第 30 卷 第 4 期
2004 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4
July, 2004

一类不确定切换组合系统的分散 H_∞ 鲁棒镇定[1)]

聂 宏[1,2] 赵 军[1]

[1](东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004)

[2](辽宁石油化工大学理学院 抚顺 113001)

(E-mail: hongnie_001@163.com)

摘 要 主要研究一类不确定切换组合系统 H_∞ 意义下鲁棒稳定性问题，利用单 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数技术，给出了使这类系统渐近稳定且具有 H_∞ 扰动衰减度的两种分散切换律的设计方案.

关键词 切换组合系统，鲁棒 H_∞ 扰动衰减度，单 Lyapunov 函数，多 Lyapunov 函数

中图分类号 TP273

Decentralized H_∞ Robust Stabilization for a Class of Uncertain Switched Composite Systems

NIE Hong[1,2] ZHAO Jun[1]

[1](*School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110004)

[2](*Faculty of Science, Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology, Fushun* 113001)

(E-mail: hongnie_001@163.com)

Abstract The paper mainly studies the H_∞ robust stability problem for a new type of uncertain switched composite systems. Based on single Lyapunov function and multiple Lyapunov function, respectively, two design schemes of decentralized switching laws are obtained, under which this type of systems is shown to be asymptotically stable with H_∞ disturbance attenuation.

Key words Switched composite systems, H_∞ robust disturbance attenuation, single Lyapunov function, multiple Lyapunov function

1 引言

如果一个组合系统的每个低维子系统都是具有不确定的切换系统，我们称之为不确定

1) 国家自然科学基金(60274009)、高等学校博士学科点专项科研基金(20020145007)和辽宁省自然科学基金(20032020)资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60274009), the Specialized Research Fund for Doctoral Program of Higher Educartion of P. R. China(20020145007), and Provincial Natural Science Foundation of Liaoning(20032020)

收稿日期 2003-01-02 收修改稿日期 2003-06-30

Received January 2, 2003; in revised form June 30, 2003

切换组合系统.进行飞行表演的多架飞机的转向系统、十字路口的交通信号灯组都是切换组合系统的具体实例.随着对组合系统和切换系统认识的深化[1~3],人们已注意到切换组合系统的现实意义和研究的必要性.但有关切换组合系统稳定性方面的研究成果很少[4],涉及不确定和 H_∞ 鲁棒控制的结果还未见报道.本文将致力于这一问题.首先,讨论一类具有不确定性的非线性切换系统的 H_∞ 鲁棒镇定问题,利用单 Lyapunov 函数和多 Lyapunov 函数技术给出了两种切换律的设计方案,这两种切换律均保证了这类系统的渐近稳定性和 H_∞ 扰动衰减度.进一步,讨论了使一类具有不确定性的切换组合系统分散 H_∞ 鲁棒镇定的切换律的设计问题.

2 系统的描述

引入如下记号:I 表示适当维数的单位阵,Z^+ 表示正整数集,$L_2[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上平方可积的函数空间,$\|\cdot\|_2$ 表示通常的 L_2 范数.

首先考虑如下一类不确定非线性切换系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= [A_\sigma + \Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{z}(t) &= C\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为状态;$\boldsymbol{w}(t)\in R^q$ 为属于 $L_2[0,\infty)$ 的扰动输入;$\boldsymbol{z}(t)\in R^p$ 为被调输出;B,C 为适当维数的已知常值阵;$\Delta A(t)$ 表示时变参数不确定性且满足 $\Delta A(t)=E\Sigma(t)F$,这里 E 和 F 为适当维数的已知常值阵,$\Sigma(t)\in R^{\alpha\times\beta}$ 为具有 Lebesgue 可测元的未知矩阵函数,满足 $\Sigma^{\mathrm{T}}(t)\Sigma(t)\leqslant I$;$\sigma:[0,+\infty)\to M=\{1,2,\cdots,m\}$ 为分段连续的切换信号;$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):R^n\to R^n$ 为非线性向量函数且满足 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|\leqslant\|G\boldsymbol{x}\|$,其中 G 为已知常值阵.

对于系统(1),我们关心怎样设计一条切换律 σ,使得对所有允许的不确定性,当 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时,系统(1)是渐近稳定的,并且对于给定的常数 $\gamma>0$,在零初始条件下,对所有非零的 $\boldsymbol{w}\in L_2[0,\infty)$,有 $\|\boldsymbol{z}\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{w}\|_2$.此时称系统(1)是渐近稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

进一步,考虑由 N 个子系统互联而成的不确定非线性切换组合系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) &= [A^i_{\sigma_i} + \Delta A_i(t)]\boldsymbol{x}_i(t) + B_i\boldsymbol{w}_i(t) + \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N),\\ \boldsymbol{z}_i(t) &= C_i\boldsymbol{x}_i,\quad i=1,2,\cdots,N\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i(t)\in R^n,\boldsymbol{w}_i(t)\in R^{q_i},\boldsymbol{z}_i(t)\in R^{p_i}$ 和 $\Delta A_i(t)$ 分别是第 i 个子系统的状态、属于 $L_2[0,\infty)$ 的扰动输入、被调输出和参数不确定性.类似于系统(1)仍然假设 $\Delta A_i(t)=E_i\Sigma_i(t)F_i$,$\Sigma_i(t)\in R^{\alpha_i\times\beta_j}$ 满足 $\Sigma_i^{\mathrm{T}}(t)\Sigma_i(t)\leqslant I$;$B_i,C_i$ 为适当维数的已知常值阵;$\sigma_i:[0,+\infty)\to M_i=\{1,2,\cdots,m_i\}$ 为切换信号;$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}):R^{n\times N}\to R^n$ 为互联项且满足 $\|\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\|\leqslant\|G_i\boldsymbol{x}\|$.若令 η_i 表示矩阵 G_i 的最大奇异值,则有 $\|\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\|\leqslant\eta_i\|\boldsymbol{x}\|,i=1,2,\cdots,N$.

系统(2)是由 N 个线性 n 维子系统通过互联而成的组合系统,其中的第 i 个子系统还由下面的 m_i 个子系统之间相互切换而产生

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i &= [A^i_1 + \Delta A_i(t)]\boldsymbol{x}_i + B_i\boldsymbol{w}_i,\\ &\cdots\\ \dot{\boldsymbol{x}}_i &= [A^i_{m_i} + \Delta A_i(t)]\boldsymbol{x}_i + B_i\boldsymbol{w}_i\end{aligned} \tag{3}$$

对系统(2),我们关心怎样设计切换律 σ_i,使得对所有允许的不确定性,当 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时系统(2)是渐近稳定的,并且对于给定的矩阵 $\gamma=\mathrm{diag}\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N\}$,其中 $\gamma_i>0(i=1,2,\cdots,N)$,在零初始条件下,对所有非零的 $\boldsymbol{w}_i\in L_2[0,\infty)$,有 $\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{z}_i\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\|\boldsymbol{w}_i\|_2$.此时称系统(2)是渐近稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

3　切换律和分散切换律的设计

3.1　切换系统(1)切换律的设计

令 $\gamma_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m}(B_1,B_2,\cdots,B_m)$ 表示同维矩阵 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 的凸组合集合，即

$$\gamma_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m}(B_1,B_2,\cdots,B_m) = \left\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j B_j : \alpha_1,\cdots,\alpha_m \in [0,1], \sum_{j=1}^{m}\alpha_j = 1\right\}$$

定理 1. 对于给定的 $\gamma>0$，如果存在矩阵 $\overline{A}\in\gamma_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m}(A_1,A_2,\cdots,A_m)$、正常数 ε 和 μ，使得下面的矩阵不等式

$$\overline{A}^{\mathrm T}P + P\overline{A} + \varepsilon PP + \varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G + \mu F^{\mathrm T}F + \mu^{-1}PEE^{\mathrm T}P + \gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P + C^{\mathrm T}C < 0 \tag{4}$$

有正定对称解 P，那么一定存在一个切换律 $\sigma:[0,+\infty)\to M=\{1,2,\cdots,m\}$，使得系统(1)是渐近稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

证明. 由 $\overline{A}\in\gamma_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m}(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 和式(4)可知，对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in R^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$，有

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\boldsymbol{x}^{\mathrm T}[A_j^{\mathrm T}P+PA_j+\varepsilon PP+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G+\mu F^{\mathrm T}F+\mu^{-1}PEE^{\mathrm T}P+\gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P+C^{\mathrm T}C]\boldsymbol{x}<0 \tag{5}$$

令

$$\Omega_j = \{\boldsymbol{x}\in R^n : \boldsymbol{x}^{\mathrm T}[A_j^{\mathrm T}P + PA_j + \varepsilon PP + \varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G + \mu F^{\mathrm T}F + \mu^{-1}PEE^{\mathrm T}P + \gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P + C^{\mathrm T}C]\boldsymbol{x} < 0\},\ j\in M$$

由式(5)得 $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_m=R^n\setminus\{0\}$. 若令 $\widetilde{\Omega}_1=\Omega_1,\cdots,\widetilde{\Omega}_m=\Omega_m\setminus\bigcup_{j=1}^{m-1}\widetilde{\Omega}_j$，则有 $\widetilde{\Omega}_1\cup\widetilde{\Omega}_2\cup\cdots\cup\widetilde{\Omega}_m=R^n\setminus\{0\}$，且 $\widetilde{\Omega}_j\cap\widetilde{\Omega}_k=\varnothing$，其中 $j,k\in M,j\neq k$.

切换律设计如下：$\sigma(\boldsymbol{x}(t))=j$，如果 $\boldsymbol{x}(t)\in\widetilde{\Omega}_j$. 此切换律确使系统(1)当 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时渐近稳定. 事实上，Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)P\boldsymbol{x}(t)$ 沿系统(1)解轨迹的导数为

$$\dot V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm T}[A_\sigma^{\mathrm T}P + PA_\sigma + \mu F^{\mathrm T}F + \mu^{-1}PEE^{\mathrm T}P + \varepsilon PP + \varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G]\boldsymbol{x}$$

由切换律的设计易见 $\dot V(\boldsymbol{x}(t))<0$. 根据单 Lyapunov 函数技术，系统(1)渐近稳定.

为证明系统(1)具有 H_∞ 扰动衰减度 γ，引进 $J=\int_0^\infty(\boldsymbol{z}^{\mathrm T}\boldsymbol{z}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w})\mathrm{d}t$. 记

$$S\,|\,j=\{t_{k_1},t_{k_1+1},t_{k_2},t_{k_2+1},\cdots,t_{k_l},t_{k_l+1},\cdots\} \tag{6}$$

为第 j 个子系统的切换时间序列，即对任意 $l\in Z^+$，当 $t_{k_l}\leqslant t<t_{k_l+1}$ 时，有 $\sigma(t)=j$. 从而，对任意非零 $\boldsymbol{w}\in L_2[0,\infty)$，

$$J=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}C^{\mathrm T}C\boldsymbol{x}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w}+\dot V(\boldsymbol{x}(t))]\mathrm{d}t-V(\boldsymbol{x}(\infty))\leqslant\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}C^{\mathrm T}C\boldsymbol{x}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}PB\boldsymbol{w}+ \boldsymbol{x}^{\mathrm T}(A_\sigma^{\mathrm T}P+PA_\sigma+\mu F^{\mathrm T}F+\mu^{-1}PEE^{\mathrm T}P+\varepsilon PP+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G)\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t$$

由于 $2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}PB\boldsymbol{w}\leqslant\gamma^{-2}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}PBB^{\mathrm T}P\boldsymbol{x}+\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w}$，所以

$$J\leqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{t_{k_m}}^{t_{k_m+1}}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}[A_j^{\mathrm T}P+PA_j+\mu F^{\mathrm T}F+\mu^{-1}PEE^{\mathrm T}P+ \varepsilon PP+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G+\gamma^{-2}PBB^{\mathrm T}P+C^{\mathrm T}C]\boldsymbol{x}\mathrm{d}t<0$$

因此，对所有非零的 $\boldsymbol{w}\in L_2[0,\infty)$ 和允许的不确定性有 $\|\boldsymbol{z}\|_2\leqslant\gamma\|\boldsymbol{w}\|_2$ 成立.　　证毕.

当系统(1)仅含有两个子系统时，可利用多 Lyapunov 函数技术构造切换律.

定理 2. 设 $m=2$. 对于给定的 $\gamma>0$，如果存在两个同时非负或同时非正实数 β_1,β_2 及正常数 $\varepsilon>0$ 和 $\mu>0$，使得下面的两个矩阵不等式

$$-A_1^{\mathrm T}P_1-P_1A_1-\varepsilon P_1P_1-\varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G-\mu F^{\mathrm T}F-\mu^{-1}P_1EE^{\mathrm T}P- \gamma^{-2}P_1BB^{\mathrm T}P_1-C^{\mathrm T}C+\beta_1(P_2-P_1)>0 \tag{7}$$

$$-A_2^{\mathrm T}P_2-P_2A_2-\varepsilon P_2P_2-\varepsilon^{-1}G^{\mathrm T}G-\mu F^{\mathrm T}F-\mu^{-1}P_2EE^{\mathrm T}P_2-$$

$$\gamma^{-2}P_2BB^{\mathrm{T}}P_2-C^{\mathrm{T}}C+\beta_2(P_1-P_2)>0 \tag{8}$$

有对称正定解 P_1,P_2,则一定存在切换律 $\sigma(t):[0,+\infty)\rightarrow\{1,2\}$,使得系统(1)是渐近稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

证明. 不妨设 β_1,β_2 非负.令 Lyapunov 函数为 $V_j(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_j\boldsymbol{x}\ (j=1,2)$,切换律为 $\sigma(t)=\arg\max\{V_j(\boldsymbol{x}(t)),j=1,2\}$.由 S-procedure 知式(7)和(8)意味着:

如果 $\boldsymbol{x}\in\Omega_1=\{\boldsymbol{x}\in R^n:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(P_1-P_2)\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\}$,则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[A_1^{\mathrm{T}}P_1+P_1A_1+\varepsilon P_1P_1+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G+\mu F^{\mathrm{T}}F+\mu^{-1}P_1EE^{\mathrm{T}}P_1+\gamma^{-2}P_1BB^{\mathrm{T}}P_1+C^{\mathrm{T}}C]\boldsymbol{x}<0 \tag{9}$$

如果 $\boldsymbol{x}\in\Omega_2=\{\boldsymbol{x}\in R^n:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(P_2-P_1)\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\}$,则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[A_2^{\mathrm{T}}P_2+P_2A_2+\varepsilon P_2P_2+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G+\mu F^{\mathrm{T}}F+\mu^{-1}P_2EE^{\mathrm{T}}P_2+\gamma^{-2}P_2BB^{\mathrm{T}}P_2+C^{\mathrm{T}}C]\boldsymbol{x}<0 \tag{10}$$

易见 $\Omega_1\cup\Omega_2=R^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$.当 $\boldsymbol{x}(t)\in\Omega_1$ 时,可得切换律 $\sigma(t)=1$.注意到 $\|\boldsymbol{f}\|\leqslant\|G\boldsymbol{x}\|$,$V_1(\boldsymbol{x}(t))$ 沿系统(1)解轨迹的导数为

$$\dot{V}_1(\boldsymbol{x}(t))\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[A_1^{\mathrm{T}}P_1+P_1A_1+\mu F^{\mathrm{T}}F+\mu^{-1}P_1EE^{\mathrm{T}}P_1+\varepsilon P_1P_1+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G]\boldsymbol{x}<0$$

当 $\boldsymbol{x}(t)\in\Omega_2\backslash\Omega_1$ 时,同理可得 $\dot{V}_2(\boldsymbol{x}(t))<0$.且在任何切换时刻 t_j,有

$$V_{\sigma(t_j)}(\boldsymbol{x}(t_j))\leqslant\lim_{t\rightarrow t_j^-}V_{\sigma(t)}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{11}$$

由多 Lyapunov 函数技术可知,系统(1)对于所有允许的不确定性是渐近稳定的.

为了建立鲁棒 H_∞ 性能,考虑 $J=\int_0^\infty(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})\mathrm{d}t$.设切换时间序列为

$$S=\{t_{k_1},t_{k_1+1},t_{k_2},t_{k_2+1},\cdots,t_{k_l},t_{k_l+1},\cdots\}$$

这里不妨假设对任意 $l\in Z^+$,当 $t_{k_l}\leqslant t<t_{k_l+1}$ 时,有 $\sigma(t)=1$;当 $t_{k_l+1}\leqslant t<t_{k_{l+1}}$ 时,有 $\sigma(t)=2$.则在零初始条件下,有 $t_{k_1}=0$,且函数 J 可以写成

$$\begin{aligned}J=&\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\dot{V}_1(\boldsymbol{x}(t))]\mathrm{d}t-V_1(\boldsymbol{x}(t))\Big|_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}+\\&\int_{t_{k_1+1}}^{t_{k_2}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\dot{V}_2(\boldsymbol{x}(t))]\mathrm{d}t-V_2(\boldsymbol{x}(t))\Big|_{t_{k_1+1}}^{t_{k_2}}+\cdots\\=&\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\int_{t_{k_m}}^{t_{k_m+1}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\dot{V}_1(\boldsymbol{x}(t))]\mathrm{d}t+\\&\int_{t_{k_m+1}}^{t_{k_{m+1}}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}+\dot{V}_2(\boldsymbol{x}(t))]\mathrm{d}t-\\&[V_1(\boldsymbol{x}(t_{k_m+1}))-V_2(\boldsymbol{x}(t_{k_m+1}))]-[V_2(\boldsymbol{x}(t_{k_{m+1}}))-V_1(\boldsymbol{x}(t_{k_{m+1}}))]\Big\}\end{aligned}$$

由切换律的设计可知,对任意的正整数 $m\in Z^+$,有

$$V_1(\boldsymbol{x}(t_{k_m+1}))-V_2(\boldsymbol{x}(t_{k_m+1}))\geqslant 0,\quad V_2(\boldsymbol{x}(t_{k_{m+1}}))-V_1(\boldsymbol{x}(t_{k_{m+1}}))\geqslant 0 \tag{12}$$

进一步整理 J,可得

$$\begin{aligned}J\leqslant&\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\int_{t_{k_m}}^{t_{k_m+1}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}((A_1)^{\mathrm{T}}P_1+P_1A_1+\mu F^{\mathrm{T}}F+\mu^{-1}P_1EE^{\mathrm{T}}P_1+\\&\varepsilon P_1P_1+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G+\gamma^{-2}P_1BB^{\mathrm{T}}P_1+C^{\mathrm{T}}C)\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t+\\&\int_{t_{k_m+1}}^{t_{k_{m+1}}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}((A_2)^{\mathrm{T}}P_2+P_2A_2+\mu F^{\mathrm{T}}F+\mu^{-1}P_2EE^{\mathrm{T}}P_2+\\&\varepsilon P_2P_2+\varepsilon^{-1}G^{\mathrm{T}}G+\gamma^{-2}P_2BB^{\mathrm{T}}P_2+C^{\mathrm{T}}C)\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t\Big\}\end{aligned}$$

由式(9)和(10)可知，对所有非零的 $w\in L_2[0,\infty)$ 和所有允许的不确定性有 $\|z\|_2\leqslant\gamma\|w\|_2$.

证毕.

注 1. 定理 2 的结果完全可以推广到子系统的个数为有限个的情形.

3.2 切换组合系统(2)分散切换律的设计

定理 3. 对于给定的 $\gamma_i>0(i=1,2,\cdots,N)$，如果存在矩阵

$$A^i\in\gamma_{\alpha_1^i,\alpha_2^i,\cdots,\alpha_{m_i}^i}(A_1^i,A_2^i,\cdots,A_{m_i}^i),\quad i=1,2,\cdots,N$$

正常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_N$ 和 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N$，使得下面的 N 个矩阵不等式

$$(A^i)^{\mathrm T}P_i+P_iA^i+\varepsilon_iP_iP_i+\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2\varepsilon_i^{-1}I+\mu_iF_i^{\mathrm T}F_i+\mu_i^{-1}P_iE_iE_i^{\mathrm T}P_i+\gamma_i^{-2}P_iB_iB_i^{\mathrm T}P_i+C_i^{\mathrm T}C_i<0,$$
$$i=1,2,\cdots,N\tag{13}$$

有正定对称解 $P_1,P_2,\cdots,P_N$，那么一定存在一个分散切换律使得系统(2)是渐近稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 $\gamma,\gamma=\mathrm{diag}\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N\}$.

证明. 切换律设计为 $\sigma_i(\boldsymbol{x}(t))=j$，若 $\boldsymbol{x}_i(t)\in\tilde\Omega_j^i(j=1,2,\cdots,m_i;i=1,2,\cdots,N)$，其中 $\tilde\Omega_j^i$ 和 Ω_j^i 的关系同定理 1 中 $\tilde\Omega_j$ 和 Ω_j，而

$$\Omega_j^i=\Big\{\boldsymbol{x}_i\in R^n:\boldsymbol{x}_i^{\mathrm T}[(A_j^i)^{\mathrm T}P_i+P_iA_j^i+\varepsilon_iP_iP_i+\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2\varepsilon_i^{-1}I+\mu_iF_i^{\mathrm T}F_i+$$
$$\mu_i^{-1}P_iE_iE_i^{\mathrm T}P_i+\gamma_i^{-2}P_iB_iB_i^{\mathrm T}P_i+C_i^{\mathrm T}C_i]\boldsymbol{x}_i<0\Big\}$$

显然上述切换律只与子状态有关，因此是分散的切换律. 证明类似于定理 1，略去.

当 $m_i=2$ 时，可以利用多 Lyapunov 函数方法构造分散切换律.

定理 4. 对于给定的 $\gamma_i>0(i=1,2,\cdots,N)$，如果存在同时非负或同时非正实数 β_1^i,β_2^i 及正常数 $\varepsilon_i>0$ 和 $\mu_i>0(i=1,2,\cdots,N)$，使得下面的不等式组

$$-(A_1^i)^{\mathrm T}P_1^i-P_1^iA_1^i-\varepsilon_iP_1^iP_1^i-\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2\varepsilon_i^{-1}I-\mu_iF_i^{\mathrm T}F_i-\mu_i^{-1}P_1^iE_iE_i^{\mathrm T}P_1^i-$$
$$\gamma_i^{-2}P_1^iB_iB_i^{\mathrm T}P_1^i-C_i^{\mathrm T}C_i+\beta_1^i(P_2^i-P_1^i)>0\tag{14}$$

$$-(A_2^i)^{\mathrm T}P_2^i-P_2^iA_2^i-\varepsilon_iP_2^iP_2^i-\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2\varepsilon_i^{-1}I-\mu_iF_i^{\mathrm T}F_i-\mu_i^{-1}P_2^iE_iE_i^{\mathrm T}P_2^i-$$
$$\gamma_i^{-2}P_2^iB_iB_i^{\mathrm T}P_2^i-C_i^{\mathrm T}C_i+\beta_2^i(P_1^i-P_2^i)>0\tag{15}$$

有对称正定解 $P_1^i,P_2^i(i=1,2,\cdots,N)$，则一定存在分散切换律 $\sigma_i(t):[0,+\infty)\to\{1,2\}$，使得系统(2)是渐近稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 $\gamma,\gamma=\mathrm{diag}\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N\}$.

证明. 选取 Lyapunov 函数为

$$V_1(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{N}V_1^i(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm T}P_1^i\boldsymbol{x}_i,\quad V_2(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{N}V_2^i(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm T}P_2^i\boldsymbol{x}_i\tag{16}$$

切换律设计如下：$\sigma_i(t)=\arg\max\{V_j^i(\boldsymbol{x}_i(t)),j=1,2\}$. 证明与定理 2 类似，略去.

注 2. 定理 4 的结果也可以推广到切换子系统的个数为有限的情形.

4 仿真实例

例. 考虑如系统(2)的不确定切换组合系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=\begin{bmatrix}\dot x_1^1\\ \dot x_2^1\end{bmatrix}=(A_{\sigma_1}^1+\Delta A_1)\boldsymbol{x}_1+B_1\boldsymbol{w}_1(t)+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sin(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{x}_2)\\ \cos(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}\tag{17a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=\begin{bmatrix}\dot x_1^2\\ \dot x_2^2\end{bmatrix}=(A_{\sigma_2}^2+\Delta A_2)\boldsymbol{x}_2+B_2\boldsymbol{w}_2(t)-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sin(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{x}_2)\\ \cos(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}\tag{17b}$$

上式中 $A^1_{\sigma_1}$ 有两个模型 $A^1_1=\mathrm{diag}\{3,-9\}$，$A^1_2=\mathrm{diag}\{-9,3\}$；$A^2_{\sigma_2}$ 有两个模型 $A^2_1=\mathrm{diag}\{1,-8\}$，$A^2_2=\mathrm{diag}\{-8,1\}$；$\Delta A_1$ 和 ΔA_2 中的各矩阵分别为 $E_1=\sqrt{0.1}I$，$F_1=E_2=\sqrt{2}E_1$，$F_2=2\sqrt{3}E_1$，$\Sigma_1=\mathrm{diag}\{\sin(t),\cos(t)\}$，$\Sigma_2=\mathrm{diag}\{\cos(t),\sin(t)\}$.

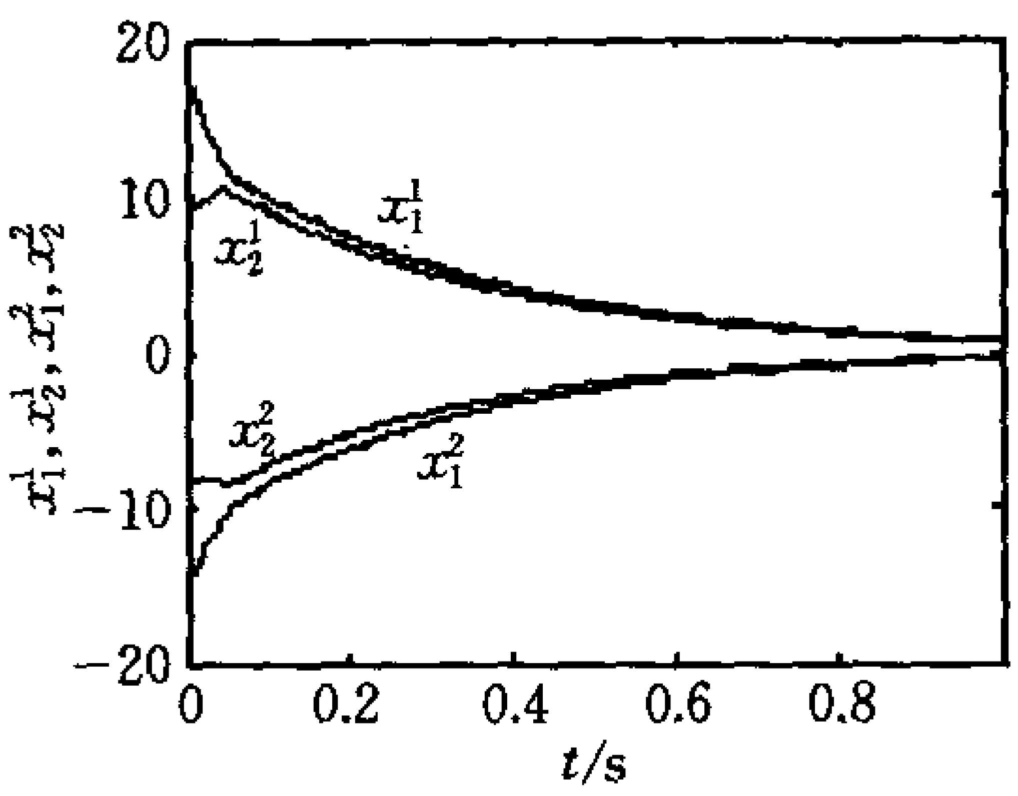

图 1 切换组合系统(17)在切换律(18)下的状态响应曲线

Fig. 1 The state response of the switched composite system (17) under the switching law (18)

在式(17a)和(17b)中各选一个子系统构成的组合系统都不是渐近稳定的. 而系统(17)满足定理 3 的条件，根据定理 3 可得 $\Omega^1_1=\{\boldsymbol{x}_1:9(x^1_1)^2-11(x^1_2)^2<0\}$，$\Omega^1_2=\{\boldsymbol{x}_1:-11(x^1_1)^2+9(x^1_2)^2<0\}$，$\Omega^2_1=\{\boldsymbol{x}_2:5(x^2_1)^2-7(x^2_2)^2<0\}$，$\Omega^2_2=\{\boldsymbol{x}_2:-7(x^2_1)^2+5(x^2_2)^2<0\}$. 显然 $\Omega^i_1\cup\Omega^i_2=R^2$，$i=1,2$. 分散切换律设计如下：

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(t)&=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}_1(t)\in\Omega^1_1\\ 2, & \boldsymbol{x}_1(t)\in\Omega^1_2\backslash\Omega^1_1\end{cases}\\
\sigma_2(t)&=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}_2(t)\in\Omega^2_1\\ 2, & \boldsymbol{x}_2(t)\in\Omega^2_2\backslash\Omega^2_1\end{cases}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

系统(17)的状态响应如图 1 所示.

5 结束语

本文研究了一类不确定切换组合系统具有 H_∞ 扰动衰减度的稳定性问题. 分别利用单、多 Lyapunov 函数技术，得到了这类系统渐近稳定且具有 H_∞ 扰动衰减度的两个充分条件. 获得的结果为利用分散混杂反馈控制策略研究一般的不确定组合系统具有 H_∞ 扰动衰减度的稳定性问题提供了理论基础. 仿真实例表明了结论的有效性.

References

1 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **AC-43**(4): 475～482

2 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59～70

3 de souza C E, Xie Li. An LMI approach to decentralized stabilization of interconnected time-delay systems. In: Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control. Phoenix, USA: Omnipress, 1999. 4700～4705

4 Sun H, Zhao J. Decentralized hybrid feedback stabilization for a class of switched composite systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(1): 149～153(in Chinese)

5 Zhao J, Spong M W. Hybrid Control for Global Stabilization of the Cart-Pendulum System. *Automatica*, 2001, **37**(12): 1941～1951

6 Fei S, Wang Z, Feng C. On the optimal design via the switching control strategy for a class of switching systems. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(2): 247～251(in Chinese)

聂 宏 1994 年获硕士学位. 现为东北大学博士生. 主要研究兴趣为非线性与切换系统、鲁棒控制.

(**NIE Hong** Received her master degree in 1994. She is a Ph. D. candidate in Northeastern University. Her research interests include nonlinear and switched systems, robust control.)

赵 军 1991 年获博士学位. 现为东北大学教授. 主要研究兴趣为混杂系统、非线性系统、几何控制理论，切换控制.

(**ZHAO Jun** Received his Ph. D. degree in 1991. He is a professor of Northeastern University. His research interests include nonlinear system, hybrid system, geometric control theory, switching control.)