

# 基于小波逼近的非线性系统 鲁棒迭代学习控制<sup>1)</sup>

刘 山 吴铁军

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)

(浙江大学智能系统与决策研究所 杭州 310027)

(E-mail: sliu@iipc.zju.edu.cn)

**摘要** 针对存在扰动的未知非线性系统,利用小波逼近将系统参数化,结合变结构控制技术,提出了一种鲁棒迭代学习控制算法。该算法采用迭代学习的方式修正小波逼近的系数,利用具有死区的滑模变结构技术保证算法的鲁棒收敛性。收敛性分析表明,每次迭代学习都将减小所得到的逼近系数与最佳系数的差异。因此,期望轨迹变化后,该算法针对以前轨迹的学习结果仍然可以起作用,部分克服了传统迭代学习控制的学习结果仅对某一特定轨迹有效的缺点。

**关键词** 迭代学习控制,非线性系统,小波逼近,变结构控制

**中图分类号** TP273

## Robust Iterative Learning Control Using Wavelet Approximation for Nonlinear Plants

LIU Shan WU Tie-Jun

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Institute of Intelligent Systems and Decision Making, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(E-mail: sliu@iipc.zju.edu.cn)

**Abstract** A robust iterative learning control (ILC) algorithm based on wavelet approximation and variable structure control is presented for a class of unknown nonlinear uncertain systems with exogenous disturbance. The algorithm parameterizes the plant nonlinearities by using wavelet approximation whose coefficients are iteratively adjusted by learning. The sliding variable structure control strategy with dead zone is applied to ensure the robust convergence. The convergence analysis shows that errors between the actual and the optimal wavelet coefficients are monotonically decreasing with iterations. So this scheme can partially overcome the limitation of conventional ILC scheme that the result for a given trajectory has no use for other trajectories.

**Key words** Iterative learning control, nonlinear plants, wavelet approximation, variable structure control

1) 国家“863”高技术研究发展计划(2002AA412010)、国家自然科学基金(69874035)资助

Supported by National “863” Project(2002AA412010) and National Natural Science Foundation of P. R. China (69874035)

收稿日期 2002-12-31 收修改稿日期 2003-05-02

Received December 31, 2002; in revised form May 2, 2003

## 1 引言

将迭代学习控制技术和常规鲁棒控制技术结合起来,构造具有更强鲁棒收敛性的迭代学习律是当前迭代学习控制研究的一个热点<sup>[1]</sup>. Xu 针对存在不确定性的非线性系统,利用变结构技术提出了一种鲁棒迭代学习律,算法的跟踪性能非常好,但需要很强的系统先验知识<sup>[2]</sup>. 其它利用非线性鲁棒控制技术设计迭代学习律的成果不多. 另一方面,经典的迭代学习控制只能用于特定轨迹的跟踪,一旦轨迹发生变化,原来的学习结果就将失效. 克服这一缺陷的一个思路是将系统的结构参数化,然后采用迭代的方式对参数进行学习. 然而,在实际应用中,往往能够了解的只是系统的部分信息,要掌握系统完全的信息是非常困难的. 因此,将系统结构参数化的问题实际上是一个非线性系统“灰箱”建模的问题.

本文针对存在扰动的非线性系统,首先利用小波逼近技术将系统结构参数化,并采用迭代学习的方式修正小波逼近的系数. 然后结合滑模变结构技术,提出了一种鲁棒迭代学习控制算法并分析了算法的鲁棒收敛性.

## 2 基于小波逼近的鲁棒迭代学习控制设计

考虑存在扰动的未知非线性系统,其第  $k$  次运行的系统方程为

$$x_k^{(n)}(t) = f(x_k, t) + d_k(x_k, t) + b(x_k, t)u_k(t) \quad (1)$$

其中,  $f, b$  为未知的非线性函数,  $u_k$  为系统的输入,  $x_k = [x_k, \dot{x}_k, \dots, x_k^{(n-1)}]^T$  为系统的状态,  $d_k$  为系统运行时的扰动,每次运行  $d_k$  有界但不重复. 给定系统在有限时间区间  $[0, T]$  上的期望轨迹  $x_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$ , 迭代学习的控制目标是寻找控制序列  $\{u_k\}$ , 使得当  $k$  充分大时, 系统的状态序列  $\{x_k\}$  在  $[0, T]$  上逐渐逼近  $x_d$ .

记第  $k$  次运行的状态误差为  $\tilde{x}_k = x_d - x_k$ , 状态误差的一个衡量指标  $s_k$  定义为

$$s_k(x_k, t) = \alpha^T \tilde{x}_k, \quad \alpha_n = 1 \quad (2)$$

其中矢量  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$  由一个 Hurwitz 多项式的系数组成. 一个简单的构造  $s_k$  的方法<sup>[3]</sup> 为令  $s_k(x_k, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x}_k$ ,  $\lambda$  为正常数. 将  $s_k$  对  $t$  微分, 可得

$$\dot{s}_k = \alpha^T (\dot{x}_d - \dot{x}_k) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_k^{(i)} + x_d^{(n)} - x_k^{(n)} \quad (3)$$

记  $a_k(x_k, t) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tilde{x}_k^{(i)} + x_d^{(n)}$ , 将系统方程(1)代入上式可得到逆系统方程

$$u_k = -b^{-1}f + b^{-1}a_k - b^{-1}d_k - b^{-1}\dot{s}_k \quad (4)$$

我们拟采用小波逼近来近似实现  $b^{-1}f$  和  $b^{-1}$ . 小波逼近是小波分析的一个分支, 具有良好的时域和频域的局部化性质<sup>[3]</sup>. 函数空间  $L^2(R^k)$  中的基小波  $\psi(x)$  为满足“容许性”条件的具有局部时频特性的函数. 基小波通过伸缩和平移, 可得到一族小波

$$\{\psi_{m,n}(x) | \psi_{m,n}(x) := |\det A|^{-\frac{m}{2}} \psi(A^{-1}(x - nb))\},$$

$$A = \text{diag}(\alpha), \alpha \in R^k, \alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, k, b \in R^k\}$$

其中,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . 适当选取  $a$  和  $b$ , 可使该族小波满足  $L^2(\mathbb{R}^k)$  的框架(Frame)条件<sup>[3]</sup>.

**引理 1**<sup>[3]</sup>. 若由基小波  $\psi$  生成的小波族  $\{\psi_{mn}\}$  满足框架条件, 则对于任意  $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$ , 存在框架展开系数  $W_{mn}$ , 满足  $f(x) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} W_{mn} \psi_{mn}(x)$ .

针对前述迭代学习控制问题, 先对系统作适当的假设.

**假设 1.** 系统结构的未知函数  $f(x, t)$  和  $b(x, t)$  可表示为状态  $x$  的非线性函数与时间  $t$

的非线性函数的有限乘积和形式. 即  $f(x, t) = \sum_{i=1}^{l_f} f_i^i(t) f_x^i(x), b(x, t) = \sum_{i=1}^{l_b} b_i^i(t) b_x^i(x)$ .

其中,  $l_f$  和  $l_b$  为有限的正整数.

**假设 2.**  $f(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^{n+1}), b(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$  且  $f$  和  $b$  的界已知, 即  $|f(x, t)| \leq M_f(x, t), |b(x, t)| \leq M_b(x, t)$ . 对任意的  $(x, t), b(x, t) > 0$  成立, 且  $b^{-1}$  和  $\dot{b}$  的界已知, 即  $|b^{-1}(x, t)| \leq M_1(x, t), |\dot{b}(x, t)| \leq M_2(x, t)$ . 干扰  $d_k(x_k, t)$  的界已知, 即对任意  $k$ , 满足  $|d_k(x_k, t)| \leq M_d(x_k, t)$ .

引理 1 表明要使小波逼近精确重构原函数, 基小波的伸缩和平移指标  $m$  和  $n$  必须取遍整数域中的所有整数, 这样构成的小波逼近具有无限项, 无法在实际中应用.

本文首先设定一个有限时频范围, 根据基小波的局部时频特性, 选取伸缩和平移指标  $m$  和  $n$  的一个有限集合  $\Omega$ , 使得所选的小波函数的时频窗能够覆盖预设的时频范围, 并以这样选择的有限小波函数族  $\{\psi_{mn} : (m, n) \in \Omega\}$  构造函数的小波逼近. 记  $h(x_k, t) = b^{-1}(x_k, t) f(x_k, t)$ ,  $g(x_k, t) = b^{-1}(x_k, t)$ . 由假设 1 和假设 2, 第  $k$  次运行时, 可取  $h$  和  $g$  的小波逼近为  $h_k$  和  $g_k$

$$h_k(x_k, t) = \sum_{(m,n) \in \Omega} P_k^{mn}(t) \psi_{mn}(x_k), \quad g_k(x_k, t) = \sum_{(m,n) \in \Omega} Q_k^{mn}(t) \psi_{mn}(x_k) \quad (5)$$

其中,  $P_k^{mn}(t)$  和  $Q_k^{mn}(t)$  为小波逼近的系数.

下面构造鲁棒迭代学习控制算法. 控制律本身由两部分组成, 一部分为由小波逼近表示的  $h$  和  $g$  的近似函数的组合, 其逼近系数通过迭代学习算法进行调整, 主要改善系统的跟踪性能, 并能处理具有重复性的不确定性及干扰; 另一部分为滑模变结构控制, 能够消除逼近误差的影响, 并处理不具有重复性的不确定性和干扰. 每次运行时, 构造具体的控制为

$$u_k = -h_k + g_k a_k + w_k \quad (6)$$

其中,  $w_k$  为待定的反馈控制, 包含变结构控制成分.

首先, 考虑控制(6)中  $h_k$  和  $g_k$  的逼近系数的调整算法. 由于预先取定了有限个小波基函数, 因此, 最佳的小波逼近与  $h$  和  $g$  之间也存在固定的误差. 逼近误差及系统扰动很可能导致学习算法向错误的方向学习, 甚至导致算法发散. 为了避免这一现象, 我们仿效鲁棒自适应技术中的包含死区(dead zone)的方法<sup>[4]</sup>, 即当系统的误差达到误差限的要求时, 停止学习, 继续采用上一次学习得到的控制. 为此, 构造新的误差衡量指标

$$s_{\Delta,k}(x_k, t) = s_k(x_k, t) - \epsilon \text{sat}\left(\frac{s_k(x_k, t)}{\epsilon}\right) \quad (7)$$

其中,  $\epsilon$  为一小的正常数,  $\text{sat}$  是饱和函数:  $\text{sat}(y) = \begin{cases} y, & |y| < 1 \\ \text{sgn}(y), & |y| \geq 1 \end{cases}$ .

构造  $h_k$  和  $g_k$  的逼近系数  $P_k^{mn}(t)$  和  $Q_k^{mn}(t)$  的学习算法如下

$$P_{k+1}^{mn}(t) = P_k^{mn}(t) - \eta_1 \psi_{mn}(x_k) s_{\Delta,k}(x_k, t) \quad (8)$$

$$Q_{k+1}^{mn}(t) = Q_k^{mn}(t) + \eta_2 \psi_{mn}(\mathbf{x}_k) a_k(\mathbf{x}_k, t) s_{\Delta,k}(\mathbf{x}_k, t) \quad (9)$$

其中,  $\eta_1 > 0$  和  $\eta_2 > 0$  分别为  $P_k^{mn}(t)$  和  $Q_k^{mn}(t)$  的学习率. 初次运行时,  $P_0^{mn}$  和  $Q_0^{mn}$  可以取为零或其它预设值.

然后进一步设计  $w_k$ , 以保证控制(6)的鲁棒收敛性. 记小波逼近系数与最佳小波逼近系数  $P_*^{mn}(t)$  和  $Q_*^{mn}(t)$  的差为  $\tilde{P}_k^{mn}(t) = P_*^{mn}(t) - P_k^{mn}(t)$ ,  $\tilde{Q}_k^{mn}(t) = Q_*^{mn}(t) - Q_k^{mn}(t)$ . 取系统第  $k$  次运行时的一个类 Lyapunov 函数(同时也是指标函数)为

$$V_k(\mathbf{x}_k, T) = \int_0^T \left( \frac{1}{\eta_1} \sum_{(m,n) \in \Omega} (\tilde{P}_k^{mn}(\tau))^2 + \frac{1}{\eta_2} \sum_{(m,n) \in \Omega} (\tilde{Q}_k^{mn}(\tau))^2 \right) d\tau \quad (10)$$

则由学习律(8)和(9), 相邻两次运行的  $V_{k+1}$  和  $V_k$  的差异  $\Delta V_{k+1}$  为

$$\Delta V_{k+1} = \int_0^T \left( (\eta_1 + \eta_2 a_k^2) s_{\Delta,k}^2 \sum_{(m,n) \in \Omega} \psi_{mn}^2(\mathbf{x}_k) \right) d\tau + \int_0^T \left( 2 s_{\Delta,k} \sum_{(m,n) \in \Omega} (\tilde{P}_k^{mn} - \tilde{Q}_k^{mn} a_k) \psi_{mn}(\mathbf{x}_k) \right) d\tau \quad (11)$$

记实际的  $h$  和  $g$  与最佳小波逼近  $h_*$  和  $g_*$  之间的误差为  $d_h(\mathbf{x}, t)$  和  $d_g(\mathbf{x}, t)$ , 由系统的逆系统方程(4)和构造的控制(6)可知

$$(h_* - h_k) - (g_* - g_k) a_k = -w_k + (-d_h + d_g a_k - b^{-1} d_k) - b^{-1} \dot{s}_k \quad (12)$$

记  $\delta_k(\mathbf{x}_k, t) = -d_h + d_g a_k - b^{-1} d_k$ , 将小波逼近表达式代入上式有

$$\sum_{(m,n) \in \Omega} (\tilde{P}_k^{mn} - \tilde{Q}_k^{mn} a_k) \psi_{mn}(\mathbf{x}_k) = -w_k + \delta_k - b^{-1} \dot{s}_k \quad (13)$$

同时, 注意到除去  $|s_k| = \epsilon$  时, 导数  $\dot{s}_{\Delta,k}$  无定义外,  $\frac{d}{dt}(s_{\Delta,k}^2) = 2s_{\Delta,k}\dot{s}_k$  处处成立. 由(11)和(13)及分部积分公式有

$$\begin{aligned} \Delta V_{k+1} = & \int_0^T \left( 2\delta_k s_{\Delta,k} - b^{-2} \dot{b} s_{\Delta,k}^2 - 2w_k s_{\Delta,k} + (\eta_1 + \eta_2 a_k^2) s_{\Delta,k}^2 \sum_{(m,n) \in \Omega} \psi_{mn}^2(\mathbf{x}_k) \right) d\tau - \\ & b^{-1}(\mathbf{x}_k(T), T) s_{\Delta,k}^2(\mathbf{x}_k(T), T) + b^{-1}(\mathbf{x}_k(0), 0) s_{\Delta,k}^2(\mathbf{x}_k(0), 0) \end{aligned} \quad (14)$$

由假设 2 可以估计(14)中各未知函数的界

$$|\delta_k(\mathbf{x}_k, t)| \leq M_1(\mathbf{x}_k, t)(M_f(\mathbf{x}_k, t) + M_d(\mathbf{x}_k, t) + |a_k(\mathbf{x}_k, t)|) \triangleq l_\delta(\mathbf{x}_k, t) \quad (15)$$

$$|b^{-2}(\mathbf{x}_k, t)\dot{b}(\mathbf{x}_k, t)| \leq M_1^2(\mathbf{x}_k, t)M_2(\mathbf{x}_k, t) \triangleq l_b(\mathbf{x}_k, t) \quad (16)$$

我们希望设计  $w_k$  使得  $V_{k+1}$  比  $V_k$  越小越好, 即  $\Delta V_{k+1}$  尽可能地小. 如下选取  $w_k$

$$w_k(\mathbf{x}_k, t) = c \cdot s_k + l_\delta \text{sat}\left(\frac{s_k}{\epsilon}\right) + \frac{s_{\Delta,k}}{2} (l_b + (\eta_1 + \eta_2 a_k^2) \sum_{(m,n) \in \Omega} \psi_{mn}^2(\mathbf{x}_k)) \quad (17)$$

其中,  $c > 0$  为一正常数, 代表了控制的反馈增益.

由上述构造过程, 可以得到迭代学习控制鲁棒收敛的结论.

**定理 1.** 考虑如式(1)描述的非线性系统, 在  $t \in [0, T]$  上满足假设 1 和假设 2. 对于给定  $[0, T]$  上的期望轨迹  $x_d$ , 若系统满足初始条件重置, 即  $x_k(0) = x_d(0), k = 0, 1, 2, \dots$ , 设计如(6)、(8)、(9)和(17)所示的迭代学习控制器, 则

- 1) 小波逼近(5)的系数  $P_k^{mn}(t)$  和  $Q_k^{mn}(t)$  收敛, 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k^{mn}(t)$  和  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k^{mn}(t)$  存在.
- 2) 对于任意  $\epsilon_0 > 0$ , 选取  $\lambda$  和  $\epsilon$ , 使得  $2^i \lambda^{i-n+1} \epsilon \leq \epsilon_0$  对  $i = 0, 1, \dots, n-1$  均成立, 可保证当  $k$  充分大时, 系统的输出轨迹在期望轨迹的  $\epsilon_0$  邻域内.

**证明.** 注意到  $s_{\Delta,k} \text{sat}\left(\frac{s_k}{\epsilon}\right) = |s_{\Delta,k}|$ ,  $s_{\Delta,k}s_k = s_{\Delta,k}^2 + \epsilon |s_{\Delta,k}|$  任何时候都成立, 由式(17)并利

用条件(15)和(16)可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^T (2\delta_k s_{\Delta,k} - b^{-2} \dot{b} s_{\Delta,k}^2 - 2w_k s_{\Delta,k} + (\eta_1 + \eta_2 a_k^2) s_{\Delta,k}^2 \sum_{(m,n) \in \Omega} \psi_{mn}^2(x_k)) d\tau \leq \\ \int_0^T (-2c \cdot s_{\Delta,k}^2 - 2(l_b - |\delta_k| + \epsilon) |s_{\Delta,k}| - (l_b - |b^{-2} \dot{b}|) s_{\Delta,k}^2) d\tau \leq -2c \int_0^T s_{\Delta,k}^2 d\tau \quad (18) \end{aligned}$$

由  $s_{\Delta,k}$  的定义及初始条件重置, 可知  $s_{\Delta,k}(x_k(0), 0) = 0$ , 因此, 将上式代入(14)得到

$$\Delta V_{k+1} \leq -b^{-1}(x_k(T), T) s_{\Delta,k}^2(x_k(T), T) - 2c \int_0^T s_{\Delta,k}^2 d\tau \quad (19)$$

由  $b(x_k, t) > 0$  和  $c$  为正常数可知  $V_k$  非负且随着  $k$  的增大而单调递减, 从而  $V_k$  的极限  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k$  存在且非负. 由  $V_k$  的定义可知结论(1)成立.

将  $\Delta V_j$  从 1 累加至  $k+1$ , 可得到

$$\sum_{j=1}^{k+1} \Delta V_j = V_{k+1} - V_0 \leq - \sum_{j=0}^k b^{-1}(x_j(T), T) s_{\Delta,j}^2(x_j(T), T) - 2c \sum_{j=0}^k \int_0^T s_{\Delta,j}^2 d\tau \quad (20)$$

因此,

$$\sum_{j=0}^k \int_0^T s_{\Delta,j}^2 d\tau \leq \frac{1}{2c} \left( - \sum_{j=0}^k b^{-1}(x_j(T), T) s_{\Delta,j}^2(x_j(T), T) - V_{k+1} + V_0 \right) \leq \frac{V_0}{2c} \quad (21)$$

由上式令  $k \rightarrow \infty$  取极限, 可知  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \int_0^T s_{\Delta,j}^2 d\tau$  存在且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T s_{\Delta,k}^2 d\tau = 0$ . 由于  $s_{\Delta,k}$  为分段连续函数, 因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |s_{\Delta,k}| = 0$  在  $[0, T]$  上一致成立. 再由  $s_{\Delta,k}$  的定义,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |s_k| \leq \epsilon$  在  $[0, T]$  上一致成立. 由条件  $\tilde{x}_k(0) = 0$  及  $s_k$  的性质, 当  $k$  充分大时, 在  $[0, T]$  上成立  $|\tilde{x}_k^{(i)}(t)| \leq 2^i \lambda^{i-n+1} \epsilon \leq \epsilon_0, i=0, 1, \dots, n-1$ . 结论(2)成立. 证毕.

常规迭代学习控制的一个很大的限制是只能用于某种特定的轨迹跟踪问题, 学习的结果是记忆下控制过程  $u(t)$ , 尽管它能够使得输出轨迹精确地跟踪原特定轨迹, 但一旦期望轨迹发生变化, 就必须重新学习, 而原来学习的结果一般并不能对新的学习过程提供什么帮助. 本文提出的学习控制方法则可以部分地克服这一缺陷, 这是因为由系统的逆系统方程(4)和控制律(6)可以知道, 如果得到了  $h$  和  $g$  的最佳小波逼近的系数, 对于新的期望轨迹, 此时控制律中需要变化的只是  $s_k$  和  $s_{\Delta,k}$ , 而小波逼近的系数则可以停止学习, 也就是保持前一期望轨迹时学习的结果, 学习过程不需要重新开始. 尽管定理 1 只能保证小波逼近的系数  $P_k^{mn}$  和  $Q_k^{mn}$  收敛, 并不能保证  $P_k^{mn}$  和  $Q_k^{mn}$  收敛到  $P_*^{mn}$  和  $Q_*^{mn}$ , 但  $V_k$  的单调递减性保证了  $P_k^{mn}$  和  $Q_k^{mn}$  与  $P_*^{mn}$  和  $Q_*^{mn}$  的差异只会减小, 不会增大. 因此, 期望轨迹发生变化时, 可将原期望轨迹学习过程所得到的已收敛的小波逼近系数  $P_\infty^{mn}$  和  $Q_\infty^{mn}$  为初始系数, 这样可以减少学习次数, 且能避免盲目设置学习的初始参数造成系统的状态变化剧烈这一传统迭代学习控制经常具有的特点.

### 3 仿真研究

存在扰动的未知非线性系统(1)由如下方程决定

$$\dot{x}_k(t) = (1 + \sin^2(t)) x_k^2 \cos(3x_k) + (2 - \cos(t)) u_k(t) + d_k(x_k, t)$$

仅知道系统的一些界的条件,  $\|f(x_k, t)\| \leq 2x_k^2$ ,  $\|b\| \leq 3$ ,  $\|b^{-1}\| \leq 1$ ,  $\|\dot{b}\| \leq 3$  和  $\|d_k\| < 0.05$ ,

系统的初始输出为零。期望轨迹为  $x_d(t) = \sin^3(\pi t/3) + \sin(\pi t/6)$ 。按照公式(6)、(8)、(9)和(17)设计控制律,其中,基小波选择墨西哥帽状小波  $\psi(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2/\sqrt{2\pi}}$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ 。选取  $a=2, b=1$ , 小波函数族指标  $(m, n)$  频域指标  $m$  和时域指标  $n$  如下选取:  $m$  为 -1 时,  $n$  取 -8 至 8;  $m$  为 0 时,  $n$  取 -4 至 4;  $m$  为 1 时,  $n$  取 -2 至 2。学习率  $\eta_1$  和  $\eta_2$  均取为 1.0, 反馈增益  $c$  为 1.0, 跟踪误差限  $\epsilon$  为 0.01。

图 1 给出了系统的最大输出误差与迭代学习运行次数的变化情况。可以看出, 在初次运行时, 系统的输出误差就比较小, 最大输出误差小于 0.18, 这是滑模变结构反馈控制的效果。学习律起作用后, 系统的输出误差逐步减小, 并在第 5 次运行时已基本达到收敛, 此时, 系统的最大输出误差小于 0.01, 已小于我们设定的误差限。图 2 给出了系统第 10 次迭代运行时输出轨迹误差。可以看出, 此时系统输出误差在 0.01 的误差限范围内波动。

在上述学习过程收敛后, 保持学习好的小波逼近系数不变, 并用它们构造控制器, 并跟踪新的期望轨迹  $x_d(t) = t \cos(\pi t/2)$ 。图 3 为系统在该控制器作用下的输出轨迹误差。可以看出, 系统输出仍然准确地跟踪了新的期望轨迹, 此时系统输出误差的绝对值小于 0.035, 这说明在期望轨迹发生变化后, 以前的学习结果仍然可以起作用, 而不用完全从头开始。

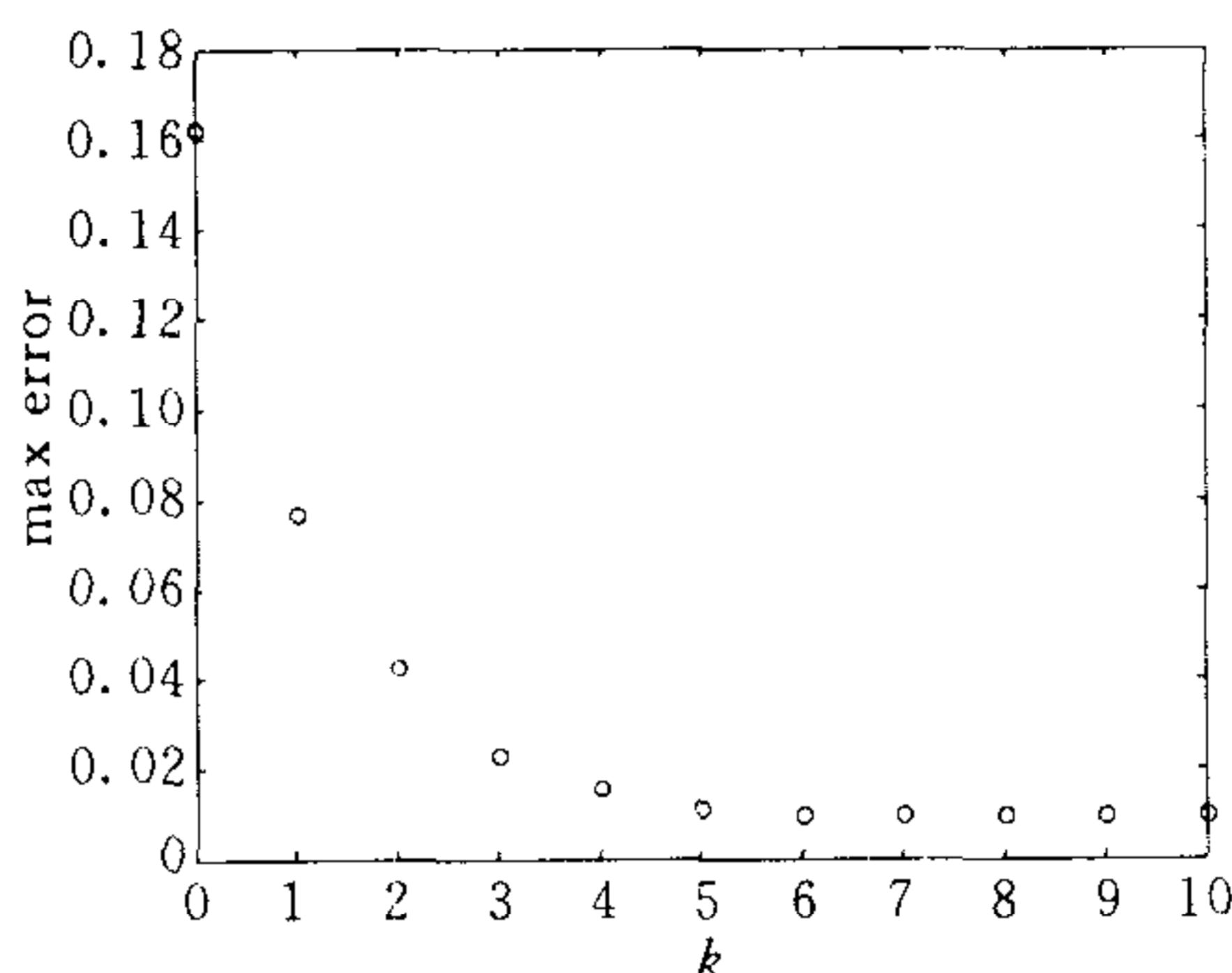


图 1 输出误差随迭代运行次数变化

Fig. 1 The output errors vs iterations

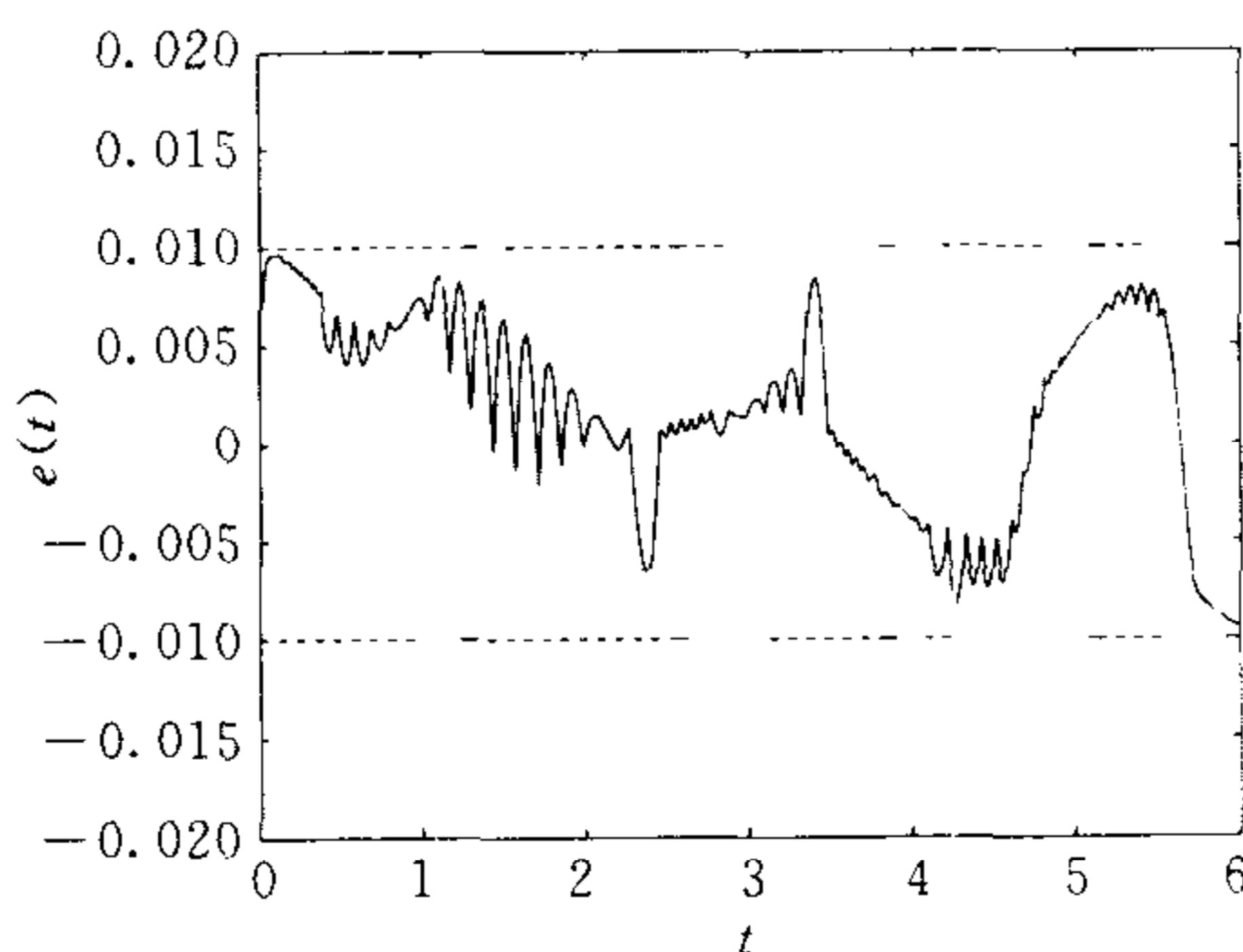


图 2 系统第 10 次运行的输出误差

Fig. 2 The output errors in 10th iteration

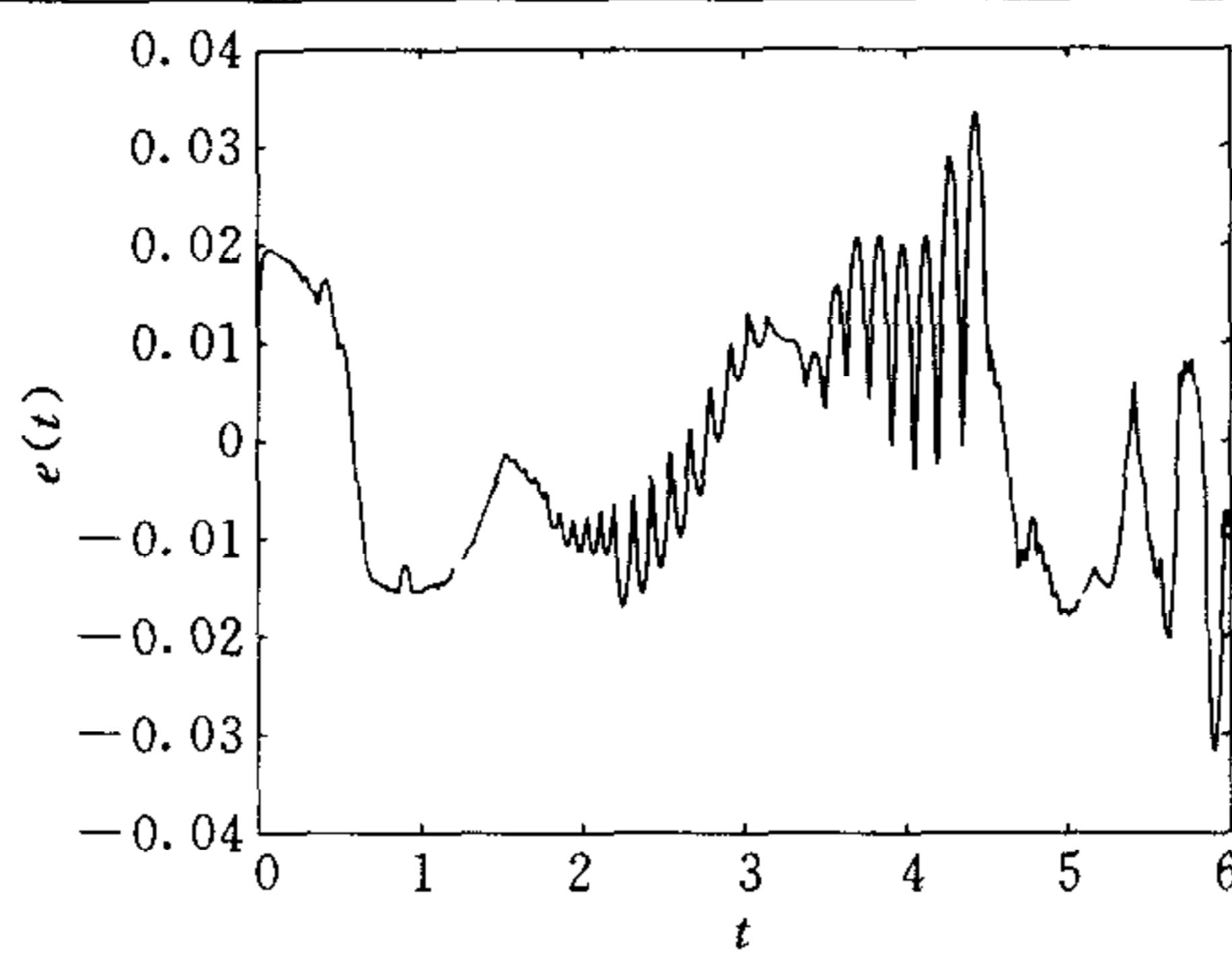


图3 跟踪新期望轨迹的输出误差  
Fig. 3 The output errors for new desired jectory

## 4 结论

本文针对存在扰动的未知非线性系统,基于小波逼近技术提出了一种鲁棒迭代学习控制算法。该算法利用小波逼近将控制律参数化,且使控制律的待定参数与期望轨迹无关,然后利用迭代学习的方法学习控制律参数,并结合具有死区的滑模变结构技术保证算法的鲁棒收敛性,因此,学习好的控制参数对新的期望轨迹仍然有效,在此基础上进行的新的学习过程,其效率能够得到很大的提高。仿真结果显示了算法的有效性。

## References

- 1 Moore K L. Iterative learning control—an expository overview. *Applied and Computational Controls, Signal Processing and Circuits*, 1998, 1(2): 151~214
- 2 Xu J X, Qu Z. Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 1998, 34(8): 983~988
- 3 Chui C K. *An Introduction to Wavelets*. New York: Academic Press, 1992
- 4 Slotine J J, Li W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991

**刘山** 2002年于浙江大学获得控制科学与工程专业工学博士学位。现为浙江大学智能系统与决策研究所助研。研究方向为智能控制、学习控制及其在工业中的应用。

(LIU Shan Received his Ph. D. degree from Zhejiang University in 2002. He is currently an Assistant Researcher in Institute of Intelligent Systems and Decision Making, Zhejiang University. His research interests include intelligent control, learning control and their applications in industry.)

**吴铁军** 1988年于浙江大学获得工业自动化专业工学博士学位。现为浙江大学智能系统与决策研究所所长、教授、博士生导师。研究方向为大系统智能控制、非线性控制、混杂动态系统控制与决策及其在复杂系统中的应用等。

(WU Tie-Jun Received his Ph. D. degree from Zhejiang University in 1988. He is currently a Professor and the director of Institute of Intelligent Systems and Decision Making, Zhejiang University. His research interests include intelligent control of large systems, nonlinear control, and control and decision of hybrid systems and their applications in complex systems. )