ m=m',\ k=k'\\ 0,\ \text{其它}\end{cases} \quad (24)$$

令 $c_m=1\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_{mk}|^2\mathrm{d}t$，结合文献[8]的定理 1，可得出原定理结论.

对于谱特性为 $\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma}$ 的长时相关噪声，其自相关满足 $R(\tau)\propto|\tau|^{\gamma-1}$，而它的小波系数则满足如下特性[11] $E(d_k^m d_{k'}^{m'})\propto|2^m k-2^{m'}k'|^{-(2R-\gamma)}$（$R$ 是基本小波的正规性）. 可见，若 $R\geqslant$

$\gamma/2$，则小波系数相关性的衰减速度远远大于噪声本身相关的衰减，可以近似认为小波系数之间是不相关的(称为小波变换的白化作用[11]). 小波系数的方差为

$$E[(d_k^m)]^2 = \frac{2^{-m\gamma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma}|\boldsymbol{\varphi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{25}$$

令 $c_m = 1/E[(d_k^m)]^2$，由文献[8]的定理 1，定理得证.　　证毕.

从定理 1 可见，由于小波变换具有很强的白化作用，使得本文方法不但能处理白噪声，也能有效处理具有长时相关特性的有色噪声，大大增强了本文方法的实用性. 然而，在有关控制的辨识过程中，权值 c_m 的选择往往不像定理 1 的证明过程中那样，而是希望将低频段或者控制系统的工作频段选得大些，这样定理 1 就不适用了. 为此我们提出如下推论来解决.

推论 1. 对于上述基于小波分解的最优输入设计问题，设 $E[(d^m)]^2 = \sigma_m^2$，权值矩阵为 $C = \mathrm{diag}(C_{m+1}C_m\cdots C_1)$，其他条件同定理 1，则最优输入设计问题可以用下式描述

$$\min_{u(1)\cdots u(N)} trace(W_k P_k') \tag{26}$$

其中 $P_k' = P_k W\varphi_k \mathrm{diag}(\sigma_{m+1}^2 C_{m+1}\sigma_m^2 C_m\cdots\sigma_1^2 C_1)(W\varphi_k)^{\mathrm{T}} P_k$.

证明. 从定理 1 的证明过程可知

$$E\{(W\boldsymbol{d}_i)^{\mathrm{T}} W\boldsymbol{d}_i\} \approx \mathrm{diag}(\sigma_{m+1}^2 C_{m+1}\sigma_m^2 C_m\cdots\sigma_1^2 C_1) \tag{27}$$

其中 $W\boldsymbol{d}_i = [Wd_{i(m+1)} Wd_{im}\cdots Wd_{i1}]^{\mathrm{T}}$. 由式(13)可知

$$\begin{aligned} E\{(((\hat{\Theta}-\Theta)^{\mathrm{T}})_{row(l)})^{\mathrm{T}}((\hat{\Theta}-\Theta)^{\mathrm{T}})_{row(k)}\} &= P(W\boldsymbol{\varphi})E\{(W\boldsymbol{d}_i)^{\mathrm{T}} W\boldsymbol{d}_i\}(W\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{T}} P = \\ & P(W\boldsymbol{\varphi})\mathrm{diag}(\sigma_{m+1}^2 C_{m+1}\sigma_m^2 C_m\cdots\sigma_1^2 C_1)(W\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{T}} P \end{aligned} \tag{28}$$

结合定理 1，得证.　　证毕.

4　仿真结果和结论

仿真实验采用文献[7]中的 2×2 线性离散系统模型，补敏感函数的选择与文献[7]相同. 我们共作三组实验，第 1 组采用伪随机二进信号(PRBS)和普通最小二乘辨识方法，第 2 组采用文献[7,8]的方法，第 3 组采用本文方法，每组分别作 100 次实验. 第 3 组实验选用 db5 小波进行 MRA 分解，分解层次为 5 层，各频段的权值选为 $\lambda = \{0.9, 1, 1, 0.4, 0.2, 0.1\}$，根据推论 1 设计最优输入信号. 假定系统噪声是方差为 $(0.0525)^2 I$ 的白噪声. 这样得到的仿真结果如表 1 所示.

表 1　闭环系统响应结果比较

Table 1　Comparison between the responses of the closed-loop systems

	不稳定实验次数	稳定实验的平均误差
PRBS	63	0.0350
文献[7,8]方法	5	0.0056
本文方法	2	0.0041

从表 1 的结果可见，本文方法是最为理想的. 这是由于本文方法将面向控制的辨识方法与最优输入信号设计两方面有机结合，使得辨识模型对于控制来说是最合适的，从而取得了较好的控制效果.

5 结束语

本文提出了一种控制相关的 MIMO 系统辨识的最优输入信号设计方法，控制相关包括两个方面：首先最优输入的设计准则是基于闭环系统的；另外辨识算法中对实验数据进行小波分解，突出控制系统工作频段的信息，这也是面向控制的. 本文方法能有效处理白噪声和长相关有色噪声，仿真结果证明了这种方法的有效性.

References

1 Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, **11**(7): 674～693

2 Srinivas Palavajjhala, Rodolphe L Motard, Babu Joseph. Process identification using discrete wavelet transforms: Design of prefilters. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 1996, **42**(3): 777～789

3 John F Carrier, George Stephanopoulos. Wavelet-based modulation in control-relevant process identification. *AIChE Journal*, 1998, **44**(2): 341～360

4 Wan Hai-Qing, Song Zhi-Huan, Li Ping. Wavelet-based frequency band weighting approach to control-relevant process identification. In: Proceedings of the American Control Conference, Chicago: 2000. 944～948

5 Song Zhi-Huan, Wang Hai-Qing, Li Ping. Wavelet-based frequency band weighting approach for identirfication issue. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(2): 284～287 (in Chinese)

6 Lennart Ljung. System Identification: Theory for the User (2nd Ed). Upper Saddle River: Prentice Hall Press, 1999

7 Jay H Lee, Yudi Samyudia. LMI-based optimal design of test signals for control-relevant system identification. In: Proceedings of the American Control Conference, Chicago: 2000. 3224～3228

8 Brian L Cooley, Jay H Lee. Control-relevant experiment design for multivariable systems described by expansions in orthonormal bases. *Automatica*, 2001, **37**(2): 273～281

9 Van Den Hof, Heuberger, Bokor J. System identification with generalized orthonormal basis functions. *Automatica*, 1995, **31**(12): 1821～1834

10 GoodWin GC, Payne R L. Dynamic System Identification-Experiment Design and Data Analysis. New York: Academic Press, 1977

11 Patrick Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, **38**(2): 910～917

龙图景 清华大学自动化系博士生，研究兴趣为小波分析、系统辨识和网络建模与控制等.

(**LONG Tu-Jing** Ph. D. candidate at Tsinghua University. His research interests include wavelet analysis, system identification, and network modeling and control.)

孙政顺 清华大学自动化系副教授，研究兴趣为系统建模与控制等.

(**SUN Zheng-Shun** Associate professor at Tsinghua University. His research interests include system modeling and control.)