第 30 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 30, No. 2
2004 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 2004

# 一类连续模糊动态系统稳定的充分条件[1)]

丁海山 毛剑琴
(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)
(E-mail: chinodhs@sohu.com; dumao@public.bta.net.cn)

**摘 要** 研究了一类连续模糊动态系统的稳定性,证明了该类系统稳定的充分条件.并以倒立摆的稳定性分析验证了定理的有效性.

**关键词** 模糊控制,模糊动态系统,李雅普诺夫稳定性
**中图分类号** TP3

# Stablility Suficient Condition of a Class of Continuous Fuzzy Dynamic Systems

DING Hai-Shan MAO Jian-Qin
(*The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)
(E-mail: chinodhs@sohu.com; dumao@public.bta.net.cn)

**Abstract** The stability of a class of continuous fuzzy dynamic systems is analyzed, and the sufficient condition is proved. The efficiency of the theorem is shown by the stability analysis of an inverted pendulum.

**Key words** Fuzzy control, fuzzy dynamic systems, Lyapunov stability

## 1 引言

模糊控制作为一种智能控制的方法,被广泛地应用于许多实际问题.模糊控制方法既可以用于简单的对象,也可以用于复杂的过程.

Takagi 和 Sugeno 于 1985 年在文献[1]中提出了一种模糊控制器模型即 T-S 模型.基于 T-S 模型,Gao S G 等于 1995 在文献[2]中提出了离散的模糊动态系统模型,孙增圻在文献[3]中提出了基于模糊状态方程的模型,即连续的模糊动态系统模型.

本文讨论连续的模糊动态系统.在同文献[3]的模型中,设各子系统$(A_i, B_i)$是局部能控的.模糊动态系统的模型为

1) 国家自然科学基金(10276005)、高校博士点基金(2000000625)和国家"973"计划课题(2002cb312200)
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (10276005), Special Research Fund for the Doctoral Program of High Education (2000000625) and National Grand Fundamental Research "973" Program of P. R. China(2002cb312200)
收稿日期 2002-12-18 收修改稿日期 2003-04-28
Received December 18, 2002; in revised form April 28, 2003

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})(A_i-B_iL_k)\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})(C_i-D_iL_k)\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{1}$$

$$\mu_i(\boldsymbol{x}(t))=\frac{M^i(\boldsymbol{x}(t))}{\sum_{j=1}^{l}M^j(\boldsymbol{x}(t))},\quad i=1,2,\cdots,l\tag{2}$$

其中 $M^i(\boldsymbol{x}(t))$表示控制对象的第 $i$ 条模糊规则的隶属度函数. 同文献[4]，取模糊动态系统的控制为起主导作用的局部模糊子系统的控制. $L_k$是起主导作用的线性子系统的状态反馈增益矩阵，即有 $\mu_k(\boldsymbol{x})=\max\{\mu_i(\boldsymbol{x})\mid 1\leqslant i\leqslant l\}$.

本文将对这一类模糊动态系统的稳定性进行分析，并证明判断该类系统渐近稳定的充分条件.

## 2　稳定性分析

关于式(1)所示的连续模糊动态系统控制器设计，文献[4]中给出了判断系统渐近稳定的充分条件如下.

**定理 1**[4]. 各子系统$(A_i,B_i)$是局部能控的，故可设计局部反馈控制 $L_i$，使得 $H_i=A_i-B_iL_i$是稳定的，即存在正定矩阵 $P_i$和 $Q_i$，满足李雅普诺夫方程 $H_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iH_i=-Q_i$. 取 $P=\sum_{i=1}^{l}\beta_iP_i$，$\beta_i>0$ 或 $P=\sum_{i=1}^{l}P_i$，并令 $Q_{ki}=(A_i-B_iL_k)^{\mathrm{T}}P+P(A_i-B_iL_k)$，定义 $\lambda_{ki}=\lambda_{\max}(Q_{ki})$. 如果对于 $k=1,2,\cdots,l$ 均有$\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x})\lambda_{ki}<0$，则整个闭环系统是渐近稳定的.

该定理把判断系统渐近稳定归结为验证 $l$ 个不等式成立. 由于不等式中涉及到隶属度函数，当系统阶数较高时，只能用数值方法解决，计算量大. 对于确实渐近稳定的系统而言，没有彻底解决如下问题：是否存在某些奇异状态不满足不等式，而数值验证时，恰恰没有取到这些奇异状态.

李承家等在文献[5]中给出了模糊开环系统稳定的充分条件如下.

**定理 2**[5]. 对于开环系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(\boldsymbol{x})A_i\boldsymbol{x}(t)$，令 $H_i=A_i^{\mathrm{T}}+A_i$，$\lambda_{\max}(H_i)$表示 $H_i$的最大特征值. 若 $\lambda_{\max}(H_i)<0$ 对所有 $i=1,2,\cdots,r$ 成立，则系统全局渐进稳定.

该定理虽然简洁，但由于条件较定理 1 强，判断范围受到限制.

为解决以上两个定理的不足之处，本文证明的定理 3 与隶属度函数无关，而且条件较定理 2 弱. 故使用范围较宽. 在证明定理前，先作如下约定：

对如式(1)所示的系统，记 $H_{ji}=A_i-B_iL_j$，$\lambda_{ji}=\max\{\lambda(H_{ji}^{\mathrm{T}}P+PH_{ji})\}$为矩阵 $H_{ji}^{\mathrm{T}}P+PH_{ji}$的最大特征值，其中 $P$ 为任意取定的一个 $n$ 阶正定矩阵，$i,j=1,2,\cdots,l$；把这 $l^2$ 个特征值按第一个下标分成 $l$ 类，每一类又分成“正”和“非正”两个小类，即$\{\lambda_{k1},\lambda_{k2}\cdots,\lambda_{kl}\}=\{$正特征值$\}\cup\{$非正特征值$\}=\{\lambda_{ki_1},\cdots,\lambda_{ki_m}\}\cup\{\lambda_{kj_1},\cdots,\lambda_{kj_n}\}$ $(k=1,2,\cdots,l)$，这里 $m+n=l$，$1\leqslant i_s,j_t\leqslant l$ $(s=1,2,\cdots,m;t=1,2,\cdots,n)$.

**定理 3.** 若存在 $n$ 阶矩阵 $P>0$，使得 $H_{kk}^{\mathrm{T}}P+PH_{kk}<0$ 和 $\lambda_{kk}+\lambda_{ki_1}+\lambda_{ki_2}+\cdots+\lambda_{ki_m}<0$

对 $k=1,2,\cdots,l$ 成立，则式(1)所示的系统是渐近稳定的.

**证明.** 由条件：存在 $n$ 阶矩阵 $P>0$，使得 $H_{kk}^{\mathrm{T}}P+PH_{kk}<0$，对 $k=1,2,\cdots,l$ 成立. 可知它等价于 $\lambda_{kk}<0\ (k=1,2,\cdots,l)$. 为叙述方便，不妨设 $k=j_n$. 于是，有

$\{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\cdots,\lambda_{kl}\}=\{$正特征值$\}\cup\{$非正特征值$\}=\{\lambda_{ki_1},\cdots,\lambda_{ki_m}\}\cup\{\lambda_{kj_1},\cdots,\lambda_{kj_{n-1}},\lambda_{kk}\}$，

现取李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)$，则

$$\dot{W}(\boldsymbol{x}(t))=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(H_{ki}^{\mathrm{T}}P+PH_{ki})\boldsymbol{x}(t)\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\lambda_{ki}\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{l}\mu_i(\boldsymbol{x}(t))\lambda_{ki}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2=$$

$$[(\mu_{i_1}(\boldsymbol{x})\lambda_{ki_1}+\cdots+\mu_{i_m}(\boldsymbol{x})\lambda_{ki_m})+(\mu_{j_1}(\boldsymbol{x})\lambda_{kj_1}+\cdots+\mu_{j_{n-1}}(\boldsymbol{x})\lambda_{kj_{n-1}}+\mu_k(\boldsymbol{x})\lambda_{kk})]\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\leqslant$$

$$[(\mu_{i_1}(\boldsymbol{x})\lambda_{ki_1}+\cdots+\mu_{i_m}(\boldsymbol{x})\lambda_{ki_m})+\mu_k(\boldsymbol{x})\lambda_{kk}]\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\leqslant$$

$$\mu_k(\boldsymbol{x})(\lambda_{ki_1}+\lambda_{ki_2}\cdots+\lambda_{ki_m}+\lambda_{kk})\|\boldsymbol{x}(t)\|^2<0$$

故系统是渐近稳定的. 证毕.

本定理把判断系统的稳定性归结为计算矩阵的特征值，易于操作. 故部分解决了定理 1 和定理 2 的不足. 至于 $P$ 的选取，如定理 1，可以凭经验试凑.

## 3 在单倒立摆平衡控制问题中的应用

采用文献[6]中对单倒立摆建立的模糊系统模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)==\sum_{i=1}^{5}\mu_i(\boldsymbol{x})A_i\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{5}\mu_i(\boldsymbol{x})B_iu(t)$$

其中状态 $\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t)\quad x_2(t)]^{\mathrm{T}}$，各子系统参数为

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 17.2941 & 0\end{bmatrix},\qquad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 14.4706 & 0\end{bmatrix},\qquad A_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5.8512 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7.2437 & -0.5399\end{bmatrix},\quad A_5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7.2437 & 0.5399\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0\\ -0.1765\end{bmatrix},\qquad B_2=\begin{bmatrix}0\\ -0.1765\end{bmatrix},\qquad B_3=B_4=B_5=\begin{bmatrix}0\\ -0.0779\end{bmatrix}$$

本文取模糊集 $M^1,M^2,M^3,M^4,M^5$ 的隶属度函数为

$$M^1(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x_1^2}{0.3607}+\frac{x_2^2}{5.77}\right)}$$

$$M^2(\boldsymbol{x})=\max\left(\mathrm{e}^{-\left[\frac{x_1^2}{0.3607}+\frac{(x_2-4)^2}{5.77}\right]},\quad \mathrm{e}^{-\left[\frac{x_1^2}{0.3607}+\frac{(x_2+4)^2}{5.77}\right]}\right)$$

$$M^3(\boldsymbol{x})=\max\left(\mathrm{e}^{-\left[\frac{(x_1-1)^2}{0.3607}+\frac{x_2^2}{5.77}\right]},\quad \mathrm{e}^{-\left[\frac{(x_1+1)^2}{0.3607}+\frac{x_2^2}{5.77}\right]}\right)$$

$$M^4(\boldsymbol{x})=\max\left(\mathrm{e}^{-\left[\frac{(x_1-1)^2}{0.3607}+\frac{(x_2-4)^2}{5.77}\right]},\quad \mathrm{e}^{-\left[\frac{(x_1+1)^2}{0.3607}+\frac{(x_2+4)^2}{5.77}\right]}\right)$$

$$M^5(\boldsymbol{x})=\max\left(\mathrm{e}^{-\left[\frac{(x_1-1)^2}{0.3607}+\frac{(x_2+4)^2}{5.77}\right]},\quad \mathrm{e}^{-\left[\frac{(x_1+1)^2}{0.3607}+\frac{(x_2-4)^2}{5.77}\right]}\right)$$

令 $M(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{5}M^i(\boldsymbol{x})$，$\mu_i(\boldsymbol{x})=\dfrac{M^i(\boldsymbol{x})}{M(\boldsymbol{x})}$，$i=1,2,\cdots,5$.

本文用极点配置的方法为每个线性子系统设计一个线性状态反馈控制器. 期望闭环系统的极点为 $s_{1,2}=-3.5\pm j4.788$，经计算得

$$L_1=[-297.2750\quad -39.6601],\quad L_2=[-281.2776\quad -39.6601],$$
$$L_3=[-526.6508\quad -89.8588],\quad L_4=[-544.5263\quad -82.9281],$$
$$L_5=[-544.5263\quad -96.7895]$$

于是得到单倒立摆的模糊模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{5}\mu_i(\boldsymbol{x})(A_i-B_iL_k)\boldsymbol{x}(t),\ k\text{ 满足 }\mu_k(\boldsymbol{x})=\max_{1\leqslant i\leqslant 5}\{\mu_i(\boldsymbol{x})\}\tag{3}$$

若用定理 1 判断系统(3)的渐近稳定性，假设已经得到 $P$ 和 $\lambda_{ki}$ 了，仍需要验证不等式 $\sum_{i=1}\mu_i(\boldsymbol{x})\lambda_{ki}<0$. 鉴于这里的隶属度函数比较复杂，直接验证不等式成立比较困难.

若视系统(3)为开环系统，可以考虑用定理 2. 但是，当 $k=1$ 时，

$\lambda_{\max}((A_1-B_1L_1)^{\mathrm{T}}+(A_1-B_1L_1))=27.8845>0$，不满足定理 2 的条件，从而无法判断系统(3)的渐近稳定性.

下面采用本文证明的定理 3 来判断系统(3)的渐进稳定性.

取 $P=\begin{bmatrix}13 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$，计算 $Q_{ki}=(A_i-B_iL_k)^{\mathrm{T}}+P(A_i-B_iL_k)$，$\lambda_{ki}=\lambda_{max}(Q_{ki})$，$i,k=1,2,\cdots,5$，得

$\lambda_{11}=-3.9081$，$\lambda_{12}=-3.3925$，$\lambda_{13}=-1.5900$，$\lambda_{14}=-1.8865$，$\lambda_{15}=-0.6211$

$\lambda_{21}=-4.4053$，$\lambda_{22}=-3.9081$，$\lambda_{23}=-1.2950$，$\lambda_{24}=-1.5027$，$\lambda_{25}=-0.2145$

$\lambda_{31}=-0.5681$，$\lambda_{32}=0.0154$，$\lambda_{33}=-3.9081$，$\lambda_{34}=-4.5332$，$\lambda_{35}=-3.7704$

$\lambda_{41}=0.6727$，$\lambda_{42}=1.2572$，$\lambda_{43}=-3.2824$，$\lambda_{44}=-3.9081$，$\lambda_{45}=-3.1419$

$\lambda_{51}=-0.4890$，$\lambda_{52}=0.0930$，$\lambda_{53}=-4.0214$，$\lambda_{54}=-4.6421$，$\lambda_{55}=-3.9081$

首先 $\lambda_{kk}<0$，$k=1,2,\cdots,5$；其次

$k=1$ 时，$\lambda_{11}=-3.9081<0$；$k=2$ 时，$\lambda_{22}=-3.9081<0$；

$k=3$ 时，$\lambda_{33}+\lambda_{32}=-3.8927<0$；$k=4$ 时，$\lambda_{44}+\lambda_{41}+\lambda_{42}=-1.9782<0$；

$k=5$ 时，$\lambda_{55}+\lambda_{52}=-3.8151<0$.

由定理 3，倒立摆系统是渐近稳定的. 与定理 1、定理 2 相比，定理 3 对类似本例的问题，使用起来更为有效、易行.

## 4　结论

本文研究了一类连续模糊动态系统的稳定性，证明了这类系统稳定的充分条件. 该判别方法较为简单易行，可以作为已有方法的一个补充.

## References

1 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, **15**(1): 116～132

2 Gao S G, Ress N W, Feng G. Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy global models. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, **75**(1): 47～62

3 Sun Zeng-Qi. Controller design and stability analysis of time-continous systems based on a fuzzy state model. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(2): 212～216(in Chinese)

4 Sun Zeng-Qi, Zhang Zai-Xing, Deng Zhi Dong. Intelligent Control Theory and Technology. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. 94～97(in Chinese)

5 Li Cheng-Jia, Wang Lei, Dai Guan-Zhong. Stability analysis and design of continuous T-S fuzzy controllers. *Journal of Northwest University*(Natural Science Edition), 2000, **30**(4): 292～295(in Chinese)

6 Sun Zeng-Qi, Zhang Zai-Xing, Deng Zhi-Dong. Intelligent Control Theory and Technology. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. 104～105(in Chinese)

**丁海山** 博士研究生.研究方向是模糊建模与控制、数据具有不确定性的鲁棒建模、盲信号分离等.

(**DING Hai-Shan** Ph. D. candidate at Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interests include computational intelligence, fuzzy modeling and control, robust modeling in the presence of data uncertainties, and blind signal separation.)

**毛剑琴** 北京航空航天大学第七研究室教授、博士生导师,IEE Fellow.研究领域是控制理论与控制工程.如系统的智能建模,智能控制及其应用;鲁棒控制及其应用;智能结构的控制等.

(**MAO Jian-Qin** Professor at Beijing University of Aeronautics and Astrunautics, Fellow of IEE. Her research interests include control theory and control engineering, including intelligent modeling of systems, intelligent control and its applications, robust control with its applications, and control of smart structures.)