

一种新的细分加权小波¹⁾

侯霞 胡寿松

(南京航空航天大学自动化学院 南京 210016)
(E-mail: djhx@263.net)

摘要 利用细分方案和递推平均插值方法构造了一类新的具有加权性质的小波, 并证明了它的常用性质: 紧支撑性, 光滑性, 消失矩, 正交性. 与采用常见的 Fourier 变换得到的正交小波相比, 加权小波系数的衰减性比正交小波的系数衰减性快, 而且计算过程简单, 复杂度低, 易于应用. 仿真结果显示, 当加权函数跳跃性很大时, 加权小波具有非常好的光滑性, 同时加权小波能准确地逼近函数, 并且逼近收敛率要快于一般小波.

关键词 加权小波, 尺度函数, 对偶小波, 紧支撑性, 细分法
中图分类号 TP13; O231

A Novel Weighted Wavelet with Subdivision

HOU Xia HU Shou-Song

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)
(E-mail: djhx@263.net)

Abstract A novel weighted wavelet is constructed by using the subdivision scheme and recursive average interpolated method. Its characteristics is respectively proved to be compact supported, smooth, vanishing moment, and orthogonal. Compared with the common wavelet by the Fourier transform, the decay of weighted wavelet coefficient is faster than that of the common wavelet. Furthermore, the method is simple and easily applied. Its computational complexity is greatly reduced. The simulation demonstrate that the weighted wavelet is sufficiently smooth even though the weighted function has a large jump, and that it can approximate functions exactly and the approximated convergence is faster.

Key words Weighted wavelet, scaling function, dual wavelet, compactly supported, subdivision

1 引言

小波和多分辨分析的基本思想是用函数的二进尺度伸缩和平移构成 L_2 空间的基. 一般小波是利用 Fourier 变换得到的, 这是因为在频率域中, 平移和伸缩都成了代数算子, 故称这些小波为代数小波. 紧支撑代数小波的典型范例就是 Daubechies 正交小波^[1] 和样条小波^[2], 代数小波在 L_2 空间内积作用下是双正交的. 而在故障检测、图像处理和据压缩中,

1) 国家自然科学基金 (60234010) 和高校博士点基金 (20040287005) 资助

Supported by National Nature Science Foundation of P.R. China (60234010) and the University Doctoral Foundation of National Education Commission of P.R. China (20040287005)

收稿日期 2003-09-01 收修改稿日期 2004-01-12

Received September 1, 2003; in revised form January 12, 2004

最重要的是要求系数衰减快, 图像保持完好, 传输数据数目小且计算复杂度低. 目前, 出现了一些其它形式的加权小波^[3], 但是它们都没有紧支撑, 在实际中难以应用. 本文利用基于细分方案的平均插值法, 而不采用 Fourier 变换来构造加权小波, 通过细分方法构造紧支撑且具有较大消失矩的加权小波, 其算法几乎就是线性的, 而函数的光滑性可由加权小波系数的衰减性来决定. 本文构造的加权小波所具有的衰减快, 紧支撑, 光滑性强等特性在实际中将会得到很好的应用.

2 加权小波

考虑 L_2 空间中可积的正函数 $\omega(x)$, 定义 L_2 空间中的加权内积为 $\langle f, g \rangle_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) f(x) \overline{g(x)} dx$, 由此导出的加权范数为 $\|f\|_\omega = \sqrt{\langle f, f \rangle_\omega}$. 定义 L_2 上闭子空间 V_j 的多分辨率分析如下: 1) $V_j \subset V_{j+1}$; 2) $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j$ 在 L_2 空间中稠密且 $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$; 3) 尺度函数 $\varphi_{j,k}$ 存在并且使得 $\{\varphi_{j,k}\}_k$ 构成空间 V_j 的一个 Riesz 基, 这表明对每个尺度函数 $\varphi_{j,k}$, 其系数 $h_{j,k,l}$ 存在且有

$$\varphi_{j,k} = \sum_l h_{j,k,l} \varphi_{j+1,2k+l} \tag{1}$$

每个尺度函数满足不同的加细关系, 其对偶尺度函数 $\tilde{\varphi}_{j,k}$ 产生一个对偶多分辨率分析, 形成了对偶空间 \tilde{V}_j . 它们是双正交的

$$\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle_\omega = \delta_{k-k'} \tag{2}$$

由式 (1) 两边做加权内积可得加细关系的系数为 $h_{j,k,l} = \langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j+1,2k+l} \rangle_\omega$. 定义子空间 W_j 是子空间 V_j 在空间 V_{j+1} 中的补空间, $\{\psi_{j,k}\}_k$ 是子空间 W_j 中的一个 Riesz 基, 则有 $\psi_{j,k} = \sum_l g_{j,k,l} \varphi_{j+1,2k+l}$, 而加权小波 $\psi_{j,k}$ 及其对偶小波 $\tilde{\psi}_{j,k}$ 是双正交的, 加权小波 $\psi_{j,k}$ 的 \tilde{N} 阶加权消失矩定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) x^p \psi_{j,k} dx = 0 (0 \leq p < \tilde{N}), \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) x^p \psi_{j,k} dx \neq 0 (p = \tilde{N})$$

定理 1. 空间 V_j 中任一函数 $v_j(x)$ 的系数 $\lambda_{j,k}$ 和它的小波系数 $\gamma_{j,k}$ 存在快速加权小波变换递归公式

$$\lambda_{j-1,k} = \sum_l \tilde{h}_{j-1,k,2k+l} \lambda_{j,k}, \gamma_{j-1,k} = \sum_l \tilde{g}_{j-1,k,2k+l} \lambda_{j,k}, \lambda_{j,k} = \sum_l h_{j-1,k,2k+l} \lambda_{j-1,k} + \sum_l g_{j-1,k,2k+l} \gamma_{j-1,k}$$

设存在一个闭子空间 $I \subset R$, 使得尺度函数 $\varphi_{j,k}$ 的支撑集 $\text{supp} \varphi_{j,k} \subset a^{-j}(I+k) (a > 0$ 为偶数), 为了使构造的加权小波具有好的紧支撑, 要求尺度函数的支撑集满足 $\text{supp} \varphi_{j,k} = a^{-j} \text{supp}(\varphi_{0,0} + k)$. 固定尺度函数, 构造具有理想特性的尺度函数小波及其对偶小波, 令对偶尺度函数是一个区间上的特征函数, 即 $\tilde{\varphi}_{j,k} = \chi_I, I = [ka^{-j}, (k+1)a^{-j})$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_{j,k}(x) dx = a^{-j}, \sum_k \tilde{\varphi}_{j,k} = 1 \tag{3}$$

可以验证, 对偶尺度函数的加细关系为 $\tilde{\varphi}_{j,k} = \tilde{\varphi}_{j+1,ak} + \dots + \tilde{\varphi}_{j+1,ak+a-1} = \sum_{l=0}^{a-1} \tilde{\varphi}_{j+1,ak+l}$, 由式 (3) 和式 (2) 可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) \varphi_{j,k}(x) dx = 1$, 因而 $\sum_l h_{j,k,l} = 1$; 从式 (1) 及式 (2) 可知 $h_{j,k,al} + \dots + h_{j,k,al+a-1} = \delta_l$.

引理 1. 若对偶加权小波具有如下的消失矩 $\tilde{N}_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p \omega(x) \tilde{\psi}(x) dx = 0, 0 \leq p < N, \tilde{N}_N \neq 0$, 则任何阶次小于 N 的多项式都能表示为尺度函数 $\varphi(x)$ 的线性组合; 从而得到加权小波对光滑函数的逼近收敛性^[4]: 若 $f(x) \in C^N$, 则逼近收敛率为 $\|\sum_l \langle f, \varphi_{j,l} \rangle_{\omega} \varphi_{j,l} - f(x)\| = O(h^N) (h = 2^{-j})$.

注 1. 一般小波对光滑函数的逼近速度是比较慢的, 逼近收敛率是 $O(h), h = 2^{-j}$ ^[5], 而且与消失矩 N 的大小无关. 从这里能看出具有一定消失矩的加权小波对光滑函数的逼近收敛要比通常小波的收敛速度快得多, 而且具有不同消失矩的加权小波的逼近收敛率显著不同.

3 加细方案

对多项式的阶次 N , 介绍细分方案^[6]. 从对称的观点看, N 只能是个奇数, 令 $N = 2D + 1$, 假设合成子空间 V_i 的一个函数 $f(x) = \sum_k \lambda_{i,k} \varphi_{i,k}(x)$, 细分方案的思想是在更加细尺度空间 $V_j (j > i)$ 上表示函数 $f(x) = \sum_j \lambda_{j,k} \varphi_{j,k}(x)$; 然后让 j 趋于无穷, 从而找到一个函数 f 使得 $\lambda_{i,k} = \langle f, \tilde{\varphi}_{i,k} \rangle_{\omega}$. 其步骤是, 在一个水平上给定系数 $\lambda_{j,k}$, 在更加细的水平上计算系数 $\lambda_{j+1,k}$, 对每组 N 个系数 $\{\lambda_{j,k-D}, \dots, \lambda_{j,k+D}\}$, 这包括两步: (a) 构造一个 N 次多项式 P 使得 $\langle P, \tilde{\varphi}_{j,k+l} \rangle_{\omega} = \lambda_{j,k+l} (-D \leq l \leq D)$; (b) 计算更加细水平上的 a 个系数 $\lambda_{j+1,ak} = \langle P, \tilde{\varphi}_{j+1,ak} \rangle_{\omega}, \dots, \lambda_{j+1,ak+a-1} = \langle P, \tilde{\varphi}_{j+1,ak+a-1} \rangle_{\omega}$. 同时定义一个局部矩为 $M_{j,k}^p = \langle x^p, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle_{\omega} (0 \leq p < N)$, 注意到 $M_{j,k}^p = M_{j+1,ak}^p + M_{j+1,ak+1}^p + \dots + M_{j+1,ak+a-1}^p$. 更详细的加细方案, 限于篇幅, 此处略去.

4 尺度函数和加权小波性质

下面讨论加权尺度函数的性质, 同时验证它们具有所期望的性质, 并给出加权小波的构造.

定理 2. 加权尺度函数满足如下性质: (a) 紧支撑性 $\text{supp} \varphi_{j,k} = a^{-j} [-N + 1 + k, N + k]$; (b) 归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) \varphi_{j,k}(x) dx = 1$; (c) 正交性 $\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle_{\omega} = \delta_{k-k'}$; (d) 消失矩 $\sum_k M_{j,k}^p \varphi_{j,k} = x^p (0 \leq p < N)$.

定理 3. 假设尺度函数和对偶尺度函数如定理 2 所述, 则加权小波和对偶加权小波为

$$\psi_{j,k} = \varphi_{j+1,ak} - \varphi_{j+1,ak+1} + \dots + (-1)^{a-1} \varphi_{j+1,ak+a-1} = \sum_{l=ak}^{ak+a-1} (-1)^l \varphi_{j+1,l}$$

$$\tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_l g_{j,k,l} \tilde{\varphi}_{j+1,2k+l}, g_{j,k,l} = (-1)^l h_{j,k+[l/a]-1-l}$$

那么如下性质成立: (a) 正交性 $\langle \tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle_{\omega} = 0$; (b) 正交性 $\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle_{\omega} = 0$; (c) 双正交性 $\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle_{\omega} = \delta_{j-j'} \delta_{k-k'}$; (d) 衰减性 $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) \psi_{j,k}(x) dx = 0$; (e) 消失矩 $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) x^p \tilde{\psi}_{j,k}(x) dx = 0 (0 \leq p < N)$; (f) 紧支撑性 $\text{supp} \psi_{j,k} = \text{supp} \tilde{\psi}_{j,k} = a^{-j} [-D + k, D + k + 1)$.

5 加权小波示例及应用仿真

选取权函数为 $\omega(x) = x(\chi_{(-\infty, \alpha]} + 10^3 \chi_{[\alpha, +\infty)})$, $\alpha = 1.73$. 由定理 2 和定理 3 的结论可以得到加权小波为图 1 的形式, 其中 $j = k = 0$, $a = 4$, $\psi_{0,0} = \varphi_{1,0} - \varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} - \varphi_{1,3}$. 可以看到, 即使加权函数有很大的跃变, 加权小波还是非常光滑的, 而且支撑性良好, 这样在实际中更具有广泛的应用. 如果需要更加理想的光滑性和更大消失矩的加权小波, 可以取高阶的 B 样条函数为尺度函数.

应用前面构造的加权小波与墨西哥帽小波 $2/\sqrt{3}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2}$ 对如下含噪声的可测信号函数进行逼近, $y = 1/2 \cos(2x + 100) - \sin(3x + 3) + \cos(2x + 80) \times \sin(3x + 30) - e^{-x}$, 结果如图 2 和图 3 所示. 可见加权小波具有和常见小波一样的逼近能力, 而且逼近效果也较墨西哥帽小波为好, 对噪声的抑止也很理想, 加权小波的逼近速度明显地快于墨西哥帽小波.

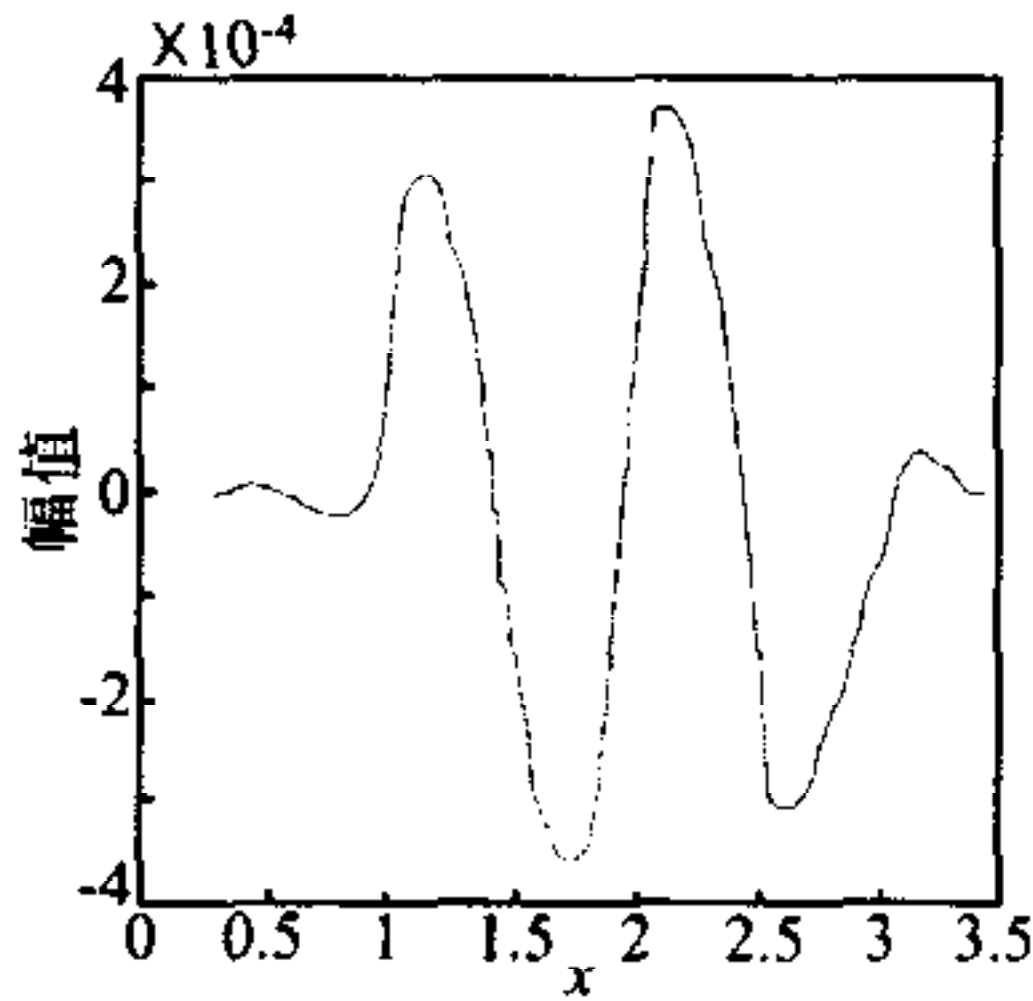


图 1 加权小波
Fig. 1 Weighted wavelet

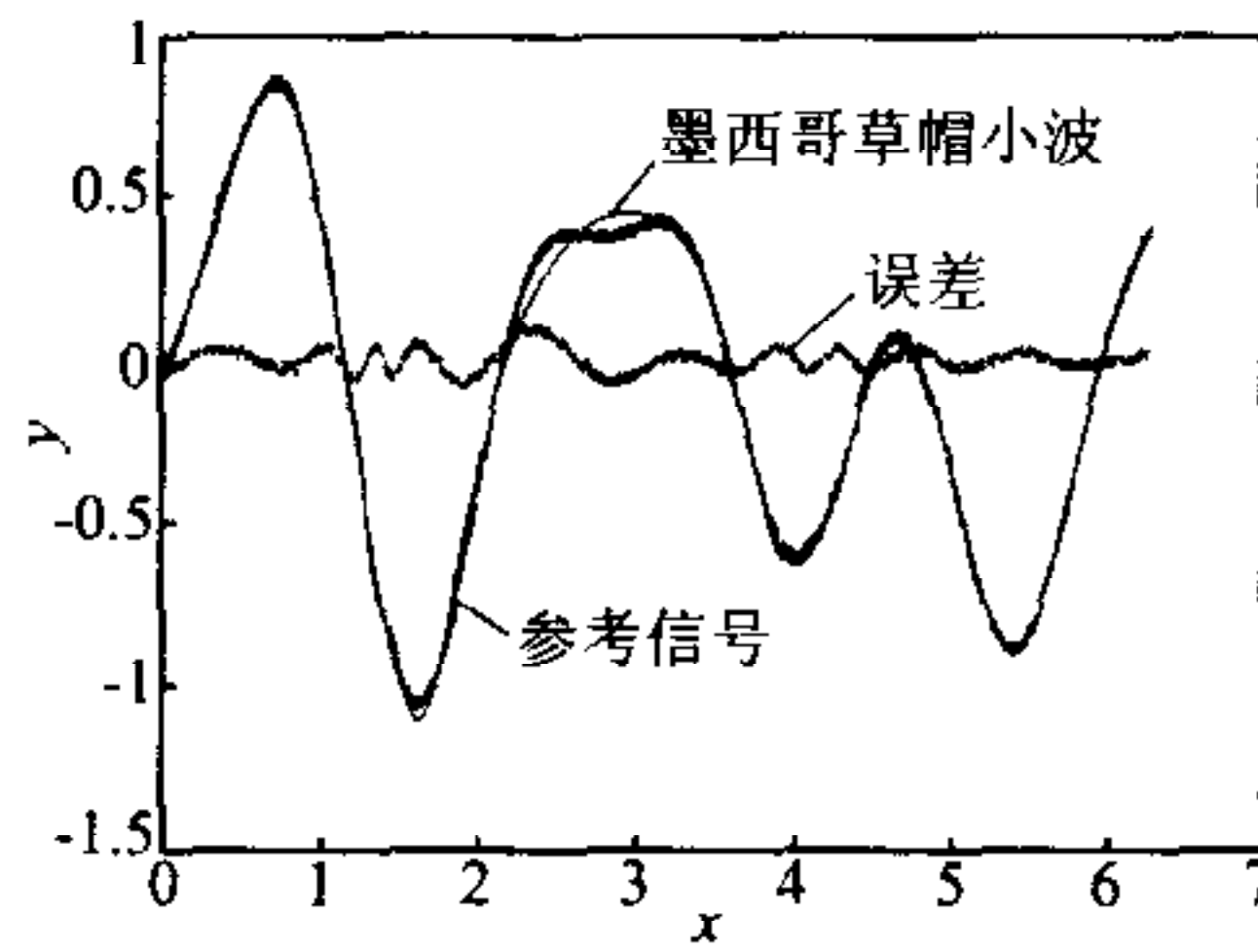


图 2 墨西哥帽小波函数逼近
Fig. 2 Function approximation of Mexican hat wavelet

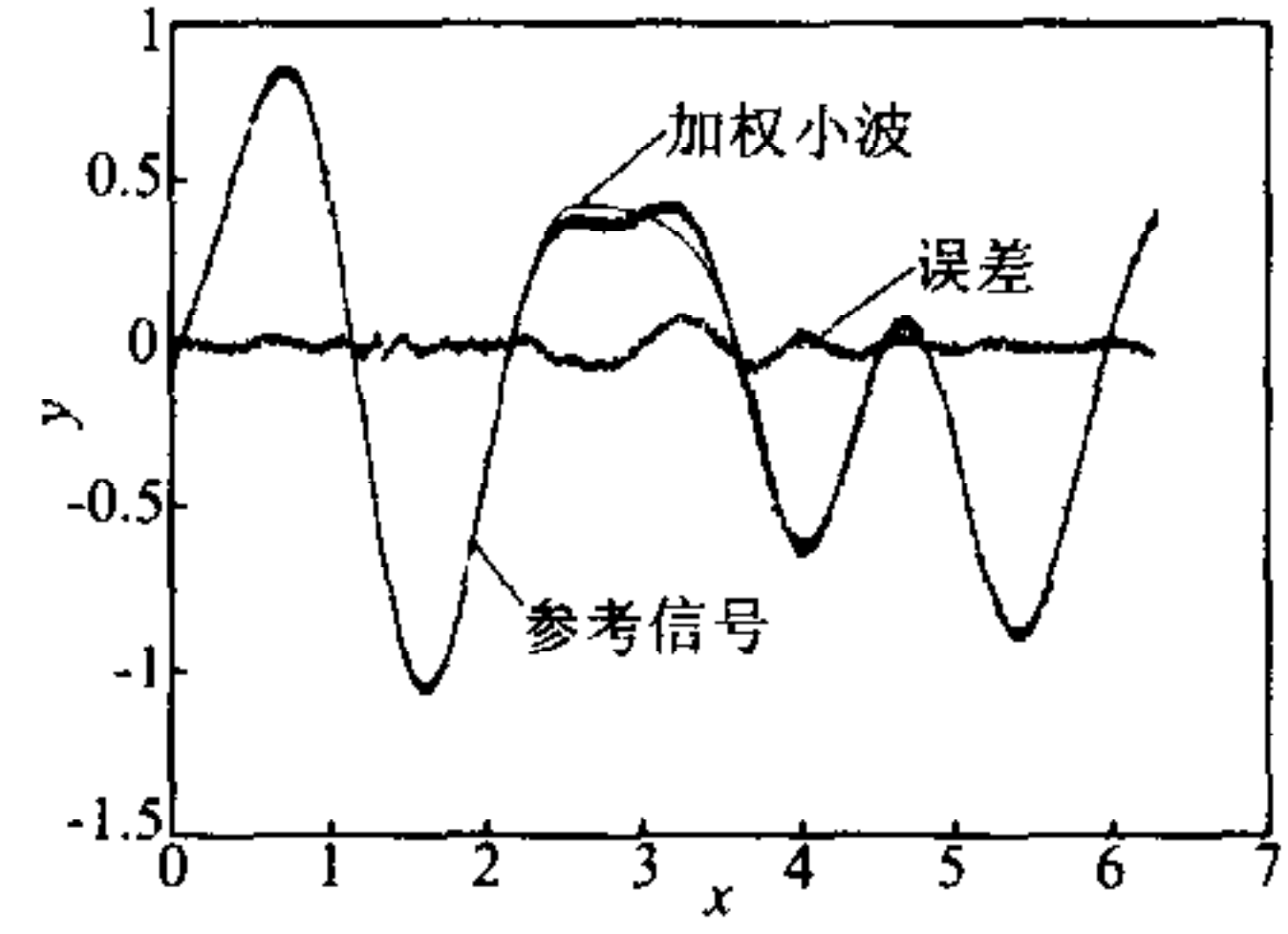


图 3 加权小波函数逼近
Fig. 3 Function approximation of weighted wavelet

References

- 1 Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure Applied Mathematics.*, 1988, 41(8): 909~996
- 2 Chui C K, Wang J Z. A general framework of compactly supported splines and wavelets. *Journal of Approximation Theory*, 1992, 71(3): 263~304
- 3 Meyer Y. *Wavelets and Operators*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 37: 96~123
- 4 Sweldens W, Piessens R. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1994, 31(4): 1240~1264
- 5 Mikhail Toupiikov, Guang-wen pan, Barry K Gilbert. Weighted wavelet expansion in the method of moments. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1999, 35(3): 1550~1553
- 6 Donoho D L. Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1993, 1(1): 100~115

侯霞 现于南京航空航天大学自动化学院攻读博士学位. 主要研究方向为小波分析、小波神经网络及故障检测.
(HOU Xia Ph. D. candidate at the college of Automation Engineer, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics. Her research interests include wavelet analysis, Wavelet neural network and fault detection.)

胡寿松 南京航空航天大学自动化学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为故障诊断, 自修复控制和复杂系统控制.
(HU Shou-Song Professor at the college of Automation Engineer, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics. His research interests include fault diagnosis, Self-repairing control and complex system control.)