

离散模糊系统分析与设计的 模糊 Lyapunov 方法¹⁾

王岩¹ 张庆灵² 孙增圻¹ 孙富春¹

¹(清华大学计算机科学与技术系 智能技术与系统国家重点实验室 北京 100084)

²(东北大学理学院 沈阳 110004)

(E-mail: wangy@s1000e.cs.tsinghua.edu.cn)

摘要 研究离散 T-S 模糊控制系统基于模糊 Lyapunov 函数的稳定性分析及控制器设计问题. 首先, 构造出离散型模糊 Lyapunov 函数, 模糊 Lyapunov 函数是系数与 T-S 模糊系统的模糊规则权重相对应的复合型 Lyapunov 函数. 然后, 得到了开环系统新的稳定性充分条件, 与公共 Lyapunov 方法的结果相比, 这一条件更为宽松. 进而, 基于一系列线性矩阵不等式设计出模糊控制器. 最后, 仿真实例说明了该方法的算法和本文条件的优越性.

关键词 T-S 模糊系统, 模糊 Lyapunov 函数, 渐近稳定, 线性矩阵不等式

中图分类号 TP13

Analysis and Design of Discrete Fuzzy System with Fuzzy Lyapunov Approach

WANG Yan¹ ZHANG Qing-Ling² SUN Zeng-Qi¹ SUN Fu-Chun¹

¹(Department of Computer Science and Technology, National Key Laboratory of Intelligence Technology and Systems, Tsinghua University, Beijing 100084)

²(School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004)

(E-mail: wangy@s1000e.cs.tsinghua.edu.cn)

Abstract The stability analysis and fuzzy controller design problem of discrete T-S fuzzy control system are discussed based on fuzzy Lyapunov function. First, a new Lyapunov function for discrete T-S fuzzy system is constructed. The fuzzy Lyapunov function shares the same membership functions with the T-S fuzzy model. Then, a new sufficient condition for the stability of the open-loop system is proposed. This condition is less conservative than the results obtained with the common Lyapunov approach. In addition, the fuzzy controller is designed based on a series of LMIs. At last, simulation example shows the design procedure and the advantage of the proposed method.

1) 国家重点基础研究专项基金(G2002cb312205), 国家自然科学基金重大研究计划专项基金(90205008), 国家自然科学基金(60174018, 60084002), 全国优秀博士学位论文专项基金(200041)和教育部骨干教师基金联合资助
Supported by National Key Project for Basic Research of P. R. China(G2002cb312205), National Science Foundation for Key Technical Research of P. R. China (90205008), National Natural Science Foundation of P. R. China (60174018, 60084002), National Excellent Doctoral Dissertation Foundation(200041), and Key Teacher Research Grant by the National Ministry of Education

收稿日期 2003-01-15 收修改稿日期 2003-05-14

Received January 15, 2003; in revised form May 14, 2003

Key words T-S fuzzy system, fuzzy Lyapunov function, asymptotic stability, linear matrix inequality

1 引言

由于 T-S 模糊控制方法在难于建立精确数学模型系统中的应用日益受到人们的重视, T-S 模糊控制系统稳定性问题的研究也取得了许多成果^[1~10]. 这些结果大部分^[2,4~10]以 Tanaka 等提出的公共 Lyapunov 函数解法^[1]为基础, 基于 LMI 的设计方法为寻找公共 Lyapunov 函数解提供了有效的工具, 很多文献^[5,7,8,10]给出了低保守性设计条件, 但并没有解决这种方法具有较强保守性的根源——公共 Lyapunov 函数解, 模糊规则数越多, 寻找公共 Lyapunov 函数解越困难.

最近, Tanaka 等^[9]针对连续型模糊系统提出了模糊 Lyapunov 方法, 对隶属函数的导数给出限制并假设前件变量只与状态有关, 得到了系统稳定的充分条件. 目前还未见离散 T-S 模糊系统基于模糊 Lyapunov 函数方法的结果. 本文构造了离散型模糊 Lyapunov 函数, 并给出了模糊控制器的设计方法, 大大降低了结果的保守性. 仿真实例说明了此方法的优越性.

2 离散 T-S 模糊控制系统及其稳定性分析基本结果

对于一个多输入多输出离散非线性系统, 它的第 i 条模糊规则具有如下形式

$$R^i: \text{if } z_1(k) \text{ is } M_1^i, \text{ and } \dots, \text{ and } z_p(k) \text{ is } M_p^i, \text{ then } x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \quad (1)$$

其中 $i=1, 2, \dots, r$, r 是模糊规则数, $z(k) = [z_1(k) \ z_2(k) \ \dots \ z_p(k)]^T$ 是系统的前件变量, $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T \in R^n$, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$. 称每条模糊规则对应的线性状态方程为子系统. 记 $x(k) = x_k$, $u(k) = u_k$, $z(k) = z_k$. 通过单点模糊化、乘积推理和中心平均反模糊化方法, 得到系统的全局模型

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r w_i(z_k) (A_i x_k + B_i u_k) = A(z_k) x_k + B(z_k) u_k,$$

$$A(z_k) = \sum_{i=1}^r w_i(z_k) A_i, \quad B(z_k) = \sum_{i=1}^r w_i(z_k) B_i \quad (2)$$

$$w_i(z_k) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(k)) / \sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(k)), \quad 0 \leq w_i(z_k) \leq 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^r w_i(z_k) = 1 \quad (3)$$

其中 $M_j^i(z_j(k))$ 表示 $z_j(k)$ 属于模糊集 M_j^i 的隶属度. 对于开环系统

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r w_i(z_k) A_i x_k \quad (4)$$

文献^[1,2,4~8,10]考虑的公共 Lyapunov 函数为 $v(x_k) = x_k^T P x_k$, P 为正定对称矩阵.

定理 1^[1]. 如果对所有子系统存在一个公共正定对称矩阵 P 使得 $A_i^T P A_i - P < 0$ 成立, 则模糊系统(4)是全局渐近稳定的.

3 离散模糊 Lyapunov 方法及其稳定性条件

模糊 Lyapunov 函数是系数与模糊规则权重相对应的复合(multiple)型 Lyapunov 函数

$$v(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) = \mathbf{x}_k^T P(\mathbf{z}_k) \mathbf{x}_k, P(\mathbf{z}_k) = \sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{z}_k) P_i, P_i > 0 \quad (5)$$

定义 1^[1]. 考虑离散系统 $\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k))$, $\mathbf{x}(k) \in R^n$, $f(\mathbf{x}(k))$ 是向量函数, 并且对于所有的 k 满足 $f(0) = 0$. 如果有在 $\mathbf{x}(k)$ 上连续标量函数 $v(\mathbf{x}(k))$ 使得 a) $v(0) = 0$; b) 对于 $\mathbf{x}(k) \neq 0, v(\mathbf{x}(k)) > 0$; c) 当 $\|\mathbf{x}(k)\| \rightarrow \infty$ 时, $v(\mathbf{x}(k))$ 趋向于无穷; d) 对于 $\mathbf{x}(k) \neq 0, L = v(\mathbf{x}(k+1)) - v(\mathbf{x}(k)) < 0$; 那么, 平衡态 $\mathbf{x}(k) = 0$ 对所有的 k 全局渐近稳定, 且 $v(\mathbf{x}(k))$ 是 Lyapunov 函数.

设 T-S 模糊系统(4)满足零初始条件, 则函数(5)满足定义 1 中的条件 a), b) 和 c), 那么基于定义 1, 有如下定义.

定义 2. 对于 T-S 模糊系统(4), 如果存在函数(5)使得 $L = v(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{z}_{k+1}) - v(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k) < 0$, 对于 $\mathbf{x}_k \neq 0$ 成立, 那么称系统(4)对所有 k 是全局渐近稳定的.

定理 2. 对于 T-S 模糊系统(4), 如果存在正定对称矩阵 P_i (或 P_l) 使得

$$A_i^T P_l A_i - P_i < 0 \quad (6)$$

对所有 $i, l = 1, 2, \dots, r$ 成立, 则系统(4)是全局渐近稳定的.

证明. 对系统(4)选择如式(5)的 Lyapunov 函数, 则

$$L = \mathbf{x}_k^T \left[\left(\sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{z}_k) A_i^T \right) \left(\sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{z}_{k+1}) P_i \right) A(\mathbf{z}_k) - P(\mathbf{z}_k) \right] \mathbf{x}_k \quad (7)$$

$A(\mathbf{z}_k)$ 和 $P(\mathbf{z}_k)$ 分别由式(2)和式(5)决定, 由于 $\omega_i(\mathbf{z}_k)$ 是模糊规则的权重, 它在任意时刻均具有性质(3), 因此 $\omega_i(\mathbf{z}_{k+1})$ 也具有这一性质, 那么

$$L = \mathbf{x}_k^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{z}_k) \omega_l(\mathbf{z}_{k+1}) \omega_j(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_j - P_i) \right] \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^T \left(\sum_{l=1}^r \omega_l(\mathbf{z}_{k+1}) \Lambda_l \right) \mathbf{x}_k$$

$$\Lambda_l = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\mathbf{z}_k) \omega_j(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_j - P_i) =$$

$$\sum_{i=1}^r \omega_i^2(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_i - P_i) + \sum_{i < j} \omega_i(\mathbf{z}_k) \omega_j(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_j - P_i + A_j^T P_l A_i - P_j)$$

由于任何一个正定矩阵 P_l 可写成正定矩阵 D_l 的平方, 即 $P_l = D_l D_l$, 因此

$$\Lambda_l = \sum_{i=1}^r \omega_i^2(\mathbf{z}_k) (A_i^T D_l D_l A_i - P_i) + \sum_{i < j} \omega_i(\mathbf{z}_k) \omega_j(\mathbf{z}_k) (A_i^T D_l D_l A_j - P_i + A_j^T D_l D_l A_i - P_j) \leq$$

$$\sum_{i=1}^r \omega_i^2(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_i - P_i) + \sum_{i < j} \omega_i(\mathbf{z}_k) \omega_j(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_i - P_i + A_j^T P_l A_j - P_j)$$

那么

$$L \leq \mathbf{x}_k^T \sum_{l=1}^r \omega_l(\mathbf{z}_{k+1}) \left[\sum_{i=1}^r \omega_i(\mathbf{z}_k) (A_i^T P_l A_i - P_i) \right] \mathbf{x}_k$$

由于 $\omega_l(\mathbf{z}_{k+1}) \geq 0, \omega_i(\mathbf{z}_k) \geq 0$, 若式(6)成立, 则 $L < 0$, 系统(4)全局渐近稳定. 证毕.

注 1. 当定理 2 中的 P_i 取为 $P_1 = P_2 = \dots = P_r = P$ 时, 模糊 Lyapunov 函数变为公共 Lyapunov 函数, 且定理 2 中的条件(6)也变成定理 1 中的条件, 即定理 1 是定理 2 的特殊情况. 在第 5 节, 我们将用实例说明该方法的优越性.

4 基于 LMI 的模糊控制器设计

我们采用 PDC(parallel distributed compensations)模糊控制器来控制系统(1). 控制器

的全局模型为

$$u_k = \sum_{i=1}^r w_i(z_k) F_i x_k \quad (8)$$

将式(8)代入式(2)可得闭环模糊控制系统

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^r w_i^2(z_k) G_{ii} x_k + 2 \sum_{i<j}^r w_i(z_k) w_j(z_k) M_{ij} x_k, \quad G_{ij} = A_i + B_i F_j, \quad M_{ij} = (G_{ij} + G_{ji})/2 \quad (9)$$

由式(3)可推出模糊规则权重的性质: 1) $\sum_{i=1}^r w_i^2(z_k) + 2 \sum_{i<j}^r w_i(z_k) w_j(z_k) = 1$; 2) $\sum_{i=1}^r w_i(z_k) P_i = \sum_{i=1}^r w_i^2(z_k) P_i + \sum_{i<j}^r w_i(z_k) w_j(z_k) (P_i + P_j)$. 利用性质 1), 2) 和矩阵的 Schur 补性质即可证得以下结论.

定理 3. 如果存在正定对称矩阵 P_i 满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_i & G_{ii}^T P_l \\ P_l G_{ii} & P_l \end{bmatrix} > 0, \quad i, l = 1, 2, \dots, r; \quad \begin{bmatrix} (P_i + P_j)/2 & M_{ij}^T P_l \\ P_l M_{ij} & P_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad i < j \leq r \quad (10)$$

则 T-S 模糊控制系统(1)在模糊控制器(8)作用下的闭环系统(9)全局渐近稳定.

定理 4. 如果存在对称矩阵 $Q_{ii} > 0, Q_{ij} > 0$ 和矩阵 Y_{ii}, Y_{ij} 使得

$$\begin{bmatrix} Q_{ii} & Q_{ii} A_i^T + Y_{ii}^T B_i^T \\ A_i Q_{ii} + B_i Y_{ii} & Q_{ii} \end{bmatrix} > 0, \quad i, l = 1, 2, \dots, r \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{ij} & (Q_{ij} A_i^T + Q_{ij} A_j^T + Y_{ij}^T B_i^T + Y_{ij}^T B_j^T)/2 \\ (A_i Q_{ij} + A_j Q_{ij} + B_i Y_{ij} + B_j Y_{ij})/2 & Q_{ij} \end{bmatrix} \geq 0, \quad i < j \leq r \quad (12)$$

$$Q_{ij}^{-1} = (Q_{ii}^{-1} + Q_{jj}^{-1})/2 \quad (13)$$

则 T-S 模糊控制系统(1)在模糊控制器(8)作用下所得的闭环模糊系统(9)是全局渐近稳定的, 此时的模糊控制器反馈增益为 $F_i = Y_{ii} Q_{ii}^{-1}$.

证明. 令 $\Pi_{ij} = (P_i + P_j)/2, Q_{ij} = \Pi_{ij}^{-1}$, 那么 $\Pi_{ii} = P_i, Q_{ii} = P_i^{-1}$ 且 $Q_{ij}^{-1} = (Q_{ii}^{-1} + Q_{jj}^{-1})/2$, 再利用矩阵的等价变换即可证得结论. 证毕.

5 实例比较及算法说明

小车倒车模型^[2]是非线性的: $x_1(k+1) = (1 - vt/L)x_1(k) + (vt/l)u(k)$; $x_2(k+1) = x_2(k) + (vt/L)x_1(k)$; $x_3(k+1) = x_3(k) + vt \sin[x_2(k) + (vt/2L)x_1(k)]$. 这里 $x_1(k)$ 为车头转角; $x_2(k)$ 为拖车的转角; $x_3(k)$ 为拖车尾的垂直位置; $u(k)$ 为车轮控制角; $l = 2.8, L = 5.5, v = -1.0, t = 2.0, d = 0.01/\pi$. 在实现计算机控制时, 采用如下模糊规则来描述倒车模型:

$$R^1 \text{ if } z(k) \text{ is about } 0, \text{ then } x(k+1) = (A_1 + \Delta A_1)x(k) + B_1 u(k)$$

$$R^2 \text{ if } z(k) \text{ is about } \pi \text{ or } -\pi, \text{ then } x(k+1) = (A_2 + \Delta A_2)x(k) + B_2 u(k)$$

其中 $z(k) = x_2(k) + (vt/2L)x_1(k)$, “about 0”和“about π or $-\pi$ ”的隶属函数分别为

$$w_1(z(k)) = (1 - 1/(1 + \exp\{-3[z(k) - \pi/2]\})) / (1 + \exp\{-3[z(k) + \pi/2]\}),$$

$$w_2(z(k)) = 1 - w_1(z(k))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 - vt/L & 0 & 0 \\ vt/L & 1 & 0 \\ v^2 t^2 / 2L & vt & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} vt/l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 - vt/L & 0 & 0 \\ vt/L & 1 & 0 \\ dv^2 t^2 / 2L & dvt & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} vt/l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = [0 \ 0 \ \delta]^T \cdot [vt/2L \ 1 \ 0], \Delta A_2 = [0 \ 0 \ \theta]^T \cdot [vt/2L \ 1 \ 0]$$

下面研究 $\delta=2, \theta \in [-20, 20]$ 时系统的稳定性. 将参数 $A_i + \Delta A_i, B_i$ 分别代入本文的定理 4(A)、文献[5]的定理 3(B)和文献[7]的定理 12(C), 得到基于这三个定理的系统稳定性随 θ 变化的比较图, 如图 1 所示, ‘·’代表定理条件的可行点(稳定), ‘×’代表条件的不可行点(不一定不稳定). 从图 1 可知, 由本文定理得到的稳定点最多, 即条件最宽松.

当 $\delta=2, \theta=-1$ 时, 由定理 4 得到线性矩阵不等式(11)和(12)满足式(13)的解. 控制器的反馈增益为 $F_1 = [3.0635 \ -3.1735 \ 1.6318], F_2 = [3.3654 \ -4.8029 \ 1.5875]$. 图 2 是闭环系统初始条件为 $x(0) = [0.25\pi \ 0.75\pi \ -2.4]^T$ 时的仿真结果(‘*’表示 $x_1(k)$; ‘+’表示 $x_2(k)$; ‘▽’表示 $x_3(k)$).

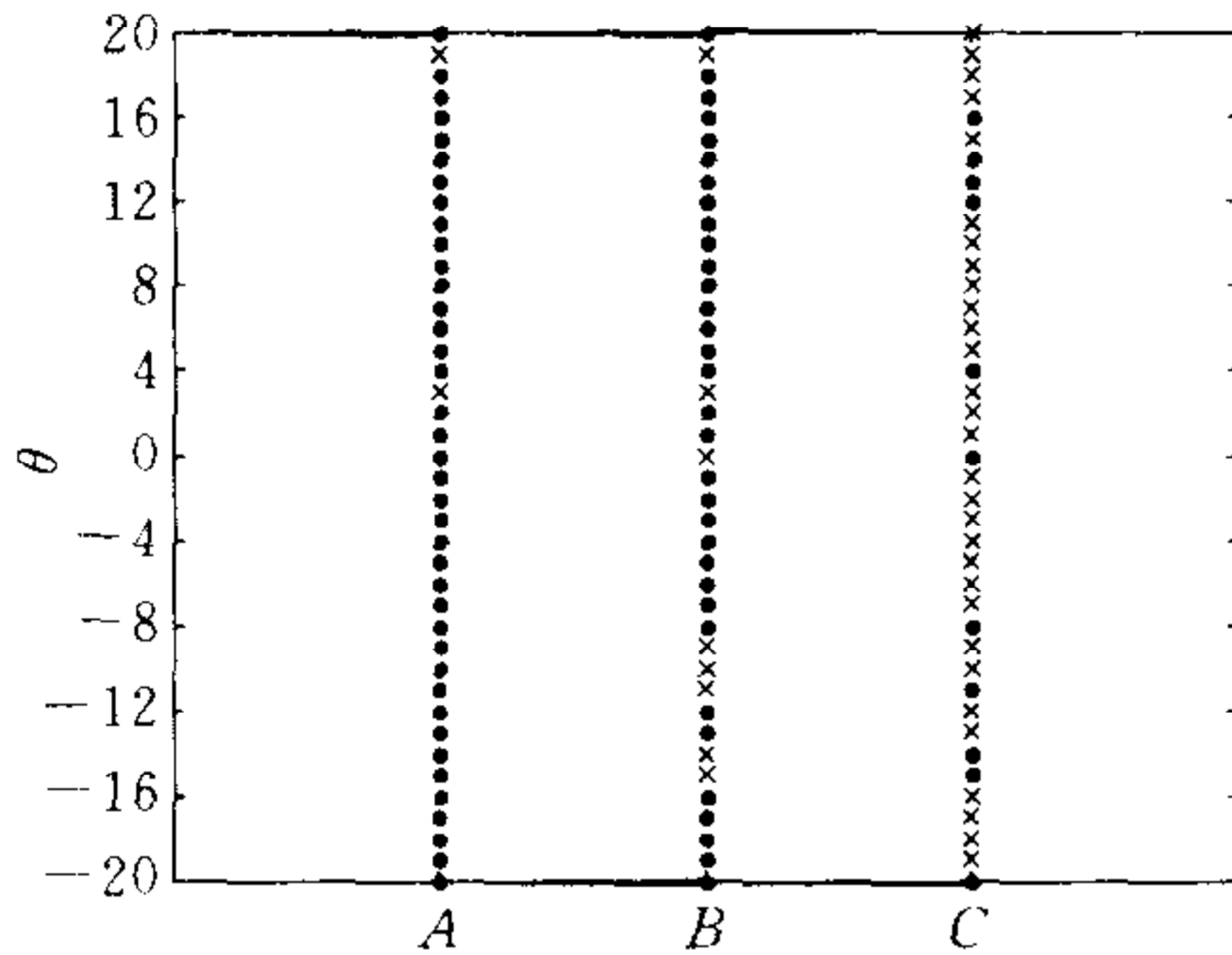


图 1 基于不同定理的稳定性比较图

Fig. 1 Feasible areas based on different Theorems

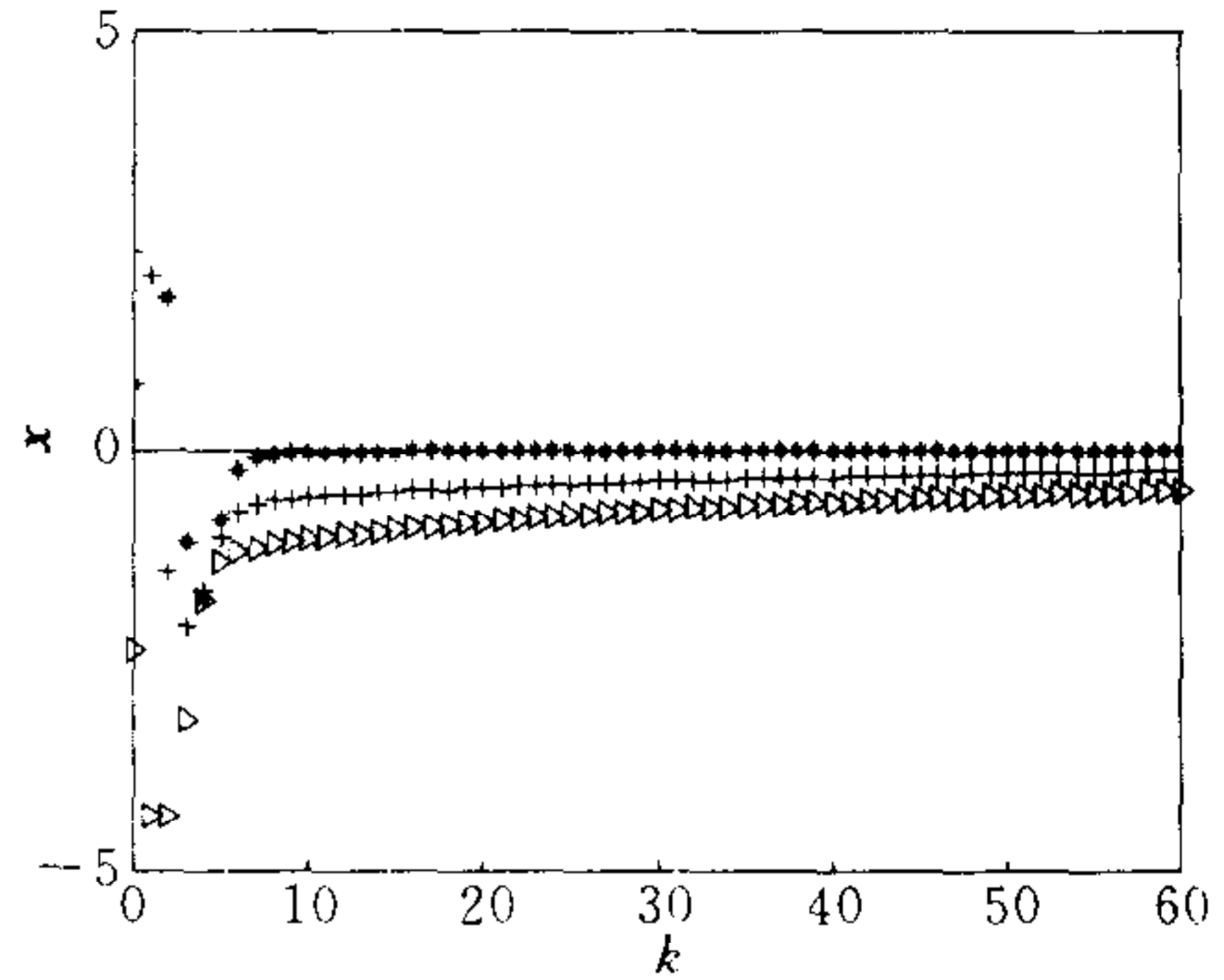


图 2 模糊模型的状态响应曲线

Fig. 2 The state response of the fuzzy model

6 结语

本文针对离散模糊控制系统构造模糊 Lyapunov 函数, 避免了以往寻找公共 Lyapunov 函数解的保守性, 无需对隶属函数做任何假设^[9], 稳定性的判定和控制器的反馈增益计算可归结为求解一系列线性矩阵不等式的问题. 不难发现, 文献[1]的定理 4.2(本文中的定理 1)是本文定理 2 的特例. 仿真结果表明, 本文给出的条件比文献[5, 7]的条件更宽松.

References

- 1 Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **45** (1): 135~156
- 2 Tanaka K, Kosaki T. Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 1997, **27**(3): 552~558
- 3 Cao S G, Ree N W, Feng G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, 1997, **28**(3): 397~404
- 4 Chen C L, Chen P C, Chen C K. Analysis and design of fuzzy control system. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **57**

- (1); 125~140
- 5 Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems; Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1): 14~23
 - 6 Sun Z Q. Controller design and stability analysis of time-continuous systems based on a fuzzy state model. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(2): 212~216(in Chinese)
 - 7 Kim E T, Lee H J. New approach to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(5): 523~533
 - 8 Lee K R, Jeung E T, Park H B. Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback; An LMI approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **120**(1): 123~134
 - 9 Tanaka K, Hori T, Wang H O. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design. In: Proceeding of American Control Conference. Arlington;2001. 4790~4795
 - 10 Yoneyama J, Masahiro N, Hitoshi K, Akria I. H_∞ control for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Systems Science*, 2001, **32**(7): 915~924

王 岩 2003 年获东北大学控制理论与控制工程专业博士学位, 现在清华大学计算机系智能技术与系统国家重点实验室从事博士后研究. 主要研究方向为模糊控制、鲁棒控制.

(**WANG Yan** Received her Ph. D. degree in control theory and control engineering from northeastern university in 2003. Now she is pursuing her postdoctoral research at the State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University. Her research interests include fuzzy control and robust control.)

张庆灵 东北大学理学院院长, 教授, 博士生导师. 主要研究方向为分散控制、鲁棒控制和广义系统理论.

(**ZHANG Qing-Ling** Professor and dean of College of Science, Northeastern University. His research interests include decentralized control, robust control, and descriptor systems.)

孙增圻 1966 年毕业于清华大学自动控制系, 1981 年在瑞典获博士学位, 现为清华大学计算机系教授, 博士生导师. 主要研究领域为神经元网络控制、模糊控制、机器人等.

(**SUN Zeng-Qi** Graduated from the Department of Automatic Control, Tsinghua University in 1966, and received his Ph. D. degree from Chalmers University of Technology, Göthenburg, Sweden, in 1981. He is now a Professor in the Department of Computer Science and Technology at Tsinghua University. His research interests include intelligent control, robotics, fuzzy systems, and neural networks.)

孙富春 1998 年在清华大学计算机应用专业获博士学位, 1998 年 3 月至 2000 年 3 月在清华大学自动控制博士后流动站从事博士后科研工作, 现在清华大学计算机系任教. 目前研究兴趣为模糊逻辑和神经网络控制、离散系统的滑动模控制和柔性空间机械手的建模与智能控制.

(**SUN Fu-Chun** Received his Ph. D. degree from the Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University in 1998. From 1998 to 2000, he was a postdoctoral fellow in the Department of Automation at Tsinghua University. Now he is an Associate Professor in the Department of Computer Science and Technology at Tsinghua University. His research interests include intelligent control, neural networks, fuzzy systems, variable structure control, and robotics.)