第 30 卷 第 4 期
2004 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4
July, 2004

非线性不确定状态时滞系统的鲁棒 H_∞ 滤波[1)]

蔡云泽 何 星 许晓鸣 张卫东
(上海交通大学自动化系 上海 200030)
(E-mail: yzcai@sjtu.edu.cn)

摘 要 研究含有状态时滞的非线性不确定性系统的鲁棒 H_∞ 滤波器设计问题,其中系统的参数不确定性是时变和模有界的,非线性的扰动受有界条件约束.针对连续系统和离散系统两种情况,分别选取合适的 Lyapunov 函数分析了使滤波系统渐近稳定,且从噪声输入到误差输出的传递函数的 H_∞ 范数小于指定上界的充分条件,然后通过两个代数 Riccati 方程的正定解参数化表示了该滤波器.滤波器的设计过程和结构均是与状态时滞的大小、非线性扰动以及不确定性参数无关的.

关键词 非线性系统,参数不确定性,时滞,Riccati 方程
中图分类号 TP13

Robust H_∞ Filter Design of a Class of Nonlinear Systems with State Delay and Parameter Uncertainty

CAI Yun-Ze HE Xing XU Xiao-Ming ZHANG Wei-Dong
(*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
(E-mail: yzcai@sjtu.edu.cn)

Abstract The problem of robust H_∞ filtering for nonlinear systems with state delay and parameter uncertainty is investigated in this paper. The parameter uncertainties are described in the real time-varying norm-bounded form with nonlinear disturbances meeting the boundedness condition. For continuous and discrete-time cases, appropriate Lyapunov functions are used to analyze the sufficient condition of the existence of the robust filter such that the filtering process remains robustly stable and a prescribed H_∞ performance level is achieved. Then the filter is characterized in the terms of positive solutions of two algebraic Riccati-like equations, irrespective of the uncertainties, time delays or nonlinearities.

Key words Nonlinear systems, parametric uncertainty, time delay, Riccati equation

1) 国家"973"项目(2002cb312200)部分资助和国家自然科学基金(60174038)资助
Supported by National "973" Projects(2002cb312200) and National Natural Science Foundation of P. R. China (60174038)
收稿日期 2002-09-23 收修改稿日期 2003-09-15
Received September 23, 2002; in revised form September 15, 2003

1 引言

许多物理过程的动态行为中都含有内部时滞和不确定的参数，如信号处理中的回声消减、局部环路平衡，数据通信中的多路传送以及序列信号处理等. 时滞状态是导致系统不稳定和性能差的主要因素，它们在控制设计和信号处理中有着不可忽视的重要性. 近年来，文献[1～6]及其参考文献分别针对不同的时滞系统，研究了鲁棒滤波器[1～5]和控制器[6]设计的相关问题. 本文针对含有非线性扰动的时滞系统，试从 H_∞ 的角度来设计鲁棒滤波器. 针对连续和离散两种情况，基于代数 Riccati 不等式，给出了滤波系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件.

2 问题描述

研究如下非线性状态时滞不确定性系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (A+\Delta A(t))\boldsymbol{x}(t)+(A_d+\Delta A_d(t))\boldsymbol{x}(t-\tau)+D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+E_1\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{y}(t) &= (C+\Delta C(t))\boldsymbol{x}(t)+E_2\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t),\quad t\in[-\tau,0]\end{aligned}\tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)$是状态；$\boldsymbol{y}(t)$测量输出；$\boldsymbol{w}(t)$是扰动；τ 是时滞参数；A,A_d,E_1,E_2,C,D 是已知的系统矩阵；$\Delta A(t),\Delta A_d(t),\Delta C(t)$是表示参数不确定性的矩阵. 假定文中的容许不确定性具有模有界形式

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t)\\ \Delta C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}F(t)N_1,\qquad \Delta A_d=M_1F(t)N_2\tag{2}$$

这里 M_1,M_2,N_1,N_2是具有相应维数的已知常矩阵；$F(t)$是不确定的时变矩阵满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\tag{3}$$

则称式(2)和式(3)为容许条件.

假设 1. 系统矩阵 A 渐近稳定，矩阵 M_2行满秩.

假设 2. 存在一个实的常矩阵 $H\in R^{n\times n}$，使得对于任意的 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$，非线性向量函数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$满足范数有界条件

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\|\leqslant\|H\boldsymbol{x}(t)\|$$

要设计的线性滤波器具有如下形式

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=G\hat{\boldsymbol{x}}(t)+Ky(t),\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{0}\tag{4}$$

式中 G,K 是待估计的参数.

状态估计误差为 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$，根据式(1)和式(4)得到误差的动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}(t)=&G\boldsymbol{e}(t)+(A-G-KC+\Delta A(t)-K\Delta C(t))\boldsymbol{x}(t)+\\ &(A_d+\Delta A_d(t))\boldsymbol{x}(t-\tau)+(E_1-KE_2)\boldsymbol{w}(t)+D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\end{aligned}\tag{5}$$

以下在不引起混淆的情况下，省略变量 t. 由式(1)和式(5)得到增广系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_f(t) &= \hat{A}_f\boldsymbol{x}_f+\hat{A}_{df}\boldsymbol{x}_f(t-\tau)+D_f\boldsymbol{f}(F_f\boldsymbol{x}_f(t))+E_f\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{z} &= L\boldsymbol{x}_f\end{aligned}\tag{6}$$

式中 z 是误差状态输出，$x_f=\begin{bmatrix}x\\e\end{bmatrix}$，$F_f=[I\quad 0]$，$L=[0\quad I]$，

$$\hat{A}_f=A_f+\Delta A_f=A_f+M_fFN_f,\ \hat{A}_{df}=A_{df}+\Delta A_{df}=A_{df}+M_{df}FN_{df},$$

$$A_f=\begin{bmatrix}A & 0\\ A-G-KC & G\end{bmatrix},\quad A_{df}=\begin{bmatrix}A_d & 0\\ A_d & 0\end{bmatrix},\quad D_f=\begin{bmatrix}D\\ D\end{bmatrix},\quad E_f=\begin{bmatrix}E_1\\ E_1-KE_2\end{bmatrix},$$

$$M_f=\begin{bmatrix}M_1\\ M_1-KM_2\end{bmatrix},\quad M_{df}=\begin{bmatrix}M_1\\ M_1\end{bmatrix},\quad N_f=[N_1\quad 0],\quad N_{df}=[N_2\quad 0]$$

注 1. 本文研究的离散系统与连续系统具有相似的描述和假设.将连续系统表达式中的时间变量 t 换成离散时间变量 k 即为所研究的离散系统，这里不再详述.

本文设计形如式(4)的鲁棒滤波器，使得对于满足容许条件的不确定性，滤波系统(6)渐近稳定且从噪声输入到误差输出的 H_∞ 范数小于一个指定的上界 γ，即 $\|H_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$.

3 连续系统的主要结论

定理 1. 如果存在对称正定矩阵 P 和 Q，正数 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_3>0$ 以及满足 $I-\varepsilon_2N_{df}Q^{-1}N_{df}^{\mathrm{T}}>0$ 的 $\varepsilon_2>0$，使得

$$\begin{aligned}&A_f^{\mathrm{T}}P+PA_f+Q+P(\varepsilon_1M_fM_f^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2^{-1}M_{df}M_{df}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3^{-1}D_fD_f^{\mathrm{T}}+A_{df}Q^{-1}A_{df}^{\mathrm{T}}+\\&\gamma^{-2}E_fE_f^{\mathrm{T}}+A_{df}Q^{-1}N_{df}^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2^{-1}I-N_{df}Q^{-1}N_{df}^{\mathrm{T}})^{-1}N_{df}Q^{-1}A_{df}^{\mathrm{T}})P+\varepsilon_1^{-1}N_f^{\mathrm{T}}N_f+\\&\varepsilon_3(HF_f)^{\mathrm{T}}(HF_f)+L^{\mathrm{T}}L<0\end{aligned}\tag{7}$$

成立，那么系统(6)渐近稳定且 $H_{zw}(s)$ 的范数满足 $\|H_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$.

记 $U=A_dQ_{11}A_d^{\mathrm{T}}+A_dQ_{11}N_2^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2^{-1}I-N_2Q_{11}N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2Q_{11}A_d^{\mathrm{T}}$

$S=\varepsilon_1M_2M_1^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}E_2E_1^{\mathrm{T}}$，$V=\varepsilon_1M_2M_2^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}E_2E_2^{\mathrm{T}}$，$A_\varepsilon=A+\Phi_1P_1$

$C_\varepsilon=C+SP_1$，$\Phi_1=(\varepsilon_1+\varepsilon_2^{-1})M_1M_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3^{-1}DD^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}E_1E_1^{\mathrm{T}}+U$

$\Phi_2=(\varepsilon_1+\varepsilon_2^{-1})M_1M_1^{\mathrm{T}}+U-S^{\mathrm{T}}V^{-1}S$，$\hat{A}=A_\varepsilon-S^{\mathrm{T}}V^{-1}C_\varepsilon$

定理 2. 令 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 是足够小的常数，如果存在两个正数 $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$ 和正定分块对角阵 $Q=\begin{bmatrix}Q_1 & \\ & Q_2\end{bmatrix}$ 使得 Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A+P_1\Phi_1P_1+\varepsilon_1^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1+\varepsilon_3H^{\mathrm{T}}H+Q_1+\delta_1I=0\tag{8}$$

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}P_2+P_2\hat{A}+P_2\Phi_2P_2+L^{\mathrm{T}}L+Q_2+\delta_2I=0\tag{9}$$

分别有正定解 $P_1>0,P_2>0$，那么滤波器参数为

$$K=(P_2^{-1}C_\varepsilon+S^{\mathrm{T}})V^{-1},\quad G=A_\varepsilon-KC_\varepsilon\tag{10}$$

且对于所有满足允许条件的不确定项，系统(6)渐近稳定，H_∞ 范数满足指定的上界 $\|H_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$.

4 离散系统的主要结论

记 $\theta_1=\varepsilon_1N_1^{\mathrm{T}}N_1+\varepsilon_2N_d^{\mathrm{T}}N_d+A_d^{\mathrm{T}}(Q_1-\varepsilon_2^{-1}M_dM_d^{\mathrm{T}})^{-1}A_d$

$\theta_2=A_d^{\mathrm{T}}(Q_2-\varepsilon_2^{-1}M_1M_1^{\mathrm{T}})A_d+\gamma^{-2}L^{\mathrm{T}}L$，$\widetilde{A}=A_f+D_fHF_f$

$T=\varepsilon_1^{-1}M_2M_1^{\mathrm{T}}+E_2E_1^{\mathrm{T}}$，$V=\varepsilon_1^{-1}M_2M_2^{\mathrm{T}}+E_2E_2^{\mathrm{T}}$

$$A_\varepsilon = A + DH + (\varepsilon_1^{-1} M_1 M_1^{\mathrm{T}} + E_1 E_1^{\mathrm{T}})[(P_1^{-1} - \theta_1)^{-1}(A + DH)^{\mathrm{T}}]^{-1}$$

$$C_\varepsilon = C + DH + T[(P_1^{-1} - \theta_1)^{-1}(A + DH)^{\mathrm{T}}]^{-1}, \quad \hat{A} = A_\varepsilon - T^{\mathrm{T}} V^{-1} C_\varepsilon$$

定理 3. 如果存在对称正定矩阵 P 和 Q，正数 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$，使得

$$\widetilde{A}[P^{-1} - \varepsilon_1 N_f^{\mathrm{T}} N_f - \varepsilon_2 N_{df}^{\mathrm{T}} N_{df} - A_{df}^{\mathrm{T}}(Q - \varepsilon_2^{-1} M_{df} M_{df}^{\mathrm{T}})^{-1} A_{df} - \gamma^2 L^{\mathrm{T}} L]^{-1} \widetilde{A}^{\mathrm{T}} - P + \varepsilon_1^{-1} M_f M_f^{\mathrm{T}} + E_f E_f^{\mathrm{T}} + Q < 0 \tag{11}$$

成立，那么滤波系统渐近稳定，$H_{zw}(s)$ 的范数满足 $\| H_{zw} \|_\infty \leqslant \gamma$.

定理 4. 令 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 是足够小的常数，如果存在两个正数 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ 和正定分块对角阵 $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$ 使得 Riccati 方程

$$(A + DH)(P_1^{-1} - \theta_1)^{-1}(A + DH)^{\mathrm{T}} - P_1 + \varepsilon_1 M_1 M_1^{\mathrm{T}} + E_1 E_1^{\mathrm{T}} + Q_1 + \delta_1 I = 0 \tag{12}$$

$$\hat{A}(P_2^{-1} - \theta_2)^{-1} \hat{A}^{\mathrm{T}} - P_2 + \varepsilon_1^{-1} M_1 M_1^{\mathrm{T}} + E_1 E_1^{\mathrm{T}} + T^{\mathrm{T}} V^{-1} T + Q_2 + \delta_2 I = 0 \tag{13}$$

分别有正定解 $P_1 > 0, P_2 > 0$，那么滤波器参数为

$$K = T^{\mathrm{T}} V^{-1}, \quad G = A_\varepsilon - K C_\varepsilon \tag{14}$$

且对于所有满足允许条件的不确定项，滤波系统渐近稳定，H_∞ 范数满足指定的上界 $\| H_{zw} \|_\infty \leqslant \gamma$.

5 仿真实例

考虑非线性不确定时滞系统(1)的参数如下：

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.2 & -0.2 \\ -0.3 & -3 & -0.4 \\ 1.5 & -0.4 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.04 & 0 \\ -0.01 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x) = \begin{bmatrix} 0.1\sin(x_1) \\ 0.1\sin(x_2) \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.05 \\ 0.05 & 0 & 0.35 \\ 0.28 & 0.18 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \\ 0.02 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \sin t I, \quad \tau = 10,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} 0.1\mathrm{e}^{0.1t} - 1 \\ 0.5 \\ 0.8\mathrm{e}^{0.2t} \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1.$$

根据定理 2，选取 $\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = 0.6, Q = \begin{bmatrix} 0.3I & \\ & I \end{bmatrix}$，则得到滤波器参数为

$$K = \begin{bmatrix} 0.5808 & 0.0114 & 0.2242 \\ 0.0377 & 0.5450 & 0.0358 \\ 0.2113 & 0.0336 & 0.2095 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -2.9717 & 0.1825 & -0.3937 \\ -0.3395 & -3.4688 & -0.4400 \\ 1.3335 & -0.4344 & -5.1875 \end{bmatrix}$$

通过计算,系统的 H_∞ 范数满足指定的水平,且滤波系统渐近稳定.

6 结论

研究了含有状态时滞的非线性不确定性系统的鲁棒滤波器设计问题.为了得到性能与不确定的参数和时滞以及非线性扰动无关的滤波器,采用修正的代数 Riccati 不等式给出了鲁棒 H_∞ 控制的渐近稳定定理;根据两个代数 Riccati 型方程给出了期望的鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件,得到了参数化的滤波器的表示形式.

References

1 Mahmoud M S, Xie L, Soh Y C. Robust Kalman filtering for discrete state-delay systems. *IEE Proceedings of Control Theory Application*, 2000, **147**(6): 613~618

2 Wang Z, Huang B, Unbehauen H. Robust H_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty: The discrete -time case. *Automatica*, 1999, **35**(6): 1161~1167

3 Mahmoud M S, AI-Muthairi N F, Bingulac S. Robust Kalman filtering for continuous time-lag systems. *Systems and Control Letters*, 1999, **38**(4): 309~319

4 Wang Z, Yang F. Robust filtering for uncertain linear systems with delayed stated and outputs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2002, **49**(1): 125~130

5 Wang Z, Burnham K J. Robust filtering for a class of stochastic uncertain nonlinear time-delay systems via exponential state estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(4): 794~804

6 Wang Jing-Cheng, Shu Hong-Ye, Zhu Jian. Robust H_∞ controller design for uncertain linear systems with delayed state and control. *Acta Automatic Sinica*, 1998, **24**(4): 566~599(in Chinese)

蔡云泽 2003 年毕业于上海交通大学获博士学位,现为上海交通大学自动化系讲师.主要研究方向为时滞系统的鲁棒控制,鲁棒滤波和小波滤波.

(**CAI Yun-Ze** Received her Ph. D. degree from Shanghai Jiaotong University in 2003, and now she is a teacher at the department of Automation in Shanghai Jiaotong University. Her research interests include robust control for delay systems, robust filter design and wavelet denoising.)

何 星 上海交通大学副教授.主要研究方向为智能控制、过程控制及鲁棒控制.

(**HE Xing** Associate professor at the department of Automation in Shanghai Jiaotong University. His research interests include intelligent control, process control and robust control.)

许晓鸣 上海交通大学副校长,博士生导师.主要研究方向为预测控制、过程控制以及鲁棒控制理论及应用等.

(**XU Xiao-Ming** Vice-president of Shanghai Jiaotong University, the tutor of Ph. D.. His research interests include predictive control, process control and robust control theroy and application.)

张卫东 上海交通大学教授,博士生导师.主要研究方向为预测控制、鲁棒控制、网络控制等.

(**ZHANG Wei-Dong** Professor at the department of Automation in Shanghai University, the tutor of Ph. D.. His research interests include predictive control, robust control and network control.)