第 30 卷 第 4 期
2004 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4
July, 2004

非线性系统降维观测器设计[1)]

朱芳来[1] 韩正之[2]

[1](桂林电子工业学院计算机系 桂林 541004)
[2](上海交通大学电子信息学院 上海 200030)
(E-mail: flzhu816@263.net)

摘 要 对 Lipschitz 非线性系统降维观测器进行了讨论. 首先考虑了降维观测器存在之条件, 然后给出了此条件下的降维观测器的具体设计方法, 该设计方法基于与非线性函数的 Lipschitz 常数有关的代数 Riccati 不等式的求解. 最后, 针对一个具体实际控制模型的仿真, 验证了文中所提出之方法的实用性.

关键词 降维观测器, Riccati 方程, Lipschitz 条件, 非线性
中图分类号 TP13

The Design of Reduced-Order Observers for Lipschitz Nonlinear Systems

ZHU Fang-Lai[1] HAN Zheng-Zhi[2]

[1](*Computer Department of Guilin University of Electronic Technology, Guilin* 541004)
[2](*College of Electronics and Information, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
(E-mail: flzhu816@263.net)

Abstract The issues related to the reduced-order observers for Lipschitz nonlinear systems are discussed. First, the existence condition for the reduced-order observer is considered. Secondly, a design method of the reduced-order observer under this existence condition is developed. The design method is based on the solution of algebraic Riccati equation related to the Lipschitz constant of the nonlinear part of the system. Finally, the proposed observer is applied to an actual control system and simulation results show that the design approach given by this paper is viable.

Key words Reduced-order observer, Riccati equation, Lipschitz conditions, nonlinearity

1 引言

状态反馈是控制系统中各种综合问题如极点配置、镇定、解耦控制、无静差跟踪以及二次型最优控制得以实现的主要手段之一, 状态反馈的前提是系统状态已知. 但是, 在实际应

1) 广西区自然科学基金(0310003 桂科自 0339069)资助
Supported by the Nature Science Foundation of Guangxi Province of P. R. China(0339069)
收稿日期 2002-08-12 收修改稿日期 2003-05-14
Received August 12, 2002; in revised form May 14, 2003

用中,很多情况下状态是不易直接量测的.因而对状态观测器的研究具有一定的理论意义和应用价值.

对线性系统而言,著明的 Kalman 滤波器和 Luenberger 观测器为该领域研究提供了较为完善的答案.非线性系统观测器设计问题,情况并非如此.自 20 世纪 80 年代至今,非线性系统观测器设计问题,一直是众多学者所关注的研究课题并已提出了众多的设计方法,各类方法通常可进行如下的分类:扩展的 Kalman 滤波器方法[1~3],坐标变换法(标准型方法,线性化方法)[4~7],类 Lyapunov 方法[8,9]等.对具有输出延时的非线性系统进行观测器设计,是近期被讨论的一种设计方法[10].近几年,智能控制的一些方法和手段被引用到非线性系统观测器设计之中.如对模糊控制系统与模糊观测器的研究[11],基于神经网络的非线性系统观测器设计方法[12]等.

与线性系统一样,非线性系统观测器按结构可分为全维观测器和降维观测器.纵观众多文献,对非线性系统降维观测器的研究要少得多.Besancon 总结非线性系统自适应观测器设计方法时,涉及到降维观测器,但不具体[9].事实上,在非线性系统领域,降维观测器存在性问题及其设计方法有待进一步讨论.本文对降维观测器的存在性进行了讨论,并基于 Riccati 方程的解,提出了一种降维观测器设计方法.

2 相关引理

对于给定的矩阵 $A,R,Q\in N^{n\times n}$,其中 R,Q 均为正定矩阵,构造

$$H=\begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

下面的引理给出一个代数 Riccati 不等式有正定解的一个充分性条件.

引理 1. 如果 A 为稳定矩阵且式(1)中的矩阵 H 没有在虚轴上的特征值,则如下的代数 Riccati 不等式有正定矩阵解 P

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+PRP+Q<0$$

证明. 由于 R,Q 为正定矩阵,故存在可逆矩阵 $B,E\in N^{n\times n}$ 使得 $R=BB^{\mathrm{T}}$ 和 $Q=E^{\mathrm{T}}E$ 结合文献[13]的定理 2.2.5 和定理 2.4.1 就可得出结论. 证毕.

引理 2[8]. 对正实数 γ,如果增益矩阵 L 使可观测对(A,C)的极点配置到满足不等式

$$0<\gamma<\frac{\min\limits_{\lambda\in\lambda(A-LC)}|\mathrm{Re}(\lambda)|}{con(V)} \tag{2}$$

其中 $con(V)$表示 V 的条件数,而 V 是把 $A-LC$ 化成对角矩阵或约当矩阵 Λ 的可逆矩阵.那末,存在 $\varepsilon>0$,使如下的代数 Riccati 不等式有正定矩阵解 P

$$(A-LC)^{\mathrm{T}}P+P(A-LC)+\gamma^2PP+I+\varepsilon I<0 \tag{3}$$

证明. 记 $\lambda_k=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k(k=1,2,\cdots,n)$为 $A-LC$ 的所有特征值,则 $\forall\omega\in N$,有

$$\sigma_{\min}(\mathrm{j}\omega I-\Lambda)=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\sqrt{\alpha_k^2+(\omega-\beta_k)^2}$$

于是由式(2)得

$$\gamma<\frac{1}{con(V)}\min_{\lambda\in\lambda(A-LC)}|\mathrm{Re}(\lambda)|=\frac{1}{\sigma_{\max}(V)\sigma_{\max}(V^{-1})}\min_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|\leqslant$$

$$\sigma_{\min}(V)\sigma_{\min}(V^{-1})\min_{\omega\in\boldsymbol{R}}\min_{1\leqslant k\leqslant n}\sqrt{\alpha_k^2+(\omega-\beta_k)^2}=$$

$$\sigma_{\min}(V)\sigma_{\min}(V^{-1})\min_{\omega\in\boldsymbol{R}}\sigma_{\min}(\mathrm{j}\omega I-\Lambda)=$$

$$\min_{\omega\in\boldsymbol{R}}\sigma_{\min}(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))$$

于是

$$(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))^*(\mathrm{j}\omega-(A-LC))\geqslant[\min_{\omega\in R}\sigma_{\min}(\mathrm{j}\omega-(A-LC))]^2I>\gamma^2I$$

这样，就存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))^*(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))>\gamma^2(1+\varepsilon)I,\quad\forall\omega\in N$$

因而

$$\det[(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))^*(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))-\varepsilon\gamma^2I-\gamma^2I]>0,\quad\forall\omega\in N\tag{4}$$

而对

$$H=\begin{bmatrix}A-LC & \gamma^2I\\ -I-\varepsilon I & -(A-LC)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{5}$$

易知

$$\det(\lambda I-H)=\det[(\lambda I+(A-LC)^{\mathrm{T}})(\lambda I-(A-LC))+\varepsilon\gamma^2I+\gamma^2I]$$

于是对任意的 $\omega\in N$，并考虑到式(4)知

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{j}\omega I-H)=&\det[(\mathrm{j}\omega I+(A-LC)^{\mathrm{T}})(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))+\varepsilon\gamma^2I+\gamma^2I]=\\&\det[-(\mathrm{j}\omega-(A-LC))^*(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))+\varepsilon\gamma^2I+\gamma^2I]=\\&(-1)^n\det[(\mathrm{j}\omega-(A-LC))^*(\mathrm{j}\omega I-(A-LC))-\varepsilon\gamma^2I-\gamma^2I]\neq 0\end{aligned}$$

即由式(5)所确定的矩阵 H 没有在虚轴上的特征值，由引理 1 知式(3)有正定解 P.　证毕.

本文主要考虑如下所描述的非线性对象

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\tag{6a}$$

$$\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}\tag{6b}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{u}\in R^m,\boldsymbol{y}\in R^p,\boldsymbol{f}:R^+\times R^m\times R^n\to R^n$, $C\in R^{p\times n}$ 且 (AC) 可观测. 而 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$ 为全局 Lipschitz 函数，即存在正整数 γ 使下式成立

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_2)\|\leqslant\gamma\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|,\quad\forall t\in R^+,\boldsymbol{u}\in R^m,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in R^n\tag{6c}$$

γ 称为 Lipschitz 常数.

3　降维观测器的设计

以下基于对 Riccati 不等式的求解，给出系统(6)一个降维观测器的设计方法. 由 Smith 正交化，知存在可逆矩阵 $S\in M(p,p)$ 使 $C=S\hat{C}$，其中 $\hat{C}\in M(p,n)$ 且 $\hat{C}\hat{C}^{\mathrm{T}}=I_p$. 通过输出等价变换 $\boldsymbol{\omega}=S^{-1}\boldsymbol{y}=\hat{C}\boldsymbol{x}$，系统(6)等价于

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\tag{7a}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\hat{C}\boldsymbol{x}\tag{7b}$$

现扩展矩阵 $\hat{C}$ 使之成为 $n\times n$ 正交矩阵 $W=\begin{pmatrix}\hat{C}^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. 通过等价变换 $\bar{\boldsymbol{x}}=W\boldsymbol{x}$，原系统(6)与如下系统等价

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + Wf(t,u,W^{-1}\bar{x}) \tag{8a}$$

$$\omega = \bar{C}\bar{x} \tag{8b}$$

其中 $\bar{A}=WAW^{-1}$,$\bar{C}=\hat{C}W^{-1}=(I_p\quad 0)$.

引理 3. 如果存在 L 使 Riccati 不等式 (3) 具有正定对称矩阵解 P，则如下的 Riccati 不等式有正定对称矩阵解 $\bar{P}=W^{-\mathrm{T}}PW^{-1}$

$$(\bar{A}-\bar{L}\bar{C})^{\mathrm{T}}\bar{P}+\bar{P}(\bar{A}-\bar{L}\bar{C})+\gamma^2\bar{P}\bar{P}+I+\varepsilon I<0 \tag{9}$$

其中 $\bar{L}=WLS$.

直接代入验证即可证明以上引理. 对 $\bar{A}$,$\bar{P}$ 进行如下矩阵分块

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \bar{P}=\begin{bmatrix}\bar{P}_1 & \bar{P}_2\\ \bar{P}_2^{\mathrm{T}} & \bar{P}_3\end{bmatrix}$$

其中 $\bar{A}_{11}$,$\bar{P}_1\in R^{p\times p}$. 再记

$$K=\bar{P}_3^{-1}\bar{P}_2^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

由以下的讨论将看到,式(10)给出的 K 是将要讨论的降维观测器的增益矩阵,它取决于 Riccati 不等式(3)的解. 下面的定理给出了本文的主要结论,说明在引理 2 的条件下,存在降维观测器,并给出了降维观测器的具体形式.

定理 1. 在引理 2 的条件下,系统(6)具有$(n-p)$降维观测器

$$\begin{cases}\hat{\bar{x}}_1=\hat{z}_1=S^{-1}y\\ \dot{\hat{z}}_2=(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})\hat{z}_2+[K(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}K)+\bar{A}_{21}-\bar{A}_{22}K]S^{-1}y+\\ \qquad (K\hat{C}+D)f(t,u,(S^{-1}C-D^{\mathrm{T}}K)S^{-1}y+D^{\mathrm{T}}\hat{z}_2)\\ \hat{\bar{x}}_2=\hat{z}_2-KS^{-1}y\end{cases} \tag{11}$$

证明. 对系统(8)作可逆变换 $z=T\bar{x}=TWx$,其中 $T=\begin{bmatrix}I_P & 0\\ K & I_{n-p}\end{bmatrix}$,则系统(8)与如下系统等价,因而系统(6)也与之等价

$$\begin{cases}\dot{z}_2=(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})z_2+[K(\bar{A}_{11}-\bar{A}_{12}K)+\bar{A}_{21}-\bar{A}_{22}K]S^{-1}y+\\ \qquad (K\hat{C}+D)f(t,u,(S^{-1}C-D^{\mathrm{T}}K)S^{-1}y+D^{\mathrm{T}}z_2)\\ y=Sz_1\end{cases} \tag{12}$$

观测器(11)与(12)的误差方程为

$$\dot{\tilde{z}}_2=(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})\tilde{z}_2+(K\hat{C}+D)\tilde{f} \tag{13}$$

其中$\tilde{z}_2=z_2-\hat{z}_2$及

$$\tilde{f}=f(t,u,(S^{-1}C-D^{\mathrm{T}}K)S^{-1}y+D^{\mathrm{T}}z_2)-f(t,u,(S^{-1}C-D^{\mathrm{T}}K)S^{-1}y+D^{\mathrm{T}}\hat{z}_2)$$

取 Lyapunov 函数 $V=\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}\bar{P}_3\tilde{z}_2$,该 Lyapunov 函数沿着误差方程(13)的微分为

$$\dot{V}=\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}[(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})^{\mathrm{T}}\bar{P}_3+\bar{P}_3(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})]\tilde{z}_2+2\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}\bar{P}_3(K\hat{C}+D)\tilde{f}$$

而

$$2\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}\bar{P}_3(K\hat{C}+D)\tilde{f}\leqslant 2|\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}\bar{P}_3(K\hat{C}+D)\tilde{f}|\leqslant 2\|(K\hat{C}+D)^{\mathrm{T}}\bar{P}_3\tilde{z}_2\|\cdot\|\tilde{f}\|\leqslant$$
$$2\gamma\|(K\hat{C}+D)^{\mathrm{T}}\bar{P}_3\tilde{z}_2\|\cdot\|D^{\mathrm{T}}\tilde{z}_2\|\leqslant\gamma^2(\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}\bar{P}_3\hat{K}\bar{P}_3\tilde{z}_2)+(\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}\tilde{z}_2)$$

考虑到 W 为正交矩阵，知$\hat{C}\hat{C}^{\mathrm{T}}=I, DD^{\mathrm{T}}=I_{n-p}, \hat{C}^{\mathrm{T}}D=0, \Rightarrow \hat{K}=KK^{\mathrm{T}}+I_{n-p}$，于是

$$\dot{V} \leqslant \tilde{z}_2^{\mathrm{T}}[(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})^{\mathrm{T}}\bar{P}_3+\bar{P}_3(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})]\tilde{z}_2+\gamma^2\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}\bar{P}_3\hat{K}\bar{P}_3\tilde{z}_2+\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}\tilde{z}_2 =$$
$$\tilde{z}_2^{\mathrm{T}}[(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})^{\mathrm{T}}\bar{P}_3+\bar{P}_3(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})+\gamma^2\bar{P}_3(KK^{\mathrm{T}}+I_{n-p})\bar{P}_3+I_{n-p}]\tilde{z}_2 \tag{14}$$

在引理 2 的条件下有引理 3 的结论，对式(9)按分块矩阵展开并由第二行第二列的分块得

$$\bar{P}_3(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})+(\bar{A}_{22}+K\bar{A}_{12})^{\mathrm{T}}\bar{P}_3+\gamma^2\bar{P}_3(KK^{\mathrm{T}}+I_{n-p})\bar{P}_3+I_{n-p}<0 \tag{15}$$

因而由式(14)和(15)知 $\dot{V}<0$，推知 $\tilde{z}(t)\to 0$，$t\to\infty$，即式(11)组成系统(6)的一个$(n-p)$维降维观测器.　　证毕.

4　仿真分析

本节通过一个仿真例来进一步说明该方法的可行性. 该例取自一个实际控制对象——具有外卷连接点的单连接操纵杆，外卷连接点由 DC 发动机所驱动. 该系统经建模后为非线性系统，具有如下形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -48.6 & -1.26 & 48.6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10\\ 1.95 & 0 & -1.95 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -0.333\sin(\boldsymbol{x}_1)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}0\\ 21.6\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

于是对本例，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$且 $\gamma=0.333$. 对该 L-常数，存在 $\varepsilon=1.25$ 及 $L=\begin{pmatrix}0.8307 & 0.4514 & 0.8238 & 0.0706\\ 0.4514 & 6.2310 & 1.3072 & 0.2574\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，使 Riccati 方程(3)有正定解

$$P=\begin{bmatrix}4.0305 & 0.088238 & -2.744 & 1.8167\\ 0.088238 & 0.088268 & -0.049158 & -0.017454\\ -2.744 & -0.049158 & 2.7519 & -0.53124\\ 1.8167 & -0.17454 & -0.53124 & 9.1205\end{bmatrix} \Rightarrow K=\begin{pmatrix}-0.96958 & -0.021803\\ 0.14271 & -0.020407\end{pmatrix}$$

图 1 为仿真结果，限于篇幅，只给出状态 x_4 的仿真图. 从仿真图分析，观测结果较为满意(仿真输入是 $\cos t$，初值为 $x_4(0)=4, \hat{x}_4(0)=4.5$).

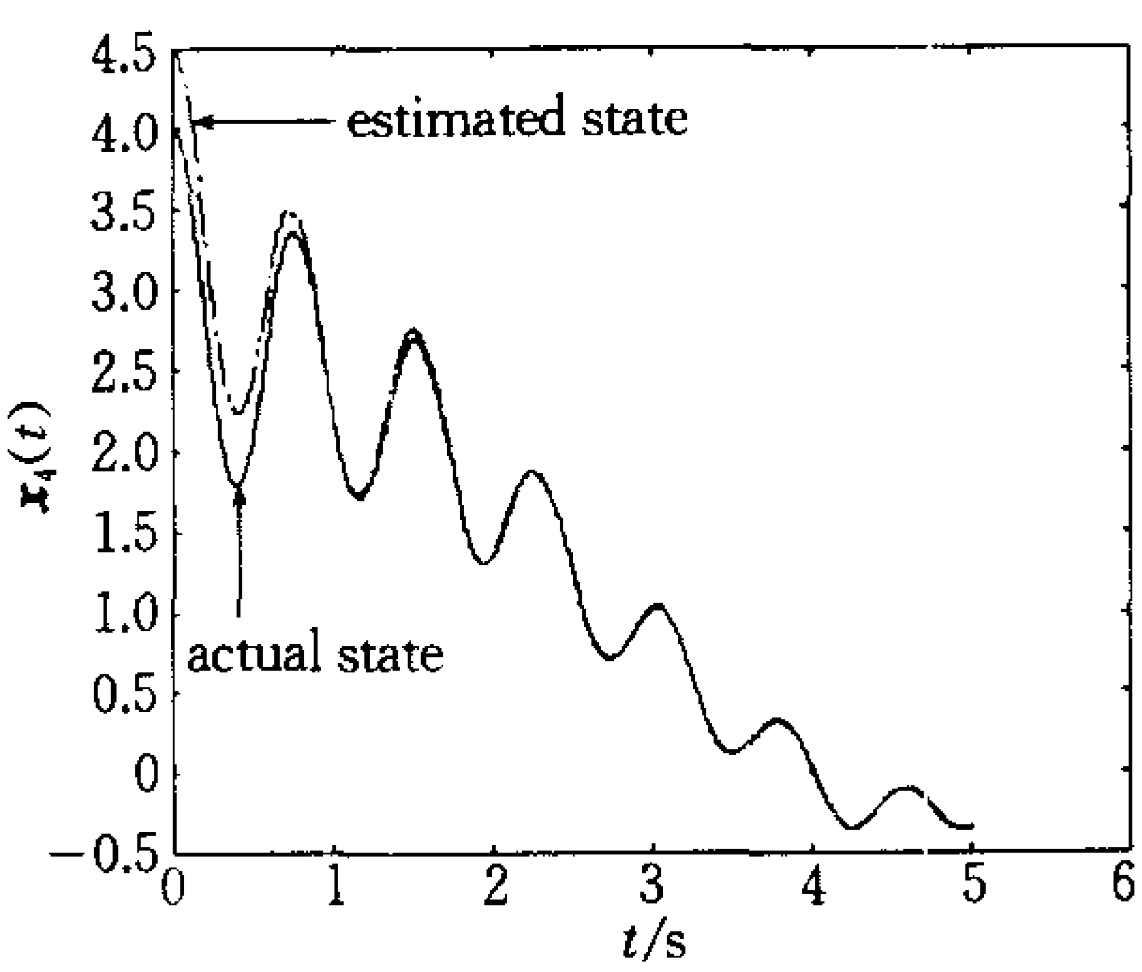

图 1　状态 x_4 的仿真图

Fig. 1　The simulation figure for state x_4

5 结论

本文对具有线性部分,非线性部分满足 Lipschitz 条件的非线性系统(6)的降维观测器问题进行了讨论.给出了降维观测器的存在条件.该条件说明可进行降维观测器设计的充分性条件不仅仅是与线性部分的系数矩阵的极点配置有关,还与极点配置后的矩阵 $A-LC$ 的特征向量有关.给出了降维观测器的具体设计方法.该设计方法基于代数 Riccati 方程(3)的解.具体实例仿真结果表明,本文所给出的方法其状态观测效果较为满意.

References

1 Reif K, Sonnemann F, Unbehauen R. Nonlinear state observation using H_∞-filtering Riccati design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(1): 203～208

2 Oisiovici R M, Cruz S L. State estimation of batch distillation columns using an extended Kalman filter. *Chemical Engineering Science*, 2000, **55**: 4667～4680

3 Porru G, Aragoness C, Baratti R, Servida A. Monitoring of a CO oxidation reactor through a grey model-based EKF observer. *Chemical Engineering Science*, 2000, **55**: 331～338

4 Hou M, Pugh A C. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Systems & Control Letters*, 1999, **37**: 1～9

5 Xia X, Gao W. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1989, **27**(1): 199～216

6 Bestle D, Zeitz M. Canonical form observer design for nonlinear time variable systems. *International Journal Control*, 1983, **38**(2): 419～431

7 Krener A J, Xiao M. Observers for linearly unobservable nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2002, **46**: 281～288

8 Rajamani R. Observer for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(3): 397～401

9 Besancon G. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 2000, **41**: 271～280

10 Germani A, Manes C, Pepe P. A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(1): 96～101

11 Xiao M, Jun, Zeng-Qi S. Analysis and design of fuzzy reduced-dimensional observer and fuzzy functional observer. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **120**: 35～63

12 Young H K, Frank L L, Chaouki T A. Dynamic recurrent neural-network-based adaptive observer for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 1997, **33**(8): 1539～1543

13 Shen Tie-Long. H_∞ Control Theory and Its Application. Beijing: Qinghua University Publishing Company, 1996(in Chinese)

朱芳来 2001 于上海交通大学电信学院获得控制理论与控制工程专业博士学位,现为桂林电子工业学院计算机系副教授.主要研究方向为非线性系统状态观测与状态反馈设计、智能控制等.

(**ZHU Fang-Lai** Received his Ph. D. degree in the filed of Control Theory and Control engineering from Shanghai Jiaotong University in 2001. He is currently an associate professor at the computer department of Guilin University of Electronic and Technology. His current research interests include the state observer and state feedback for nonlinear systems and intelligent control.)

韩正之 简介见本刊第 28 卷第 6 期.

(**HAN Zheng-Zhi** Professor of Shanghai Jiaotong University. His research interests include nonlinear systems control, intelligent control, etc.)