

基于观测器的 T-S 模糊系统稳定性分析¹⁾

李 柠 李少远 席裕庚

(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

(E-mail: syli@sytu.edu.cn)

摘 要 提出了一种新的基于观测器的 T-S 模糊系统稳定性分析方法. 文中将基于观测器的 T-S 模糊系统划分为主导子系统与关联系统之和的形式, 采用切换控制, 针对前提变量部分可测的情况, 利用向量 Lyapunov 函数方法给出了基于观测器的系统稳定性条件, 并依此得出了一种模糊控制系统规范化的设计方法. 结论还可推广到前提变量不可测及可测的情况, 并通过仿真算例得以验证.

关键词 T-S 模糊系统, 切换控制, 观测器, 稳定性, 向量 Lyapunov 函数

中图分类号 TP273

Stability Analysis of T-S Fuzzy System Based on Observers

LI Ning LI Shao-Yuan XI Yu-Geng

(Institute of Automation, Shanghai JiaoTong University, Shanghai 200030)

(E-mail: syli@sytu.edu.cn)

Abstract A new way to analyze stability issues of T-S fuzzy system based on observers is investigated. A T-S system based on observers is regarded as the integration of a dominant subsystem and its interactive systems. The control law is a kind of switching control. Stability condition and design algorithm of the fuzzy system based on observers are devised using the vector Lyapunov function approach for partly observable premise variables. Corresponding conditions can also be obtained for two cases with respect to observable premise variables and unobservable ones. An example is also given.

Key words T-S fuzzy systems, switching control, observers, stability, vector Lyapunov function

1 引言

T-S 模糊模型^[1]是一种本质非线性模型, 它利用尽可能少的规则描述复杂系统的动态

1) 国家自然科学基金(69934020, 60074004)资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(69934020, 60074004)

收稿日期 2001-11-16 收修改稿日期 2002-06-10

Received November 16, 2001; in revised form June 10, 2002

特性,文献[2]最早给出了 T-S 离散系统稳定的充分条件,即寻找保证各子系统稳定的公共 P 阵,并成为分析 T-S 模糊系统稳定性的主要手段,针对公共 P 阵的设计工作也相应展开,普遍采用 LMI 方法^[3,4],其计算量往往较大.采用向量 Lyapunov 函数方法,文献[5]在扩展状态空间上分析了 T-S 模糊系统的稳定性,文献[6,7]则将系统表示为当前主导子系统及关联作用的形式,并得出了系统稳定条件.由于采用 M -矩阵来判断系统稳定性,因而避免了求解公共 P 阵带来的计算量.然而,上述文献均以状态可观测为前提,其实对于 T-S 模糊系统来说,观测器同样重要,为此文献[8,9]设计了模糊调节器和模糊观测器,仍以寻找公共 P 阵为手段讨论了系统稳定性.本文采用切换控制,讨论了基于观测器的输出反馈 T-S 模糊控制系统在向量 Lyapunov 方法下的稳定性结论,并给出了相应的模糊控制系统规范化的设计方法.

2 相关知识

考虑如下形式的 T-S 模糊控制系统:

$$\begin{aligned} \text{(plant)} \quad R_i: \text{ if } z_1 \text{ is } M_{1i}, \dots, z_r \text{ is } M_{ri}, \text{ then } \mathbf{x}(t+1) &= A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_i \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{(controller)} \quad R_i: \text{ if } z_1 \text{ is } M_{1i}, \dots, z_r \text{ is } M_{ri}, \text{ then } \mathbf{u}(t) = k_i \mathbf{x}(t), \quad i = 1, \dots, l \quad (2)$$

其中 R_i 表示第 i 条规则, $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_r]$ 表示规则的前提变量, M_{1i}, \dots, M_{ri} 是第 i 条规则前提变量的模糊集合, $\mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^m, A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}$. 则全局系统可表示为

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=1}^l w_i(\mathbf{z}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)) \quad (3)$$

其中 $w_i(\mathbf{z}(t))$ 表示各规则的隶属权重, $w_i(\mathbf{z}(t)) = \omega_i(t) / \sum_{i=1}^l \omega_i(t), \omega_i(t) = \prod_{j=1}^r \mu_{M_{ji}}(z_j(t)), \mu_{M_{ji}}$ 是模糊集合 M_{ji} 的隶属度函数. 选取切换控制器

$$\mathbf{u}(t) = k_j \mathbf{x}(t), \quad j = \arg \max_i \{w_i(t), i = 1, \dots, l\} \quad (4)$$

则全局系统可由下列状态空间形式表示,

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=1}^l w_i(t) (A_i + B_i k_j) \mathbf{x}(t) \triangleq \sum_{i=1}^l w_i(t) A_{ij} \mathbf{x}(t) \quad (5)$$

在下文中, $\lambda_{\max}(H)$ 和 $\lambda_{\min}(H)$ 表示一个矩阵 H 的最大特征值和最小特征值, 并定义 $\|H\| = [\lambda_{\max}(H^T H)]^{1/2}$.

引理^[6]. T-S 模糊控制系统(5)是大范围指数稳定的, 如果 $E = [e_{ji}]$ 是 M -矩阵^[6],

$$e_{ji} = \begin{cases} \beta_j, & i = j \\ -\xi_{ji}, & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\beta_j = \frac{\lambda_{\min}(Q_j)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_j - Q_j) \lambda_{\max}^{1/2}(P_j) + \lambda_{\max}(P_j)}$, 正定对称矩阵 Q_j, P_j 满足 $A_{jj}^T P_j A_{jj} - P_j = -Q_j, \xi_{ji} = w_i(t) \|\Delta A_{ij}\|, \Delta A_{ij} = A_{ij} - A_{jj}$.

3 基于观测器的模糊控制系统稳定性分析与设计

对于系统(1), 模糊观测器可表示为

R_i : if z_1 is M_{1i}, \dots, z_r is M_{ri} , then $\hat{x}(t+1) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + l_i (y(t) - \hat{y}(t))$ (7)

其中 $\hat{x}(t)$ 为估计的状态向量, $y(t)$ 表示实际输出, $\hat{y}(t)$ 为估计输出, 则全局观测器为

$$\hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^l w_i(t) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + l_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (8)$$

其中 l_i 是观测器增益. 对于全局系统, 文献[10]中给出两种观测器设计方法, 即

$$l = l_s, \quad s = \arg \max_i (w_i(z(t))) \text{ 或 } l = \sum_{i=1}^l w_i(t) l_i$$

在此称前者为切换型观测器, 后者为模糊型观测器.

较之文献[8]中的前提变量不可测情况, 前提变量部分可测更具有实际意义, 因为在辨识系统模糊模型时, 总是尽可能选取可观测的系统变量作为前提变量. 若辨识或控制效果并不理想的时候, 则可以考虑选择若干不可观的系统变量补充为新的前提变量.

设观测后 z 记为 \hat{z} , $w_j(\hat{z}(t)) = \hat{w}_j(t)$. 令 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $\chi(t) = [x(t) \quad e(t)]^T$, 针对主导子空间 $Z_s = \{z(t) \mid w_s(z(t)) > w_i(z(t)), i \neq s, i=1, \dots, l\}$, 考虑基于切换型观测器的 T-S 模糊系统(5), 有

$$\chi(t+1) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) \hat{w}_j(t) \tilde{A}_{ij}^s \chi(t) \quad (9)$$

其中 $\tilde{A}_{ij}^s = \begin{bmatrix} A_i + B_i k_s & -B_i k_s \\ (A_i - A_j) + (B_i - B_j) k_s + l_s (C_j - C_i) & A_j + (B_j - B_i) k_s - l_s C_j \end{bmatrix}$, 则

$$\chi(t+1) = (A_{ss}^s + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) \hat{w}_j(t) \Delta A_{ij}^s) \chi(t) \triangleq A_{ss}^s \chi(t) + h_s(t, \chi(t)) \quad (10)$$

其中 $A_{ss}^s = \begin{bmatrix} A_s + B_s k_s & -B_s k_s \\ 0 & (A_s - l_s C_s) \end{bmatrix}$, $\Delta A_{ij}^s = \tilde{A}_{ij}^s - A_{ss}^s$, $h_s(t, \chi(t)) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t) \hat{w}_j(t) \Delta A_{ij}^s$,

$i, j, s=1, \dots, l$. 模糊系统(10)可以看作含有关联扰动项 $h_s(t, \chi(t))$, 其界为

$$\|h_s(t, \chi(t))\| \leq \sum_{j=1}^l \xi_j^s \|\chi(t)\|, \quad i, j, s=1, \dots, l \quad (11)$$

简单地可选取 $\xi_j^s = \sup_{\hat{z} \in Z_s} (\hat{w}_j(t) \cdot \max_i (\|\Delta A_{ij}^s\|))$, 或者通过优化算法得出相对宽松的 ξ_j^s .

定理. T-S 模糊控制系统(9)是大范围指数稳定的, 如果矩阵 $E = [e_{sj}]$ 是 M-矩阵,

$$e_{sj} = \begin{cases} \beta_s - \xi_j^s, & s = j \\ -\xi_j^s, & s \neq j \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\beta_s = \frac{\lambda_{\min}(Q_s)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_s - Q_s) \lambda_{\max}^{1/2}(P_s) + \lambda_{\max}(P_s)}$, 正定对称矩阵 Q_s 和 P_s 满足 $A_{ss}^s{}^T P_s A_{ss}^s - P_s = -Q_s$.

证明见附录 A.

对于前提变量不可测的情况, 定理的表述依然成立. 而对于前提变量完全可测的情况, 系统可写作,

$$\chi(t+1) = \sum_{j=1}^l w_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_j + B_j k_s & -B_j k_s \\ 0 & (A_j - l_s C_j) \end{bmatrix} \chi(t) \triangleq \sum_{j=1}^l w_j(z(t)) A_{js} \chi(t) \quad (13)$$

推论. T-S 模糊控制系统(13)是大范围指数稳定的, 如果矩阵 $E = [e_{sj}]$ 是 M-矩阵,

$$e_{sj} = \begin{cases} \beta_s, & j = s \\ -\xi_j^s, & j \neq s \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\beta_s = \frac{\lambda_{\min}(Q_s)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_s - Q_s)\lambda_{\max}^{1/2}(P_s) + \lambda_{\max}(P_s)}$, 正定对称矩阵 Q_s 和 P_s 满足 $A_s^T P_s A_s - P_s = -Q_s$.

$\xi_j^s(t) = \sup_{z \in Z_j} (\omega_j(t)) \|\Delta A_{js}\|$, $\Delta A_{js} = A_{js} - A_{ss}$. 证明与定理的证明类似.

由此得出 T-S 模糊控制系统的设计步骤如下:

- Step1.** 针对模糊系统各子系统设计局部状态反馈控制律 k_i 及观测器增益矩阵 l_i ;
- Step2.** 求解各子系统闭环稳定性矩阵 $P_i (Q_i = I)$, 并计算 β_i 及关联系统的上界 ξ_j^i ;
- Step3.** 形成相应的矩阵 E 并检验其是否为 M -矩阵;
- Step4.** 如果 E 是 M -矩阵, 则模糊控制系统设计完毕, 同时系统稳定性得到保证; 如果 E 不是 M -矩阵, 则需重新设计各局部闭环系统, 返回 Step1;
- Step5.** 如果重新设计无法保证相应定理成立, 则应当考虑重新辨识模糊系统或在关联程度较大的子系统之间增加新的规则, 并重复上述步骤, 直到获得满意的结果.

4 仿真例子

下面就前提变量部分可测的情况对形如式(1)和(2)的四规则 T-S 模糊系统进行仿真, $z(t) = [x_1(t), x_2(t)]$, 其中 $x_1(t)$ 可观测, 而 $x_2(t)$ 不可观, 隶属函数定义如图 1 所示.

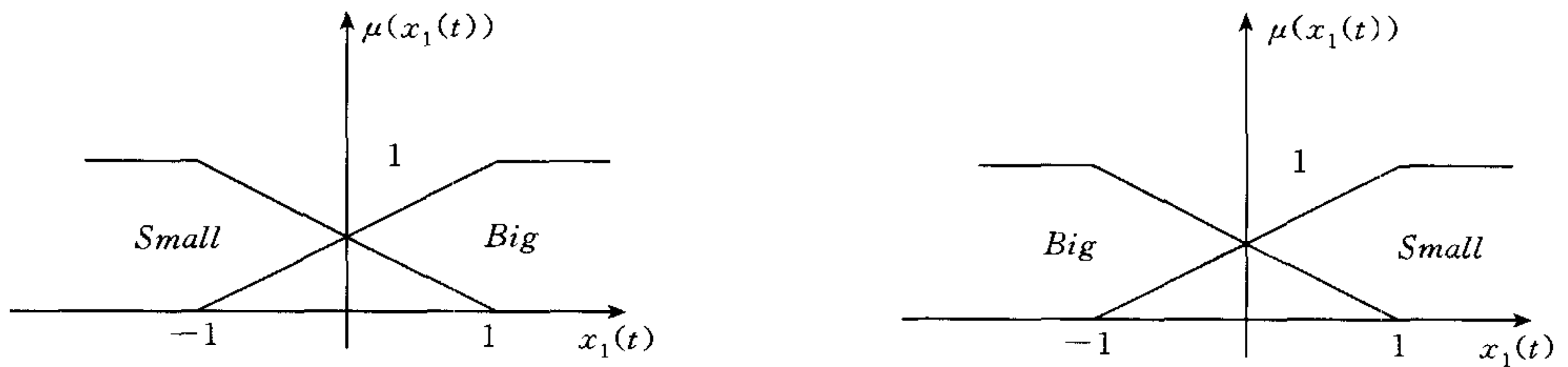


图 1 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 隶属度函数
Fig. 1 Membership functions of $x_1(t)$ and $x_2(t)$

其中 $A_1 = \begin{bmatrix} 0.075 & 0.116 \\ 1.025 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0.070 & 0.112 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0.082 & 0.104 \\ 1.005 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.100 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_i = [1 \ 1]$, $i=1, \dots, 4$. 由定理, 得出相应的判断矩阵,

$$E^* = \begin{bmatrix} 0.0788 & -0.0180 & -0.0153 & -0.0182 \\ -0.0181 & 0.0754 & -0.0166 & -0.0181 \\ -0.0169 & -0.0169 & 0.0810 & -0.0169 \\ -0.0182 & -0.0181 & -0.0169 & 0.0641 \end{bmatrix}$$

可以验证 E^* 为 M -矩阵, 因此所设计的控制系统稳定, 而且对状态的估计无余差, 图 2 给出了给定初始状态下的响应曲线和状态估计曲线, 图中实线为实际值, 虚线为估计值.

如果仍采用文献[8]中的稳定性分析及系统算法设计本例, 则需要求解关于 $G_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i + B_i k_s & -B_i k_s \\ G_{ijs}^1 & G_{ijs}^2 \end{bmatrix}$ 的公共正定 P 阵, 其中 $G_{ijs}^1 = (A_i - A_j) + (B_i - B_j)k_s + l_j(C_s - C_i)$, $G_{ijs}^2 = A_j - (B_i - B_j)k_s - l_j C_s$, 由文献[8]中结论要寻找 40 个矩阵的公共正定阵. 本文方法则

相对简便,且判断矩阵维数等于规则的个数,因此计算复杂程度与规模远远小于文献[8].

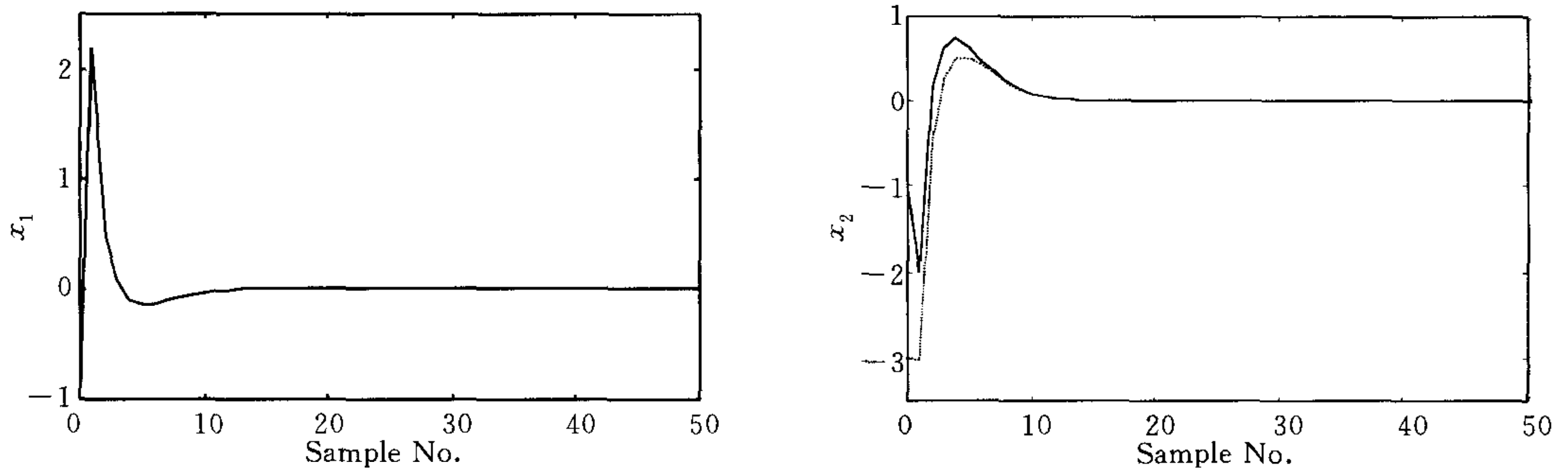


图 2 系统状态响应曲线($x_1(0)=1, x_2(0)=-1, \hat{x}_2(0)=-3$)
Fig. 2 State response curves($x_1(0)=1, x_2(0)=-1, \hat{x}_2(0)=-3$)

5 结束语

本文将基于观测器的 T-S 系统划分为主导子系统与关联系统之和的形式,采用切换控制,针对前提变量部分可测的情况,利用向量 Lyapunov 函数方法分别推出了系统稳定性条件,并将其推广到了前提变量完全可测及完全不可测的情况,得出了具备稳定性保证的相对简便的模糊控制系统规范化的设计步骤,仿真算例的结果进一步验证了结论.

References

- 1 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, **15**(1): 116~132
- 2 Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **45**(2): 135~156
- 3 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1): 1~13
- 4 Park J, Kim J S, Park D. LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **122**(1): 73~82
- 5 Akar M, Ozguner U. Decentralized techniques for the analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(6): 691~704
- 6 Cheng C M, Rees NW. Stability analysis of fuzzy multivariable systems: Vector Lyapunov function approach. *IEE Proceedings of Control Theory Applications*, 1997, **144**(5): 403~412
- 7 Sun Q, Li R H. Fuzzy control of multivariable systems based on fuzzy dynamic model. In: Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, Hefei, China, 2000. 1544~1547
- 8 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, **6**(2): 250~265
- 9 Yoneyama J, Nishikawa M, Katayama H *et al.* Design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **121**(1): 127~148
- 10 Sun Z Q, Zhang Z X, Deng Z D. Intelligent Control Theory and Technology. Beijing: Tsinghua University Press, 1997(in Chinese)

附录 A

定理的证明.

证明. 采用类似引理中的证明方法. 取 $v_s(\chi) = (\chi^T P_s \chi)^{1/2}$ 满足

$$\lambda_{\min}^{1/2}(P_s) \|\chi\| \leq v_s(\chi) \leq \lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \|\chi\| \quad (\text{A1})$$

则

$$\Delta v_s(\chi(t+1)) = [\chi^T(t+1) P_s \chi(t+1)]^{1/2} - [\chi^T(t) P_s \chi(t)]^{1/2} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_s)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_s - Q_s) + \lambda_{\max}^{1/2}(P_s)} \|\chi(t)\| \quad (\text{A2})$$

对离散系统(14), 定义 Lyapunov 函数为 v_s , 则有

$$\begin{aligned} \Delta v_s(\chi) &= v_s(A_{ss}^s \chi + h_s) - v_s(\chi) \leq \Delta v_s(\chi) + |v_s(A_{ss}^s \chi + h_s) - v_s(A_{ss}^s \chi)| \leq \\ &\Delta v_s(\chi) + \lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \|h_s\| \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_s)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_s - Q_s) + \lambda_{\max}^{1/2}(P_s)} \|\chi(t)\| + \lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \sum_{i=1}^l \xi_i^s \|\chi(t)\| = \\ &-\lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \left[\frac{\lambda_{\min}(Q_s)}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_s - Q_s) + \lambda_{\max}^{1/2}(P_s)} - \sum_{j=1}^l \xi_j^s \right] \|\chi(t)\| \triangleq -\lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \left[\beta_s - \sum_{j=1}^l \xi_j^s \right] \|\chi(t)\| \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

则对全局离散模糊系统, 定义 Lyapunov 函数 $V(\chi) = \sum_{s=1}^l \eta_s v_s(\chi)$, η_s 是一组正数, 则有

$$\Delta V(\chi) = \sum_{s=1}^l \eta_s \Delta v_s(\chi) \leq -\sum_{s=1}^l \eta_s \lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \left(\beta_s - \sum_{j=1}^l \xi_j^s \right) \|\chi\| = -\alpha^T E \theta \|\chi\| \quad (\text{A4})$$

其中, $\alpha = [\eta_1 \lambda_{\max}^{1/2}(P_1), \dots, \eta_l \lambda_{\max}^{1/2}(P_l)]^T$, E 如式(16)定义, $\theta = [1, \dots, 1]^T \in R_l$. 根据 M -矩阵的性质, 如果 E 是一个 M -矩阵, 则必存在一组正数 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ 满足

$$\alpha_j e_{jj} > \sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_i |e_{ij}| \quad (\text{A5})$$

容易验证 $\Delta V(\chi) < 0$, 因此系统是渐进稳定. 为了验证系统是大范围指数稳定的, 则由式(A5),

$$e_{jj} - \alpha_j^{-1} \sum_{i=1, i \neq j}^m \alpha_i |e_{ij}| > \sigma, \quad j = 1, \dots, l \quad (\text{A6})$$

其中 $\sigma > 0$. 将式(A6)代入(A4)中, $\Delta V(\chi) \leq -\sigma V(\chi)$, 则 $V(\chi(t+1)) \leq (1-\sigma)V(\chi(t)) \leq (1-\sigma)^t V(\chi_0)$, $\sum_{s=1}^l \eta_s v_s(\chi(t+1)) \leq (1-\sigma)^t \sum_{s=1}^l \eta_s v_s(\chi_0)$, $\sum_{s=1}^l \eta_s \lambda_{\min}^{1/2}(P_s) \|\chi(t+1)\| \leq (1-\sigma)^t \sum_{s=1}^l \eta_s \lambda_{\max}^{1/2}(P_s) \|\chi_0\|$. 定义 $\delta_{\min} = \min_s (\eta_s \lambda_{\min}^{1/2}(P_s))$, $\delta_{\max} = \max_s (\eta_s \lambda_{\max}^{1/2}(P_s))$, 则有 $\|\chi(t+1)\| \leq \frac{\delta_{\max}}{\delta_{\min}} (1-\sigma)^t \|\chi_0\|$, 因此系统(13)是大范围指数稳定的, 定理得证, 且状态估计无稳态误差. 证毕.

李 柠 2002 年于上海交通大学获得博士学位, 现在华东理工大学工业自动化国家工程研究中心工作. 主要研究方向为模糊系统、多模型系统等.

(LI Ning Received her Ph. D. degree from Shanghai Jiaotong University in 2002. Now, she works in the National Engineering Research Center for Industrial Automation-ECUST Branch. Her research interests include fuzzy systems and multi-model systems.)

李少远 上海交通大学自动化所教授, 博士生导师. 主要研究方向为模糊系统、非线性系统控制等.

(LI Shao-Yuan Professor in the Institute of Automation at Shanghai Jiaotong University. His research interests include fuzzy systems and nonlinear system control.)