第 30 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol.30, No.6
2004 年 11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 2004

基于部分状态信息的模糊控制器设计[1)]

刘华平[1,2] 孙富春[1,2] 孙增圻[1,2] 李春文[3]

[1](智能技术与系统国家重点实验室　北京　100084)
[2](清华大学计算机科学与技术系　北京　100084)
[3](清华大学自动化系　北京　100084)
(E-mail: lhp@s1000e.cs.tsinghua.edu.cn)

摘　要　基于部分状态信息的控制器是一类特殊的静态输出反馈控制器，一般难以利用线性矩阵不等式工具求解. 该文研究了 Takagi-Sugeno 模糊模型的部分状态反馈控制问题，设计问题可以归结为求解一组双线性矩阵不等式. 通过使控制器增益由全状态反馈变化为部分状态反馈，这类双线性矩阵不等式可以利用同伦算法求解. 从而，镇定模糊部分状态反馈控制器可以通过迭代方法得到. 仿真例子验证了算法的有效性.

关键词　模糊系统，部分状态反馈，双线性矩阵不等式
中图分类号　TP273.4

Design of Fuzzy Controller Based On Partial State Information

LIU Hua-Ping[1,2]　SUN Fu-Chun[1,2]　SUN Zeng-Qi[1,2]　LI Chun-Wen[3]

[1](*State Key Lab. of Intelligent Technology and Systems, Beijing*　100084)
[2](*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing*　100084)
[3](*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing*　100084)
(E-mail: lhp@s1000e.cs.tsinghua.edu.cn)

Abstract　Controller using partial state information belong to a class of static output feedback controllers, and is difficult to obtain by using linear matrix inequality. This paper considers a fuzzy partial-state-feedback controller design problem for the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems. The design problem can be reduced to a feasibility problem of a set of bilinear matrix inequalities (BMIs). The objective of this paper is to propose an algorithm for solving the resulting BMIs by using the idea of the homotopy method, where controller gains are deformed from the fuzzy full-state-feedback matrices to the fuzzy partial-state-feedback gains. Thus, the stabilizing fuzzy partial-state-feedback controller gains can be obtained via an iterative algorithm. The efficiency of the proposed algorithm is demonstrated by a simulation example.

Key words　Fuzzy systems, partial-state-feedback, bilinear matrix inequalities

1) 教育部全国优秀博士学位论文作者专项基金 (200041)、国家重点基础研究发展计划 (G2002cb312205)、国家自然科学基金关键技术研究项目 (90205008) 和国家自然科学基金 (60084002, 60174018) 资助
Supported by National Excellent Doctoral Dissertation Foundation (200041), National Key Project for Basic Research of P.R. China (G2002cb312205), Natural National Science Foundation for Key Technical Research of China (90205008) and National Natural Science Foundation of P.R. China (60084002, 60174018)
收稿日期 2003-09-09　收修改稿日期 2004-03-19
Received September 9, 2003; in revised form March 19, 2004

1 引言

近年来，针对 Takagi-Sugeno 模糊模型的模糊控制器设计已得到广泛关注[1]，考虑到实际控制过程中通常并不是所有变量都不可观测[2~4]，如何仅仅利用可观测的状态变量构造部分状态反馈控制器是一个非常有趣的问题. 另一方面，即使系统所有状态变量均可测量，只利用部分状态变量设计反馈控制器也可以节省传感器的数量，在实际过程有重要意义. 但非线性系统部分状态反馈控制器设计的问题，由于其理论上的困难性，迄今为止并没有得到完整的解决.

本文研究了针对 Takagi-Sugeno 模糊模型的部分状态反馈控制问题，该问题可以归结为一组双线性矩阵不等式 (BMIs)，虽然得到这组 BMIs 并不困难，但 BMIs 的求解一直是理论上的难题. 进一步采用同伦 (Homotopy) 思想[5~6] 迭代求解该 BMIs，具体步骤是，以全状态反馈控制器作为初始解，通过同伦路径逐渐过渡到待解的 BMIs，从而最终获得模糊部分状态反馈控制器.

2 预备知识

考虑的 Takagi-Sugeno 模糊模型具有如下规则:

$$\begin{aligned}&\text{Plant rule } i: \text{If}\quad \xi_1(t) \text{ is } F_{i1} \text{ and}\cdots\cdots\text{and } \xi_g(t) \text{ is } F_{ig}\\&\qquad\text{Then}\quad \dot{x}(t)=A_i x(t)+B_i u(t),\quad i=1,2,\cdots,r\end{aligned}\tag{1}$$

这里 $x(t)\in R^n$ 为状态变量，假设 $x(t)=[x_1(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$; $u(t)\in R^p$ 为控制变量; $F_{i,j}(j=1,2,\dots,g)$ 为模糊集合; r 为规则数; $\xi_1(t),\dots,\xi_g(t)$ 为精确变量.

给定 $[x(t),u(t)]$，利用标准的模糊推理方法 —— 单点模糊化、乘积推理和加权平均清晰化，整个模糊系统可表达为

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i[\xi(t)]\{A_i x(t)+B_i u(t)\}\tag{2}$$

其中 $\mu_i(\xi(t))=w_i(\xi(t))/\sum_{i=1}^{r}w_i(\xi(t)), w_i(\xi(t))=\prod_{j=1}^{g}F_{i,j}(\xi_j(t))$.

采用并行分布式补偿 (PDC) 方法，控制器具有如下规则:

$$\begin{aligned}&\text{Controller rule } i: \text{If}\quad \xi_1(t) \text{ is } F_{i1} \text{ and } \dots\dots \text{ and } \xi_g(t) \text{ is } F_{ig}\\&\qquad\text{Then}\quad u(t)=K_i x(t),\quad i=1,2,\cdots,r\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $K_i\in R^{p\times n}$ 为局部反馈控制增益矩阵. 则闭环系统为

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i^2\{(A_i+B_iK_i)x(t)\}+\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{r}\mu_i\mu_j\{(A_i+B_iK_j+A_j+B_jK_i)x(t)\}\tag{4}$$

引理 1[1]. 如果存在公共矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$，满足

$$F_{ii}\equiv(A_i+B_iK_i)^{\mathrm{T}}P+P(A_i+B_iK_i)<0,\quad i=1,2,\cdots,r\tag{5a}$$

$$F_{ij} \equiv (A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i)^{\mathrm{T}} P + P(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) < 0,$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, r(i < j) \tag{5b}$$

则闭环系统 (4) 渐近稳定.

显然，直接求解式 (5) 是困难的，但采用一些标准技术，可以将其化为等价的 LMIs. 可参见文献 [1].

3 部分状态反馈控制器设计

根据特定的问题可以定义如下集合:

W=$\{i|i$ 为 1 到 n 之间的正整数且状态变量 $x_i(t)$ 不可用于反馈 $\}$,

V=$\{K|K \in R^{p\times n}$, 且 K 的第 i 列为全零列, $i \in W\}$,

则部分状态反馈控制器设计可归结为如下问题:

在条件 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ 以及 $K_i \in V$ 的约束下求解关于未知变量 P, K_i 的 BMIs(5).

为叙述方便，可将 BMIs(5) 统一表达为

$$F(K_1, K_2, \cdots, K_r, P) < 0,\ P = P^{\mathrm{T}} > 0,\ K_i \in V \tag{6}$$

考虑到结构限制 $K_i \in V$, 不能再将式 (6) 化为 LMIs 求解. 因而式 (6) 本质上是一组带约束条件的 BMIs.

引入参变量 $\lambda \in [0,1]$, 考虑矩阵函数

$$L\{K_1, \cdots, K_r, P, \lambda\} = F\{(1-\lambda)K_{10} + \lambda K_1, \cdots, (1-\lambda)K_{r0} + \lambda K_r, P\} \tag{7}$$

其中 $K_{i0} \in R^{p\times n}$ 为全状态反馈增益，可由常规方法解得，而 $K_i \in V$ 为待解的部分状态反馈增益. 因而 $(1-\lambda)K_{i0} + \lambda K_i$ 定义了自全状态反馈增益 K_{i0} 到具有指定结构的部分状态反馈增益 K_i 之间的一条同伦路径，同时定义了一组问题

$$L\{K_1, \cdots, K_r, P, \lambda\} < 0,\ \lambda \in [0,1] \tag{8}$$

为执行同伦算法,需要首先求解对应 λ=0 的初始问题,显然, $L\{K_1, \cdots, K_r, P, \lambda\}|_{\lambda=0} < 0$, 即 $F(K_{10}, K_{20}, \cdots K_{r0}, P) < 0$, 可以将其化为等价的LMIs, 从而得到初始解 $(\hat{K}_{10}, \cdots, \hat{K}_{r0}, \hat{P}_0)$. 接下来, 可以建立一条联接 $(\hat{K}_{10}, \cdots, \hat{K}_{r0}, \hat{P}_0)$ (对应 $\lambda = 0$ 的解) 到 $(\hat{K}_1, \cdots, \hat{K}_r, \hat{P})$(对应 $\lambda = 1$ 的解) 的同伦路径. 取正整数 N 并考虑区间上的 $(N+1)$ 个点 $\lambda_k = k/N, k = 0, 1, 2, \cdots, N$, 可以得到一组问题簇

$$L\{K_1, \cdots, K_r, P, \lambda_k\} < 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

假如对应 λ_k 的问题可解，记该组解为 $(\hat{K}_{1k}, \cdots, \hat{K}_{rk}, \hat{P}_k)$. 迭代思想的本质是，一旦问题 $L\{K_1, \cdots, K_r, P, \lambda_k\} < 0$ 有解 $(\hat{K}_{1k}, \cdots, \hat{K}_{rk}, \hat{P}_k)$, 则可进一步求解问题

$$L\{K_1, \cdots, K_r, P, \lambda_{k+1}\} < 0 \tag{10}$$

式 (10) 仍然是关于 P 和 K_i 的 BMIs, 如果在式 (10) 中固定 $K_1 = \hat{K}_{1k}, \cdots, K_r = \hat{K}_{rk}$, 则式 (10) 成为关于 P 的 LMIs; 同样，如果在式 (10) 中固定 $P = \hat{P}_k$, 则式 (10) 成为关

于 $K_1,\cdots,K_r$ 的 LMIs. 这两种情况均可利用 LMI 工具方便地求解. 因而可以通过固定 $K_1=\hat{K}_{1k},\cdots,K_r=\hat{K}_{rk}$ 或 $P=\hat{P}_k$ 求解新问题 (10).

如果对应于 $K=0,1,2,\cdots,N$ 问题 (9) 均有解，则当 $k=N(i.e. \lambda=1)$ 时原问题很自然地得到了可行解；否则，可以增大 N, 并重复上述过程. 值得指出的是，同伦算法只能获得局部最优解，而不是一种全局收敛算法. 因而算法的收敛性和有效性与初始解的设置密切相关. 利用一组全状态反馈增益作为初始解，实际计算表明，在计算作为初始解的全状态反馈增益时，采用极小化 $trace\ P$ 的方法得到的解能获得较好的收敛性. 此外，应该设置一个上限 $N_{\max}$, 当 $N>N_{\max}$ 时说明算法求解失败.

4 仿真例子

考虑一个两规则模糊系统，其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1.96&0&-0.4&-0.6\\0&0&0&10\\19.6&0&-24&-36\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-0.4&-0.6\\0&0&0&10\\0&0&-24&-36\end{bmatrix},\ B_1=B_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-10\end{bmatrix},$$

隶属函数分别为 $\mu_1(x_1(t))=\begin{cases}\sin(x_1(t))/x_1(t), & x_1(t)\neq 0,\\ 1, & x_1(t)=0,\end{cases}$ $\mu_2(x_1(t))=1-\mu_1(x_1(t))$.

假设仅有变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 可用于反馈，即控制增益具有 $K_i=[*\ *\ 0\ 0]$ 的形式，其中“$*$”表示该元素无限制. 利用本文算法，可以得到部分状态反馈增益为

$$K_1=[-13.1214\quad -12.6686\quad 0\quad 0],\quad K_2=[-13.4407\quad -12.6438\quad 0\quad 0]$$

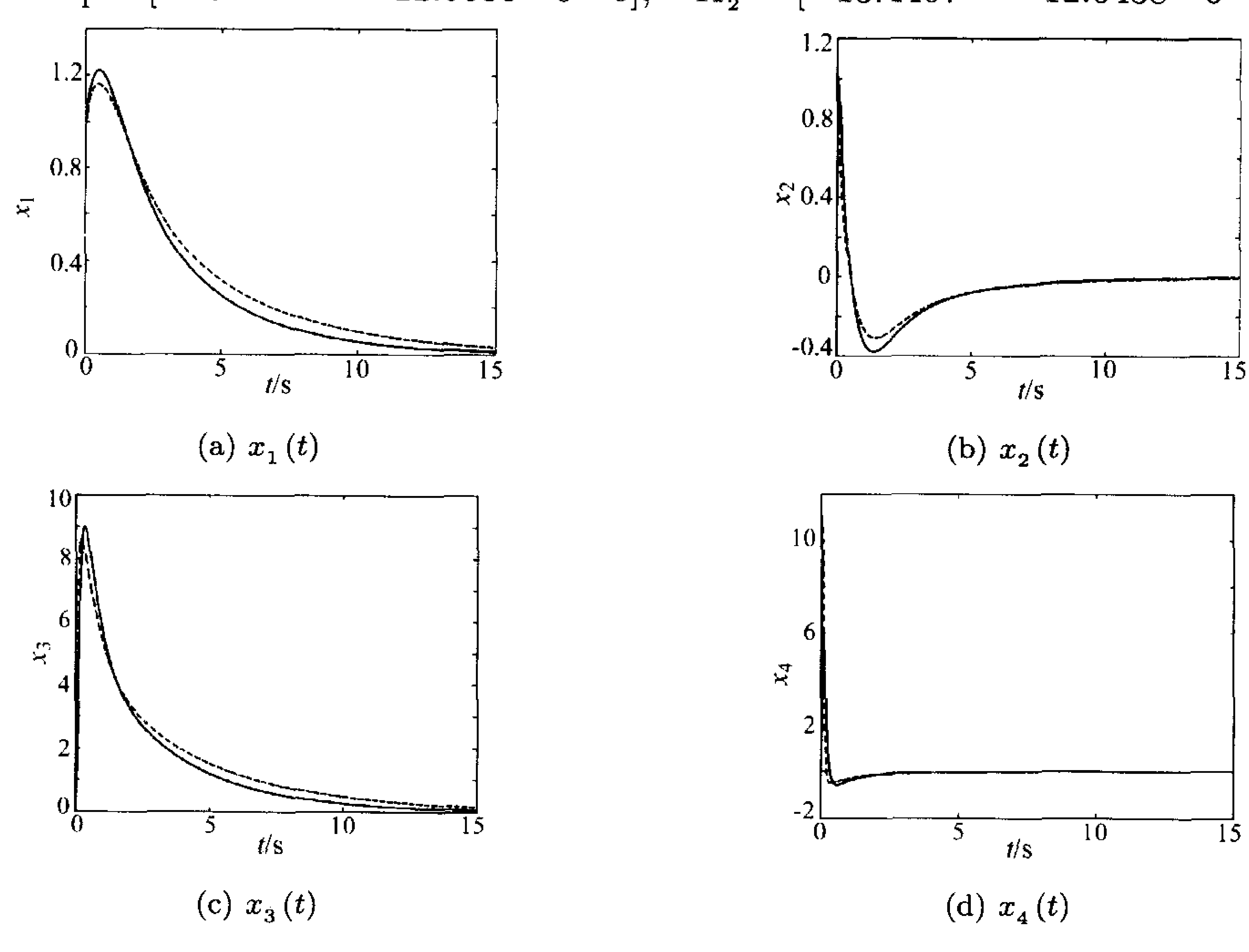

图 1 闭环响应

Fig. 1 Close-loop responses

采用部分状态反馈控制器，在系统初值为 $x(0) = [1\ 1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ 时的闭环响应见图 1, 其中实线代表部分状态反馈，虚线代表全状态反馈．由仿真结果可以看出系统在仅使用两个状态变量反馈的情况下可以获得相当满意的镇定性能．

5 结论

考虑了基于 Takagi-Sugeno 模糊模型的部分状态反馈控制器设计问题，利用同伦算法迭代求解 BMIs 可以得到镇定的部分状态反馈控制器增益矩阵．在实际工业过程中，利用部分状态设计反馈控制器既能解决部分状态不可测量的问题，又避免了使用模糊观测器或模糊动态反馈控制器所导致的闭环系统维数升高的现象．同时采用部分状态反馈控制器也可节省传感器的数量，减小了因传感器失效产生的影响．这些优点对于大规模系统具有重要的意义．另一方面，部分状态反馈控制器设计的许多理论问题还远远没有完全解决，利用部分状态反馈设计 H^{∞} 模糊控制器，并比较部分状态反馈与全状态反馈的性能差异将是我们下一阶段的工作．进一步，提出的方法对于研究模糊系统静态输出反馈等问题也具有重要的启发意义．

References

1 H O Wang, K Tanaka, M F Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1): 14~23

2 X D Liu, Q L Zhang. Observer-based H_{∞} controller designs for T-S fuzzy systems. *Acta Automatioca Sinica*, 2003, **29**(1): 45~53 (in chinese)

3 B S Chen, C S Tseng, H J Uang. Mixed H_2/H_{∞} fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(3): 249~265

4 J Li, H O Wang, D Niemann, K Tanaka. Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems: An LMI approach. *Information Sciences*, 2000, **123**(3-4): 201~221

5 G S Zhai, M Ikeda, Y Fujisaki. Decentralized H_{∞} controller design: A matrix inequality approach using a homotopy method. *Automatica*, 2001, **37**: 565~572

6 E L Allgower, K Georg, *Numerical continuation methods: An introduction*. New York: Springer-Verlag, 1990

刘华平 2004 年 1 月在清华大学获博士学位，主要研究方向为模糊系统与矩阵不等式．

(**LIU Hua-Ping** Received Ph.D degree in January, 2004. His research interests include fuzzy systems and matrix inequality.)

孙富春 清华大学计算机科学与技术系教授，主要研究方向为神经模糊系统与机器人．

(**SUN Fu-Chun** Professor of Department of Computer Sciences and Technology, Tsinghua University. His research interests include neuro-fuzzy systems and robots.)

孙增圻 清华大学计算机科学与技术系教授，主要研究方向为智能控制与机器人．

(**SUN Zeng-Qi** Professor of Department of Computer Sciences and Technology, Tsinghua University. His research interests include intelligent control and robots.)

李春文 清华大学自动化系教授，主要研究方向为非线性系统分析与控制．

(**LI Chun-Wen** Professor of Department of Automation, Tsinghua University. His research interests include analysis and control of nonlinear systems.)