第 30 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 30, No. 3
2004 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 2004

关于建模与自适应控制的一体化途径[1)]

韩志刚
(黑龙江大学电子工程学院 哈尔滨 150080)
(E-mail: dewauto@163.com)

摘 要 在文献自适应辨识预报和控制-多层递阶途经中，我们提出了非线性系统动态线性化的概念. 这种动态线性化仅仅是形式上的，而不是真的线性化. 但研究发现，在这种线性化过程中，包含了一种新的系统辨识思想，那就是在线实时建模—实时反馈控制校正的思想. 这种辨识把建模与反馈控制结合成为一体，突破了参数自适应的框架. 实现了控制系统的结构自适应性，并且避免了建立数学模型这一繁锁的步骤. 本文就是对这种系统建模与控制一体化的途径进行介绍.

关键词 实时辨识，反馈控制，结构自适应
中图分类号 TP273.2

An Integrated Approach to Modeling and Adaptive Control

HAN Zhi-Gang
(*Faculty of Electron-Engineering, Heilongjiang University, Harbin* 150080)
(E-mail: dewauto@163.com)

Abstract In the concept of dynamical linearization of non-linear system proposed by the author, the dynamical linearization is only formal, but not a real linearization. From the linearization procedure, a new approach of system identification that is on-line real time modeling and real time feedback control correction can be found. The modeling and real time feedback control are united in the identification approach, and the pattern of parameter adaption is broken up. The structure adaptation of control system is achieved, so the complex modeling steps are avoided. The objective of this paper is to introduce the approach of unity of modeling and control.

Key words Real time identification, feedback control, structure adaptive

1 引言

在文献[1]中，为了设计无模型控制律，我们讨论了非线性系统的所谓动态线性化问题，

1) 国家基础研究重大项目前期研究专项(2001CCA04000)
Supported by the Prophase Special Research Item of the National Important Foundational Research Project (2001CCA04000)
收稿日期 2003-08-07 收修改稿日期 2004-01-13
Received August 7, 2003; in revised form January 13, 2004

实质上,这是一种形式上的线性化. 在那里我们说明了下述的非线性模型:

$$y(k)=f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k] \tag{1}$$

在一定的条件下与控制律结合起来,可以实时的用下述的所谓泛模型来描写:

$$y(k)-y(k-1)=\varphi(k)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)] \tag{2}$$

这里 $y(k)$是系统一维的输出,$u(k)$是多维的输入,k 是离散的时间. 而

$$Y_{k-1}^{k-n}=\{y(k-1),\cdots,y(k-n)\},n \text{ 是正整}$$

$$U_{k-2}^{k-m}=\{u(k-2),\cdots,u(k-m)\},m \text{ 是正整数}$$

$\varphi(k)$是 U_{k-2}^{k-m},Y_{k}^{k-m}的函数. 它被称为 $y(k)$对 $u(k-1)$的伪梯度或泛模型的特征参量.

这种动态线性化仅仅是形式上的而不是真的线性化. 但为什么这种所谓的线性化手续在无模型控制律中能起那样好的作用呢? 研究发现在这种所谓的动态线性化中,包含了一种新的建模思想.

控制律设计中一般的需要建立动态系统的数学模型. 经典的方法要求这种数学模型必须事先建立,至少其结构必须事先确定. 而且模型愈精确愈好. 无模型控制律的设计中,突破了控制律对数学模型尽可能事先精确的建立这一要求的限制.

我们的建模手续是伴随反馈控制而进行的. 初始的数学模型可以是不精确的,但必须保证所设计的控制律具有一定的收敛性. 我们所设计的无模型控制律是边建模边控制,得到新的观测数据后,再建模再控制. 如此继续下去,使得每次得到的数学模型逐渐精确,从而控制律的性能也随之得到改善. 我们把这种手续称之为实时建模与反馈控制一体化手续.

这里,我们打破了首先对被控对象建立数学模型,然后依据这种模型设计控制律,接着在应用中对模型参数或控制律参数进行在线辨识,从而达到自适应的目的的传统自适应控制途径. 这种自适应的缺欠在于它仅仅是参数自适应,因为模型的基本结构已事先被确定,所以很难再实现结构自适应了.

参数自适应控制律,在应用于复杂的被控对象时,显示出了其明显的不足之处[5]. 因为模型结构(例如阶数)已被离线确定,它很难满足复杂系统某些变化的要求.

从另一个角度来讲,如果建模的目的是为了设计某一被控系统的控制律,而且该系统是一个复杂系统,那么事先建立一个可用的数学模型十分困难,目前甚至有些系统建立它可用的数学模型几乎是做不到的. 所以在设计控制律时,应尽可能避开这一困难任务.

本文所提出的实时辨识——实时反馈控制校正,把辨识与控制律的设计结合起来的途径. 将会避免上述的一系列问题,而且使得所设计的控制律还具有结构自适应性.

2 泛模型与特征参数量

我们在[1,2]等文献中,提出了如下的泛模型:

$$y(k)-y(k-1)=\varphi(k-1)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)] \tag{3}$$

不失一般性,这里假定被控动态系统 S 的时滞是 1,$y(k)$是系统 S 的一维输出,$u(k-1)$是 P 维输入. $\varphi(k)$是特征参量,它是利用某种辨识算法在线估计的,k 是离散时间. 我们将会看出,在实时辨识——实时反馈校正的辨识与控制一体化手续中,$\varphi(k)$有明显的数学与工程意义.

设动态系统 S 可被表示成如下形式:

$$y(k)=f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k] \tag{4}$$

其中,Y_{k-1}^{k-n},U_{k-2}^{k-m}如前所述.假定 $f[\cdot,u(k-1),\cdot,k]$对 $u(k-1)$具有连续的梯度(偏导数).

在以下的讨论中恒假定系统 S 满足条件:在系统处于稳态时,如果 $u(k-1)=u(k-2)$,则必有 $y(k)=y(k-1)$(在随机的情形则有 $E\{y(k)\}=E\{y(k-1)\}$).于是有

$$\begin{aligned}y(k)-y(k-1)=&f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k]-f[Y_{k-2}^{k-n-1},u(k-2),U_{k-3}^{k-m-1},k]=\\&f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k]-f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-2),U_{k-2}^{k-m},k]+\\&f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-2),U_{k-2}^{k-m},k]-f[Y_{k-2}^{k-n-1},u(k-2),U_{k-3}^{k-m-1},k-1]\end{aligned}$$

令

$$f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-2),U_{k-2}^{k-m},k]-f[Y_{k-2}^{k-n-1},u(k-2),U_{k-3}^{k-m-1},k-1]=\xi(k)$$

应用微分中值定理,我们有:

$$\begin{aligned}&f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k]-f[Y_{k-1}^{k-m},u(k-2),U_{k-2}^{k-m},k]=\\&\nabla_{u(k-2)}f[Y_{k-1}^{k-n},\overline{u(k-2)},U_{k-2}^{k-m},k]^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)]\end{aligned}$$

其中$\overline{u(k-2)}=u(k-2)+\theta(u(k-1)-u(k-2))$,$\theta$ 满足 $0\leqslant\theta\leqslant1$.所以我们有

$$y(k-y(k-1)=\nabla_{u(k-2)}f[\overline{u(k-2)},k]^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)]+\xi(k) \tag{5}$$

这里

$$\nabla_{u(k-2)}f[\overline{u(k-2)},k]=\nabla_{u(k-2)}f[Y_{k-1}^{k-n},\overline{u(k-2)},U_{k-2}^{k-m},k]$$

定义 1. 如果由条件

$$Y_{k-1}^{k-n}=Y_{k-2}^{k-n-1},\quad U_{k-2}^{k-m}=U_{k-3}^{k-m-1},\quad u(k-1)=u(k-2)$$

可得出

$$f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k]=f[Y_{k-2}^{k-n-1},u(k-2),U_{k-2}^{k-m},k-1]$$

我们就说系统(4)自时不变的.

显然,如果系统(4)是自时不变的,并且函数 $f[y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k]$关于变量 Y_{k-1}^{k-n},$u(k-1)$,U_{k-2}^{k-m}是连续的,那未必有

$$\lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-n-1}\\U_{k-1}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}}f[Y_{k-1}^{k-n},u(k-1),U_{k-2}^{k-m},k]=f[Y_{k-2}^{k-n-1},u(k-2),U_{k-3}^{k-m-1},k-1]$$

特别地,我们有

$$\lim_{\substack{Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-n-1}\\U_{k-1}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}}\xi(k)=0$$

进一步,如果令 $\psi(k)=\nabla_{u(k-2)}f[\overline{u(k-2)},k]$,那么式(5)就可以写成

$$y(k)-y(k-1)=\psi(k)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)]+\xi(k) \tag{6}$$

如果$\|u(k-1)-u(k-2)\|\neq0$,令

$$\varphi(k-1)=\psi(k)+\frac{u(k-1)-u(k-2)}{\|u(k-1)-u(k-2)\|^2}\xi(k)$$

则式(6)又可写成

$$y(k)-y(k-1)=\varphi(k-1)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)] \tag{7}$$

注. 在系统处于稳态时,由于从$\|u(k-1)-u(k-2)\|=0$ 可得出 $y(k)=y(k-1)$,所以此时可以认为式(7)自然成立.

式(7)就是我们所提出的泛模型.$\varphi(k-1)$就是泛模型的特征参量.

3 实时建模与反馈控制一体化

可以看出泛模型

$$y(k)-y(k-1)=\varphi(k-1)^{\tau}[u(k-1)-u(k-2)] \tag{8}$$

能够被实际应用的必要条件是 $\varphi(k)$的估值 $\hat{\varphi}(k)$能够被实时的得到,并且具有足够的准确性.关于 $\varphi(k)$的估计,我们有一系列的方法.例如:

1) 递推最小二乘法

只要令

$$z(k)=y(k)-y(k-1)$$
$$\phi(k)=u(k-1)-u(k-2)$$

则模型(8)就变成了

$$z(k)=\phi(k)^{\tau}\varphi(k-1) \tag{9}$$

对 $y(k)$,$u(k-1)$进行实时观测时,$z(k)$和 $\phi(k)$也就被得出了,于是 $\varphi(k-1)$的估值 $\hat{\varphi}(k-1)$可由如下的递推算法得出

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(k-1)&=\hat{\varphi}(k-2)+M(k)\{z(k)-\phi(k)^{\tau}\hat{\varphi}(k-2)\}\\ M(k)&=\frac{P(k-1)\phi(k)}{\delta_k+\phi(k)^{\tau}P(k-1)\phi(k)}\\ P(k)&=\frac{1}{\delta_k}\{I-M(k)\phi(k)^{\tau}]P(k-1)\end{aligned} \tag{10}$$

其中 δ_k为遗忘因子,I 为相应维数的单位矩阵.

2) 递推梯度算法[1]

仍从模型(9)出发,$\varphi(k-1)$的估值 $\hat{\varphi}(k-1)$可由下式得出

$$\hat{\varphi}(k-1)=\hat{\varphi}(k-2)+\frac{\delta}{\eta_k+\|\phi(k)\|^2}\phi(k)\{z(k)-\phi(k)^{\tau}\hat{\varphi}(k-2)\} \tag{11}$$

其中η_k是适当小的正数,δ 为适当的常数.

控制律的设计问题,可描述如下:

已知系统 S 的观测数据$\{u(k-1),y(k)\}$,并且 $k+1$ 时刻的期望输出 $y_0(k+1)$已给定,要求寻求一个控制量 $u(k)$,使得在 $u(k)$的作用下,系统 S 的输出是 $y_0(k+1)$.

如果系统 S 可被下述的泛模型所描写

$$y(k+1)-y(k)=\varphi(k)^{\tau}[u(k)-u(k-1)] \tag{12a}$$

而且 $\hat{\varphi}(k)$假定是已知的,并且是对 $\varphi(k)$的最佳估计,则我们近似地用下式来代替(12a)

$$y(k+1)-y(k)=\hat{\varphi}(k)^{\tau}[u(k)-u(k-1)] \tag{12b}$$

在控制律的设计中,式(12)的左端变成了 $y_0(k+1)-y(k)$.于是式(12b)变成了下述的不定方程

$$y_0(k+1)-y(k)=\hat{\varphi}(k)^{\tau}[u(k)-u(k-1)]$$

该不定方程的未知量是 $u(k)$.不难看出它存在一个如下所述的特解

$$u(k)=u(k-1)+\frac{1}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\hat{\varphi}(k)\{y_0(k+1)-y(k)\} \tag{13}$$

式(13)就可以看成是对系统 S 的一个控制律. 但当 $\|\hat{\varphi}(k)\|^2=0$ 时,式(13)就没有意义了. 为了避免分母为零,我们用 $a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2$ 代替上式中 $\|\hat{\varphi}(k)\|^2$,为不破坏等式关系,我们把 1 换成 λ_k,即有

$$u(k)=u(k-1)+\frac{\lambda_k}{a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\hat{\varphi}(k)\{y_0(k+1)-y(k)\}$$

其中 a 是一个适当的小正数,如果设定值 $y_0(k+1)=y_0$ 是常数,则上式就变成了

$$u(k)=u(k-1)+\frac{\lambda_k}{a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\hat{\varphi}(k)\{y_0-y(k)\} \tag{14}$$

λ_k 称为控制参数. 它的选取与控制律的收敛性有密切关系. 式(14)称为无模型控制律的基本形式.

至此,我们得到了建模与反馈控制一体化的框架如下.

1) 依据观测数据和泛模型

$$y(k)-y(k-1)=\varphi(k-1)^{\tau}\{u(k-1)-u(k-2)\}$$

利用适当的估值方法,例如(Ⅰ)或(Ⅱ)得到了 $\varphi(k-1)$ 的估值 $\hat{\varphi}(k-1)$.

2) 寻求 $\hat{\varphi}(k-1)$ 的向前一步的预报值 $\hat{\varphi}^*(k)$,一个简单的方法就是取

$$\hat{\varphi}^*(k)=\hat{\varphi}(k-1)$$

在寻求控制律时,我们把 $\hat{\varphi}^*(k)$ 仍记成 $\hat{\varphi}(k)$.

3) 把控制律

$$u(k)=u(k-1)+\frac{\lambda_k}{a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\hat{\varphi}(k)\{y_0-y(k)\}$$

作用于系统 S,得到新的输出 $y(k+1)$. 于是得到了一组新的数据 $\{y(k+1),u(k)\}$.

在这组新数据的基础上重复 1),2)和 3),即可又得出新的数据 $\{y(k+2),u(k+1)\}$,如此继续下去. 从后续的讨论中可以看出,只要系统 S 满足一定的条件,在这种手续的作用下,系统 S 的输出 $y(k)$ 将逐渐地逼近 y_0.

4 控制律的收敛性分析

实时建模——反馈控制一体化手续能够被应用的必要条件是 $\varphi(k)$ 的估值算法与控制算法(14)都是收敛的. 估值算法的收敛性已经是众所周知的事实,这里只分析控制律(14)的收敛性.

因为无模型控制律是辨识算法和控制算法相结合交互在线进行的产物. 所以控制律的收敛性分析的出发点应该是泛模型

$$y(k+1)-y(k)=\varphi(k)^{\tau}[u(k)-u(k-1)] \tag{15}$$

和控制律

$$u(k)=u(\ \ -1)+\frac{\lambda_k}{a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\hat{\varphi}(k)\{y_0-y(k)\} \tag{16}$$

把式(16)代入式(15),可以得出

$$y(k+1)-y(k)=\lambda_k\frac{\varphi(k)^{\tau}\hat{\varphi}(k)}{a+\|\hat{\varphi}(k)\|^2}\{y_0-y(k)\} \tag{17}$$

其中 $y(k+1)$ 是在 $u(k)$ 作用下真实系统的输出. 由式(17)可以得出

$$y_0 - y(k+1) = y_0 - y(k) - \lambda_k \frac{\varphi(k)^\tau \hat{\varphi}(k)}{a + \|\hat{\varphi}(k)\|^2}\{y_0 - y(k)\} =$$

$$(1 - \lambda_k \frac{\varphi(k)^\tau \hat{\varphi}(k)}{a + \|\hat{\varphi}(k)\|^2})(y_0 - y(k))$$

令 $\Delta_k = \dfrac{\varphi(k)^\tau \hat{\varphi}(k)}{a + \|\hat{\varphi}(k)\|^2}$,则上式变成了

$$y_0 - y(k+1) = (1 - \lambda_k \Delta_k)(y_0 - y(k)\}$$

再应用辨识算法,从泛模型出发得出 $\varphi(k+1)$的估值 $\hat{\varphi}(k+1)$. 继而在控制律

$$u(k+1) = u(k) + \frac{\lambda_{k+1}}{a + \|\hat{\varphi}(k+1)\|^2}\hat{\varphi}(k+1)\{y_0 - y(k+1)\}$$

的作用下,又得到真实系统的输出 $y(k+2)$. 于是可以得出:

$$y_0 - y(k+2) = (1 - \lambda_{k+1}\Delta_{k+1})(y_0 - y(k+1) =$$

$$(1 - \lambda_{k+1}\Delta_{k+1})(1 - \lambda_k \Delta_k)(y_0 - y(k))$$

如此继续下去. 可以得到

$$y_0 - y(k+h) = \prod_{j=0}^{h-1}(1 - \lambda_{k+j}\Delta_{k+j})(y_0 - y(k)) \tag{18}$$

此式是我们进行收敛性分析的基础,一个直接的结果是

定理 1. 如果

1) $0 \leqslant \lambda_{k=h}\Delta_{k+h} \leqslant 1$　　对一切 $h \geqslant 0$

2) $\sum_{h=0}^{\infty} \lambda_{k+h}\Delta_{k+h} = \infty$

则有

$$\lim_{h\to\infty} y(k+h) = y_0$$

下述定理说明了只要 $\varphi(k)$和 $\hat{\varphi}(k)$的差满足一定的条件并且$\|\hat{\varphi}(k)\|$是有界的,就可以保证控制律的收敛性.

定理 2. 只要 $\varphi(k)$与它的估值 $\hat{\varphi}(k)$之间满足关系:

$$\varphi(k) - \hat{\varphi}(k) = \varepsilon(k)$$

$$-\frac{a}{2} \leqslant \varepsilon(k)^\tau \hat{\varphi}(k) \leqslant \frac{a}{2}$$

并且

$$a \leqslant \|\hat{\varphi}(k)\|^2 \leqslant b$$

就有适当的 $\lambda_k = \lambda$,使得有

$$\lim_{h\to\infty} y(k+h) = y_0$$

证明. 注意到

$$\Delta_k = \frac{\varphi(k)^\tau \hat{\varphi}(k)}{a + \|\hat{\varphi}(k)\|^2} = \frac{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 + \varepsilon(k)\hat{\varphi}(k)}{a + \|\hat{\varphi}(k)\|^2}$$

从而

$$0 \leqslant \frac{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 - \frac{a}{2}}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 + a} \leqslant \Delta_k \leqslant \frac{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 + \frac{a}{2}}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 + a} \leqslant 1$$

于是由式(18)得出

$$|y_0 - y(k+h)| = \prod_{j=0}^{h-1} |1-\lambda_{k+j}\Delta_{k+j}|\,|y_0 - y(k)|$$

只要 $\lambda_{k+j} \geqslant 0$ 就有

$$|y_0 - y(k+h)| \leqslant |y_0 - y(k)| \prod_{j=0}^{h-1} \left|1-\lambda_{k+j}\frac{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 - \frac{a}{2}}{\|\hat{\varphi}(k)\|^2 + a}\right| \leqslant$$

$$|y_0 - y(k)| \prod_{j=0}^{h-1} \left|1-\lambda_{k+j}\frac{a - \frac{a}{2}}{b+a}\right|$$

由此可见,只要取 $\lambda_{k+j} = \dfrac{b+a}{a}$,就有

$$|y_0 - y(k+h)| \leqslant |y_0 - y(k)| \left(1-\frac{1}{2}\right)^h = |y_0 - y(k)| \left(\frac{1}{2}\right)^h \to 0 \quad (h \to \infty)$$

即 $\lim\limits_{h\to\infty} y(k+h) = y_0$. 证毕.

如果系统是单输入单输出的,只要 $\varphi(k)$ 和 $\hat{\varphi}(k)$ 满足一定的有界性条件,就可以得出控制律的收敛性.

定理 3. 如果存在常数 $\delta>0$ 和 $\beta>0$ 满足条件:

$$\delta \leqslant \varphi(k) \leqslant \beta$$

$$\delta \leqslant \hat{\varphi}(k) \leqslant \beta$$

则存在适当的 $\lambda_k = \lambda$,使得有

$$\lim_{h\to\infty} y(k+h) = y_0$$

证明. 注意到

$$\Delta_k = \frac{\varphi(k)^{\tau}\hat{\varphi}(k)}{a + \|\hat{\varphi}(k)\|^2}$$

所以有

$$\frac{\delta^2}{a+\beta^2} \leqslant \Delta_k \leqslant \frac{\beta^2}{a+\delta^2}$$

只要 $\lambda_{k+j} > 0$ 由式(18)得出

$$|y_0 - y(k+h)| \leqslant |y_0 - y(k)| \prod_{j=0}^{h-1} \left|1-\lambda_{k+j}\frac{\delta^2}{a+\beta^2}\right|$$

由此可见,只要取

$$\lambda_{k+j} = \frac{a+\beta^2}{2\delta^2}$$

就有

$$|y_0 - y(k+h)| \leqslant |y_0 - y(k)| \left(\frac{1}{2}\right)^h \to 0 \quad (h \to \infty)$$

即 $\lim\limits_{h\to\infty} y(k+h) = y_0$. 证毕.

5 控制变量的收敛性和特征参量分析

在建模与反馈控制一体化的手续下,只要系统满足一定条件,控制律的收敛性已被证

明. 这里将说明在定理 2 和定理 3 的条件下,控制变量 $u(k)$也具有收敛性.

事实上我们有下述定理.

定理 4. 如果定理 2 的条件被满足,则有:

1) $\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\leqslant C\dfrac{(a+b)\sqrt{b}}{a}\left(\dfrac{1}{2}\right)^h$,其中 C 为与 h 无关的常数;

2) $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\|u(k+h)-u(k+h-1)\|<+\infty$;

3) 存在 u_0 使得有 $\lim\limits_{h\to\infty}u(k+h)=u_0$.

证明. 关于 1),由于

$$u(k+h)=u(k+h-1)+\frac{\lambda_{k+h}}{a+\|\hat{\varphi}(k+h)\|^2}\hat{\varphi}(k+h)[y_0-y(k+h)]$$

所以

$$\|u(k+h)-u(k+h-1)\|=\frac{\lambda_{k+h}}{a+\|\hat{\varphi}(k+h)\|^2}\|\hat{\varphi}(k+h)\|\,|y_0-y(k+h)|$$

在定理 2 的证明中得出了(在 $\lambda_{k+j}\geqslant 0$ 的条件下)

$$|y_0-y(k+h)|\leqslant|y_0-y(k)|\prod_{j=0}^{h-1}\left(1-\lambda_{k+j}\frac{a}{2(a+b)}\right)$$

取 $\lambda_{k+j}=\dfrac{a+b}{a}$就有

$$|y_0-y(k+h)|\leqslant|y_0-y(k)|\left(\frac{1}{2}\right)^h$$

从而

$$\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\leqslant\frac{(a+b)\|\hat{\varphi}(k+h)\|}{a(a+\|\hat{\varphi}(k+h)\|^2)}|y_0-y(k)|\left(\frac{1}{2}\right)^h\leqslant$$
$$\frac{(a+b)\sqrt{b}}{2a^2}|y_0-y(k)|\left(\frac{1}{2}\right)^h=C\frac{(a+b)\sqrt{b}}{2a^2}\left(\frac{1}{2}\right)^h$$

这里 $C=|y_0-y(k)|$.

关于 2),注意到

$$\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\leqslant C\frac{(a+b)\sqrt{b}}{2a^2}\left(\frac{1}{2}\right)^h$$

就有

$$\sum_{h=1}^{\infty}\|u(k+h)-u(k+h-1)\|\leqslant C\frac{(a+b)\sqrt{b}}{a}\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^h\leqslant 2C\frac{(a+b)\sqrt{b}}{a}<+\infty$$

关于 3),对任何的 $n>m$,我们有

$$\|u(k+n)-u(k+m)\|=\|u(k+n)-u(k+n-1)+u(k+n-1)+\cdots+$$
$$u(k+m+1)-u(k+m)\|\leqslant\|u(k-n)-u(k+n-1)\|+\|u(k+n-1)-$$
$$u(k+m-2)\|+\cdots+\|u(k+m+1)-u(k+m)\|=\sum_{h=m}^{n-1}\|u(k+h+1)-u(k+h)\|$$

由于

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{h=m}^{n-1}\|u(k+h-1)-u(k+h)\|=0$$

所以$\{u(k+h)\}$是一 Cauchy 叙列，故必有某一个 u_0满足

$$\lim_{h\to\infty} u(k+h) = u_0$$

证毕

定理 5. 在定理 3 的条件下，我们有

1) $\|u(k+h)-u(k+h-1)\| \leqslant C\dfrac{(a+\beta^2)\beta}{2(a+\delta^2)\delta^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^h$；

2) $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\|u(k+h)-u(k+h-1)\| < t\infty$；

3) 存在使得有$\lim\limits_{h\to\infty} u(k+h)=u_0$.

证明. 与定理 4 完全相同.

至此，我们说明了在建模与反馈控制一体化手续执行过程中，只要满足一定的条件，就有

$$\lim_{h\to\infty} y(k+h) = y_0$$

$$\lim_{h\to\infty} u(k+h) = u_0$$

可以得到下述结论.

结论. 建模与控制一体化手续所产生的控制律是可用的，因而这种手续是合理的.

以下对特征参量 $\varphi(k-1)$的意义进行分析，为此注意到

$$\lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\ Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-n-1}\\ U_{k-2}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}} \varphi(k-1) = \lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\ Y_{k-1}^{k-n-1}\to Y_{k-2}^{k-n}\\ U_{k-2}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}} \left(\psi(k) + \frac{u(k-1)-u(k-2)}{\|u(k-1)-u(k-2)\|^2}\xi(k)\right)$$

在特殊情形下，能够有

$$\lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\ Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-m-1}\\ U_{k-2}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}} \frac{u(k-1)-u(k-2)}{\|u(k-1)-u(k-2)\|^2}\xi(k) = 0$$

例如，对于系统

$$y(k) = a\mathrm{e}^{bu(k-1)}$$

我们有

$$f[Y_{k-1}^{k-n}, u(k-2), U_{k-2}^{k-m}, k] = a\mathrm{e}^{bu(k-2)}$$

并有

$$f[Y_{k-2}^{k-n-1}, u(k-2), U_{k-3}^{k-m-1}, k] = a\mathrm{e}^{bu(k-2)}$$

从而得出

$$\xi(k) = f[Y_{k-1}^{k-n}, u(k-2), U_{k-2}^{k-m}, k] - f[Y_{k-2}^{k-n-1}, u(k-2), U_{k-3}^{k-m-1}, k-1] = 0$$

在这种特殊情形下当然有

$$\lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\ Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-m-1}\\ U_{k-2}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}} \frac{u(k-1)-u(k-2)}{\|u(k-1)-u(k-2)\|^2}\xi(k) = 0$$

如果令

$$\nabla_{u(k-2)} f[u(k-2), k] = \nabla_{u(k-2)} f[Y_{k-2}^{k-n-1}, u(k-2), U_{k-3}^{k-m-1}, k]$$

显然，

$$\nabla_{u(k-2)} f[u(k-2), k] = ab\mathrm{e}^{bu(k-2)}$$

由 $u(k-1)\to u(k-2)$，可得出 $\overline{u(k-2)}\to u(k-2)$.

从而

$$\lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\ Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-n-1}\\ U_{k-2}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}} \varphi(k-1) = \lim_{\substack{u(k-1)\to u(k-2)\\ Y_{k-1}^{k-n}\to Y_{k-2}^{k-n-1}\\ U_{k-2}^{k-m}\to U_{k-3}^{k-m-1}}} \psi(k) = \nabla_{u(k-2)} f[u(k-2),k]$$

上述讨论说明了泛模型的特征参量 $\varphi(k-1)$ 与梯度 $\nabla_{u(k-2)} f[u(k-2),k]$ 之间存在密切关系,所以把泛模型的特征参量 $\varphi(k-1)$ 又叫做伪梯度.

6 结论

上述的一系列分析,说明了建模与反馈控制一体化的手续是可行的.所以在考虑控制系统设计的建模问题时,我们可以脱离开"先建模后设计"的经典途径,只要从所谓的泛模型出发,在一定的条件下,所设计的控制器的收敛性将得到保证.反过来这又保证了控制器设计时所依赖的所谓的泛模型的逐渐精确化.无模型控制器就是用这种途径设计出来的,它在应用中所获得的大量的成功的实例[7],进一步证明了这种手续的合理性.

References

1 Han Zhi-Gang, Jian Ai-Ping, Wang Hong-Qiao. Adaptive Identification, Prediction and Control——Multi Level Recursive Approach. Harbin: Heilongjiang Education Publishing House, 1995(in Chinese)

2 Han Zhi-Gang, Qin Bin. Direct adaptive control for nonlinear systems. *Systems Analysis Modeling Simulation*, 1997, **28**(3): 301～315

3 Han Zhi-Gang. Designing problem of model free controller. *Control Engineering of China*, 2002, **9**(3):19～32(in Chinese)

4 Han Zhi-Gang. Non-modeling adaptive controller and identification of its important parameter. *Control Theory and Applications* 1999, (Supplement): 145～148(in Chinese)

5 Han Zhi-Gang, Xu Ming-Xing. The general form of model free controller with application in refining and chemical industry. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 200.., **18**(3):24～29(in Chinese)

6 Han Zhi-Gang, Yang Yan-Mei. The model free control law of multi-input multi-output non-linear systems. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 1995, **12**(3):1～7(in Chinese)

7 Han Zhi-Gang. The application of model free controller. *Control Eningeering of China*, 2002,**9**(4):22～25(in Chinese)

韩志刚　黑龙江大学教授,博士生导师.1958 年毕业于吉林大学.提出了多层递阶方法和无模型控制技术.现正从事复杂系统的控制、无模型控制理论和应用的研究.

(**HAN Zhi-Gang**　Professor at Heilongjiang University. He has presented the multi-level recursive method and the control technique of mode free. His research interests include control of complex system with application and model free control law.)