第 30 卷 第 6 期 自 动 化 学 报 Vol.30, No.6
2004 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 2004

带有不确定性参数的多变量非线性系统的半全局实用镇定[1)]

蔡秀珊[1,2] 韩正之[1] 寇春海[2]
[1](上海交通大学自动化系 上海 200030)
[2](福建三明学院 三明 365001)
(E-mail xiushan@sjtu.edu.cn)

摘 要 研究一类含有零动态和不确定性参数的多输入多输出非线性系统的镇定问题，通过构造一个组合 Lyapunov 函数，对非线性动态部分设计了一个控制器可半全局实用镇定整个闭环系统的平衡点. 仿真实例说明了所采用方法的有效性.

关键词 半全局镇定，半全局实用镇定，零动态.
中图分类号 TP 273

Semiglobally Practical Stabilization of a Class of Multivariable Nonlinear Systems with Uncertainty

CAI Xiu-Shan[1,2] HAN Zheng-Zhi[1] KOU Chun-Hai[2]
[1](*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
[2](*Fujian Sanming University, Fujian* 365001)
(E-mail: xiushan@sjtu.edu.cn)

Abstract The semiglobally practical stabilization of a class of multivariable nonlinear systems with zero dynamics is considered. By constructing a composite Lyapunov function, a controller is designed for the nonlinear dynamics, and it can semiglobally practically stabilize the equilibrium of the fully closed-loop system. A simulation example shows its effectiveness.

Key words Semiglobal stabilization, semiglobally practical stabilization, zero dynamics

1 引言

近几年，非线性系统的镇定性引起许多研究者的兴趣[1~9]. Khali[1,2] 对于模型参数不确定的非线性系统，给出一个基于观测器的控制器用于镇定. Teel 和 Praly[3] 对于一致半全局镇定性进行了研究，他们认为考虑局部收敛性与解的有界性分开来是非常有益的. 半全局实用镇定是非线性控制中的一个重要概念. 有许多非线性系统在 Lyapunov 意义下不

1) 国家自然科学基金 (69874025) 和福建省教育厅科技项目 (JA03163) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P.R. China (69874025) and Technological Project of Education Bureau of Fujian Province (JA03163)
收稿日期 2003-12-08 收修改稿日期 2004-04-15
Received December 8, 2003; in revised form April 15, 2004

能镇定，但可以将其镇定到离原点充分的近，满足实际应用的要求. 这就是研究实用镇定的意义所在. 半全局实用镇定可以使闭环系统有足够大的吸引域，又使解的最终误差足够小，这对实际系统的控制具有重要意义.

本文研究一类带有不确定性参数，且含有零动态的多变量非线性系统的半全局实用镇定问题. 通过构造一个组合 Lyapunov 函数，对不含有零动态那部分设计了一个控制器，可半全局实用镇定整个闭环系统的平衡点.

2 系统的描述和预备知识

考虑含有不确定参数的多输入多输出非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{z}} = Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) \tag{1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B[F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) + G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\boldsymbol{u}] \tag{1b}$$

$$y = C\boldsymbol{x} \tag{1c}$$

$$A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_l),\ A_i=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{r_i\times r_i},\ B=\mathrm{diag}(B_1,\cdots,B_l),$$

$$\boldsymbol{b}_i=(0\quad\cdots\quad 0\quad 1)_{r_i\times 1},\ C=\mathrm{diag}(C_1,\cdots,C_l),\ \boldsymbol{c}_i=(1\quad 0\quad\cdots\quad 0)_{1\times r_i},$$

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1\quad \boldsymbol{x}^2\quad\cdots\quad \boldsymbol{x}^l)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}^i=(x_1^i\quad x_2^i\quad\cdots\quad x_{r_i}^i)^{\mathrm{T}},\ i=1,2,\cdots l,$$

$$F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=(f_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}))\ f_2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\ \cdots\ f_l(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}))^{\mathrm{T}},\ G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=(g_{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})),$$

上式中 $\boldsymbol{x}\in R^r$, $\boldsymbol{z}\in R^{n-r}$ 都为状态；$u_j\in R$ 是控制输入；$y_i\in R$ 是可测输出；$D\subset R^q$ 为紧集，$\boldsymbol{d}\in D$ 为未知的参数向量；$f_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$, $g_{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ 都为 $R^n\times D\to R$ 上的 C^1 函数；矩阵 $G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=(g_{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}))_{l\times m}$ 是行满秩.

称 $\dot{\boldsymbol{z}}=Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{0},\boldsymbol{d})$ 所对应的动态为系统 (1) 的零动态.

假设 1. 对系统 $\dot{\boldsymbol{z}}=Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{0},\boldsymbol{d})$ 存在一个包含原点的开集 $\Lambda\subset R^{n-r}$, 及非负实数 $\vartheta<1,h>1$, 且存在一个 C^1 函数 $U:\Lambda\to R_{\geqslant 0}$, 使得 $\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})\leqslant h+1\}$ 为 Λ 中的紧集，且沿着 $\dot{\boldsymbol{z}}=Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{0},\boldsymbol{d})$ 的解有 $\dfrac{\partial U(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}\dot{\boldsymbol{z}}\leqslant -\phi_1(\boldsymbol{z})$, 其中 $\phi_1(\boldsymbol{z})$ 在 Λ 上连续，在集合 $\{\boldsymbol{z}:\vartheta<U(\boldsymbol{z})\leqslant h+1\}$ 上正定.

假定 $F_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$, $G_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 是 C^1 光滑，分别为 $F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ 和 $G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ 的标称模型，且 $F_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 对 $\forall\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x}\in R^n$, $G_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 是行满秩的. 由于 (A,B) 是完全可控，可首先选择一个矩阵 K, 使得矩阵 $A+BK$ 是 Hurwitz 矩阵，对正常数 k_2, 令 $P=P^{\mathrm{T}}>0$ 为 Lyapunov 方程

$$P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P=-k_2I \tag{2}$$

的解，且令 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$, 任给紧集 $\Gamma\subset R^r$, $\exists c\geqslant 1$ 使得 $\Gamma\subset\Omega_c=\{\boldsymbol{x}\in R^r:V(\boldsymbol{x})\leqslant c+1\}$. 并令 $S_1=\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})\leqslant h+1\}\times\{\boldsymbol{x}:V(\boldsymbol{x})\leqslant c+1\}$.

假设 2. 对 $\forall\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\in S_1\times D$ 存在常数 $k_1>0$ 与 $l_1>0$, 使得下列两式成立：

$$G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})+(G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\geqslant 2k_1I>0 \tag{3a}$$

$$\| F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) - G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})F_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}) - K\boldsymbol{x} \| \leqslant l_1 \| \boldsymbol{x} \| \tag{3b}$$

引理[3]. E 为 $R^m \times R^n$ 的紧集, E_z 和 E_x 分别为 E 的投影, $\chi(\boldsymbol{z})$ 为 E_z 上的连续函数且在集合 $\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\cap E$ 上正定. $\psi(\boldsymbol{x})$ 为 E_x 上连续函数且在集合 $E_x\backslash\{0\}$ 上正定. $\xi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ 为 $E\times D$ 上连续实函数，且满足 $\forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\in(\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\cap E)\times D$, $\xi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=0$, 其中 D 为 R^q 中的紧集. κ 为 k_∞ 函数，则必存在一个正实数 K_*, 对 $\forall K\geqslant K_*$

$$-\chi(\boldsymbol{z}) - \kappa(K)\psi(\boldsymbol{x}) + \xi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) < 0,\ \forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\in E\times D \tag{4}$$

3　主要结果

为了给出主要定理，首先令 $S_2=\{\boldsymbol{x}:V(\boldsymbol{x})<c+1\}\times\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})<h+1\}$, 定义函数

$$W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) = \frac{hU(\boldsymbol{z})}{h+1-U(\boldsymbol{z})} + \frac{cV(\boldsymbol{x})}{c+1-V(\boldsymbol{x})} \tag{5}$$

$W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):S_2\to R_{\geqslant 0}$ 在 S_2 上是真.

定理. 假定系统 (1) 满足假设 1 和 2, 考虑状态反馈控制

$$\boldsymbol{u} = -G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})F_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}) - \frac{l_1^2}{k_1}G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=2B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$, 对任意 $\delta>0$, 必存在正实数 K_*, 使得当 $k_2>K_*+0.25$, $W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 沿着式 (1) 和 (6) 组成的闭环系统轨线的导数 $\dot{W}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant-\phi_2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$, $\phi_2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 在 S_2 上连续，在集合 $S=\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):\vartheta+\delta\leqslant W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant c^2+h^2+1\}$ 上正定. 由式 (1) 和 (6) 所构成闭环系统，起始点 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\in S\times D$ 的 $\boldsymbol{x}$ 轨线是半全局稳定，$\boldsymbol{z}$ 的轨线最终进入集合 $\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})\leqslant 4\vartheta\}$ 中，若 $\vartheta=0$, 则 $\boldsymbol{z}$ 的轨线是半全局实用稳定.

证明. 假定 $W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant c^2+h^2+1$, 那么

$$V(\boldsymbol{x})\leqslant(c+1)\frac{c^2+h^2+1}{c^2+h^2+1+c},\ U(\boldsymbol{z})\leqslant(h+1)\frac{c^2+h^2+1}{c^2+h^2+1+h} \tag{7}$$

因此

$$\frac{c}{c+1}\leqslant\frac{c(c+1)}{(c+1-V)^2}\leqslant\frac{(c^2+h^2+1+c)^2}{c(c+1)},\ \frac{h(h+1)}{(h+1-U)^2}\leqslant\frac{(c^2+h^2+1+h)^2}{h(h+1)} \tag{8}$$

任取充分小的 $\delta>0$, 且定义一个集合 $S=\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):\vartheta+\delta\leqslant W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant c^2+h^2+1\}$. 由式 (7) 及假设 1 知 S 为紧集，且 S 的投影 $S_x\subset\{\boldsymbol{x}:V(\boldsymbol{x})<c+1\}$, $S_z\subset\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})<h+1\}$. $W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 沿着闭环系统 (1) 和 (6) 轨线的导数

$$\dot{W}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) = \frac{c(c+1)}{(c+1-V(\boldsymbol{x}))^2}\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{h(h+1)}{(h+1-U(\boldsymbol{z}))^2}\frac{\partial U(\boldsymbol{z})}{\partial\boldsymbol{z}}\dot{\boldsymbol{z}} \tag{9}$$

因为 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$, 由式 (2) 和 (6) 则有

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}\leqslant -k_2\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{\omega}\|\|F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d}) - K\boldsymbol{x} - (G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(0,\boldsymbol{x}))F_0(0,\boldsymbol{x})\| -$$

$$\frac{l_1^2}{2k_1}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}))\omega) \tag{10}$$

由式 (3) 可得

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} \leqslant -k_2\parallel \boldsymbol{x}\parallel^2 + l_1\parallel \boldsymbol{\omega}\parallel\parallel \boldsymbol{x}\parallel - l_1^2\parallel \boldsymbol{\omega}\parallel^2 \leqslant -(k_2-0.25)\parallel \boldsymbol{x}\parallel^2 \tag{11}$$

令 $k_3=k_2-0.25$, 由假设 1 及式 (8), (11) 则式 (9), 为

$$\dot{W}\leqslant -k_3\frac{c}{c+1}\parallel \boldsymbol{x}\parallel^2+\frac{(c^2+h^2+1+h)^2}{h(h+1)}\left|\frac{\partial U(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}(Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})-Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{0},\boldsymbol{d}))\right|-$$
$$\frac{h(h+1)}{(h+1-U(\boldsymbol{z}))^2}\phi_1(\boldsymbol{z}) \tag{12}$$

定义

$$\chi(\boldsymbol{z})=\frac{h(h+1)}{2(h+1-U(\boldsymbol{z}))^2}\phi_1(\boldsymbol{z}),\ \psi(\boldsymbol{x})=\frac{c}{2(c+1)}\parallel \boldsymbol{x}\parallel^2,\ K=k_3 \tag{13}$$

$$\xi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=\frac{(c^2+h^2+1+h)^2}{h(h+1)}\left|\frac{\partial U(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}(Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})-Q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{0},\boldsymbol{d}))\right| \tag{14}$$

由假设 1 知, $\chi(\boldsymbol{z})$ 为 S_z 上的连续函数. $\psi(\boldsymbol{x})$ 为 S_x 上连续函数且在集合 $S_x\backslash\{0\}$ 上正定. 对 $\forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\in(\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}=0\}\cap S)\times D, \xi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=0$, 注意到 $\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\vartheta+\delta\leqslant W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\}\Rightarrow \vartheta+\delta\leqslant\frac{hU(\boldsymbol{z})}{h+1-U(\boldsymbol{z})}$; 进一步, 对 $0\leqslant\vartheta<1, \vartheta+\delta\leqslant\frac{hU(\boldsymbol{z})}{h+1-U(\boldsymbol{z})}\Rightarrow\vartheta<U(\boldsymbol{z}),\forall\delta>0$. 因此由假设 1 和 $\chi(\boldsymbol{z})$ 在集合 $\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}\cap S$ 的投影上正定. 引理的条件全部满足, 所以必存在 $K_*>0$, 对 $\forall k_3\geqslant K_*$, 即 $k_2>K_*+0.25$, 有

$$\xi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})<\chi(\boldsymbol{z})+k_3\psi(\boldsymbol{x}),\ \forall(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\in S\times D \tag{15}$$

由式 (12),(13),(14) 和 (15) 可得

$$\dot{W}\leqslant -\frac{ck_3}{2(c+1)}\parallel \boldsymbol{x}\parallel^2-\frac{h(h+1)}{2(h+1-U(\boldsymbol{z}))^2}\phi_1(\boldsymbol{z}) \tag{16}$$

令 $\phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})=\frac{ck_3}{2(c+1)}\parallel \boldsymbol{x}\parallel^2+\frac{h(h+1)}{2(h+1-U(\boldsymbol{z}))^2}\phi_1(\boldsymbol{z})$, 则 $\dot{W}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant-\phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}).\phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 在 S_2 上连续, 并由式 (14) 和 (15) 可知 $\phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 在集合 S 上正定.

取 $\delta=\vartheta$, 当 $W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant 2\vartheta$ 时, 则 $U(\boldsymbol{z})\leqslant\frac{2\vartheta(h+1)}{h+2\vartheta}\leqslant 4\vartheta$, 同理 $V(\boldsymbol{x})\leqslant 4\vartheta$.

因此式 (1) 和 (6) 组成的闭环系统, 开始于 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})\in S\times D$ 的 $\boldsymbol{z}$ 的轨线, 最终进入不变集 $\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})\leqslant 4\vartheta\}$. 当 $\vartheta=0$, 对任意 $\delta>0,(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 的轨线进入集合 $\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}):W(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\leqslant\delta\}$, 由此 $\boldsymbol{z}$ 的轨线进入集合 $\{\boldsymbol{z}:U(\boldsymbol{z})\leqslant 2\delta\}$, 因 δ 的任一性, $\boldsymbol{z}$ 的轨线是半全局实用稳定.

令 $c>\max\{4\vartheta-1,1\}$, 则 $\{\boldsymbol{x}:V(\boldsymbol{x})\leqslant 4\vartheta\}\subset\Omega_c$, 取 $k_2>K_*+0.25$. 由式 (11) 可得式 (1) 和 (6) 组成的闭环系统中 $\boldsymbol{x}$ 的轨线是半全局稳定. 从而系统 (1) 的平衡点可由控制律 (6) 半全局实用镇定. 证毕.

推论 1. 若系统 (1) 不含状态 $\boldsymbol{z}$, 那么控制律 $\boldsymbol{u}=-G_0(\boldsymbol{x})F_0(\boldsymbol{x})-\frac{2l_1^2}{k_1}G_0(\boldsymbol{x})B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 半全局镇定系统 (1).

4 仿真举例

考虑多变量非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_2,\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = a\boldsymbol{z}_2 \sin x_1 + b\boldsymbol{u}_1,\ \dot{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_4,\ \dot{\boldsymbol{x}}_4 = 2(1+c)\boldsymbol{x}_4^3\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{u}_2 \tag{17}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1 = -b\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{x}_1,\ \dot{\boldsymbol{z}}_2 = -\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2 + a\boldsymbol{x}_4 \tag{18}$$

上式中 a,b,c 是未知参数, 属于 $D=\{d=(a,b,c): |a-1|\leqslant 0.5,\ |b-1|\leqslant 0.25,\ |c|\leqslant 0.4\}$, $\boldsymbol{x}^1=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$, $\boldsymbol{x}^2=(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)$, $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2)\in\{(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2): \|\boldsymbol{x}^1\|\leqslant 1,\ \|\boldsymbol{x}^2\|\leqslant 0.85\}$, $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)\in\{(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2): \|\boldsymbol{z}\|\leqslant 0.5\}$. 由于 $F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=\begin{pmatrix} a\boldsymbol{z}_2\sin(\boldsymbol{x}_1) \\ 2(1+c)\boldsymbol{x}_4^3\boldsymbol{z}_1\end{pmatrix}$, $G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=\begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 选取 $F_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\sin(\boldsymbol{x}_1)\\ 2\boldsymbol{x}_4^3\end{pmatrix}$, $G_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 那么 $G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})+(G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2b & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}>2\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 因此 $k_1=\frac{1}{2}$. 取 $k=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, 则 $\|F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})-G(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})G_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})F_0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})-K\boldsymbol{x}\|\leqslant\sqrt{2}\,\|\boldsymbol{x}\|$. 计算满足 Lyapunov 方程 $P(\boldsymbol{z}+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P=-k_2I$ 的解, 可得

$$P=\begin{pmatrix}1.5k_2 & 0.5k_2 & 0 & 0\\ 0.5k_2 & k_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.5k_2 & 0.5k_2\\ 0 & 0 & 0.5k_2 & k_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\omega}=2B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}k_2\boldsymbol{x}_1+2k_2\boldsymbol{x}_2\\ k_2\boldsymbol{x}_3+2k_2\boldsymbol{x}_4\end{pmatrix}.$$

考虑系统 $\dot{\boldsymbol{z}}_1=-b\boldsymbol{z}_1, \dot{\boldsymbol{z}}_2=-\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2$, 取 $U(\boldsymbol{z})=0.5e^{\frac{2\boldsymbol{z}_1}{b}}\boldsymbol{z}_2^2+0.5\boldsymbol{z}_1^2$, 那么 $\frac{\partial U(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}}\dot{\boldsymbol{z}}\leqslant -b\boldsymbol{z}_1^2, (b>0)$. 因此, 假设 1 对于 $\vartheta=0$ 成立. 从而定理的条件都满足, 选取 $k_2=1$, 那么控制律为

$$\boldsymbol{u}_1=-\sin\boldsymbol{x}_1-4(\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{x}_2),\ \boldsymbol{u}_2=-2\boldsymbol{x}_4^3-4(\boldsymbol{x}_3+2\boldsymbol{x}_4) \tag{19}$$

图 1~3 分别显示初值为 $\boldsymbol{x}^1=(0,4\quad 0.3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^2=(0.3\quad 0.4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}=(0.2\quad 0.3)^{\mathrm{T}}$, 且取 $a=1.4$, $b=0.8$, $c=-0.4$ 时式 (18) 和 (19) 所构成的闭环系统的状态轨线 $\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{z}(t)$ 及控制律 $\boldsymbol{u}(t)$.

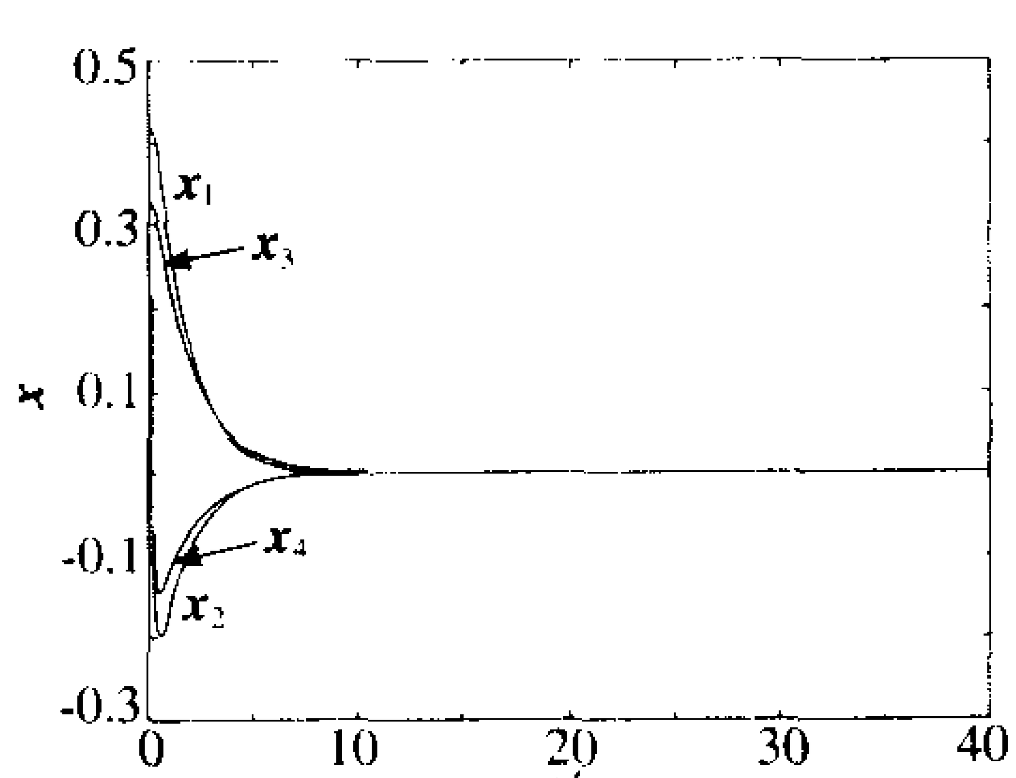

图 1 闭环系统的状态轨线 $\boldsymbol{x}(t)$

Fig. 1 The state $\boldsymbol{x}(t)$ of the closed system

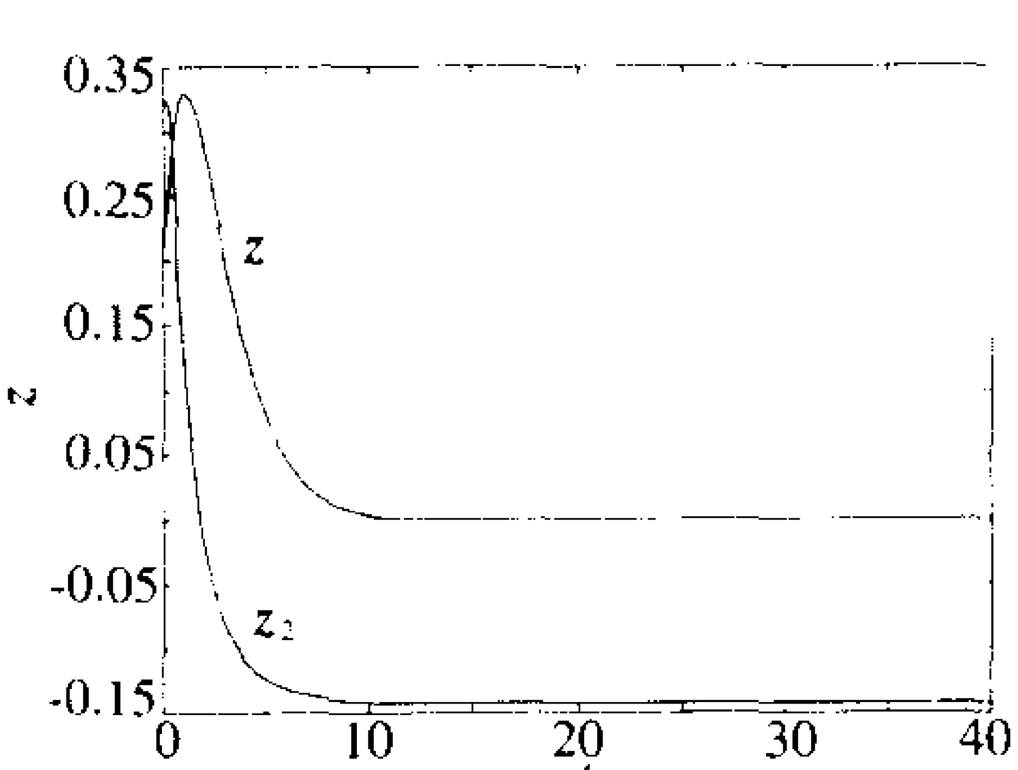

图 2 闭环系统的状态轨线 $\boldsymbol{z}(t)$

Fig. 2 The state $\boldsymbol{z}(t)$ of the closed system

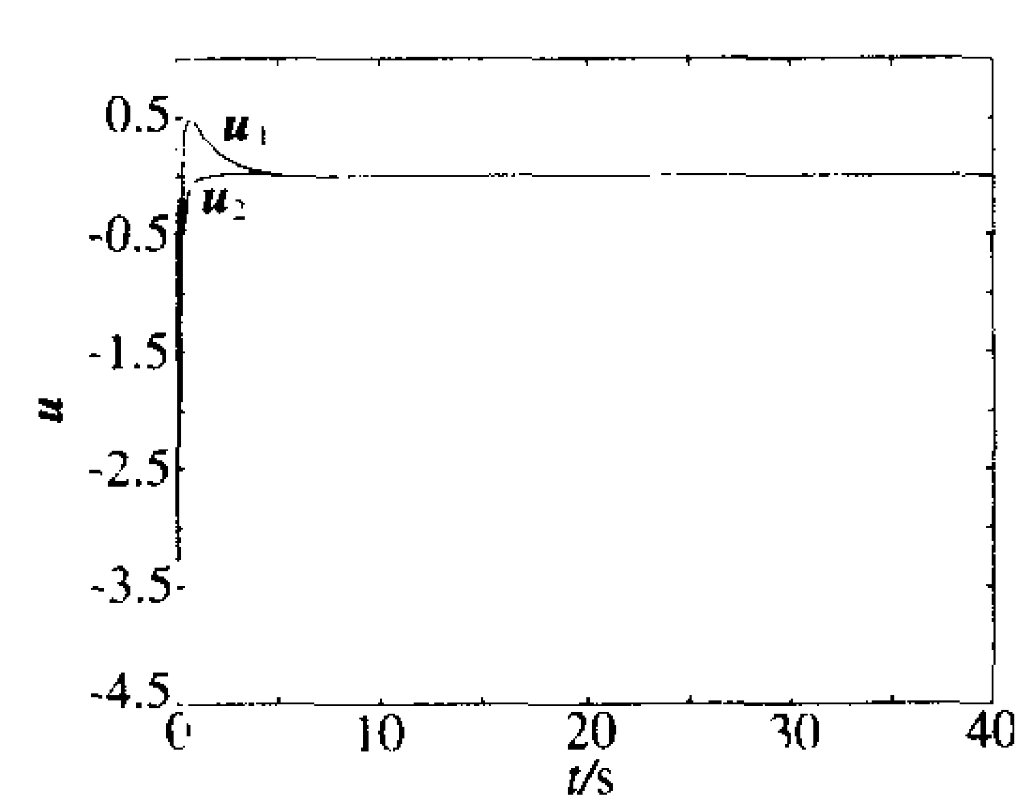

图 3 控制律 $\boldsymbol{u}(t)$

Fig. 3 The control $\boldsymbol{u}(t)$

5 小结

本文研究一类含有零动态且模型参数不确定的多输入多输出非线性系统的镇定问题，通过构造一个组合 Lyapunov 函数，对不含有零动态那部分设计了一个控制律，可半全局实用镇定整个闭环系统的平衡点. 仿真实例表明本文算法的有效性.

References

1 Esfandiari Farzad, Khalil H K. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of control*, 1992, **56**: 1007~1037

2 Khalil H K, Esfandiari Farzad. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1993, **38**(9): 1412~1415

3 Teel A R, Praly L. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal on Control and optimization*, 1995, **33**: 1443~1485

4 Celani F, Byrnes C I, Isidori A. Compact attactors of nonlinear minimum-phase systems that are semiglobally practically stabilized. In: Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, Florida, USA: IEEE, 2001. 3796~3801

5 Byrnes C I, Isidori A. Output regulation of practically stabilizable systems: some elementary examples. In: Proceeding of the American Control Conference. Anchorage, AK, United States: IEEE, 2002. 92~95

6 Isidori A. A remark on the problem of semiglobal nonlinear output regulation. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1997, **42**(12): 1734~1739

7 Isidori A. Nonlinear Control Systems (Third Edition). New York: Springer-Verlag, 1995

8 Tang H J, Han Z Z, Shang Y H, Okubo S. A design method of model follow control for nonlinear descriptor systems and proof of boundedness of internal states. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(1): 1~8 (in Chinese)

9 Chen P N, Qin H S, Hong Y G, Han Z Z. Stabilization of discrete time minimum phase nonlinear systems via dynamic output feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(5): 681~689 (in Chinese)

蔡秀珊 1999 年在华东师范大学数学系获得理学硕士学位，现为上海交通大学自动化系控制科学与工程专业的博士生. 同时为福建三明学院数学系副教授. 主要的研究方向为非线性控制与应用等.

(**CAI Xiu-Shan** She received her M.S. degree from department of mathematics of East China Normal University in 1999. She is currently Ph.D. Canddidate in automation department of Shanghai JiaoTong University, and she is an associate professor of SanMing University. Her research interests include nonlinear control and applications.)

韩正之 教授，博士生导师，主要研究方向为非线性控制，混沌动力学系统与控制，计算机网络控制等.

(**HAN Zheng-Zhi** Professor and Ph.D. director at automation department of Shanghai JiaoTong University. His research currently interests include nonlinear control theory, chaotic dynamics systems, and control and computer network control.)

寇春海 教授，主要研究方向为非线性控制，混沌动力学系统与控制等.

(**KOU Chun-Hai** Professor. His research interests include nonlinear control theory and chaotic dynamics systems and control.)