第 30 卷 第 4 期
2004 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4
July, 2004

不确定广义系统的最优保性能控制[1)]

熊军林 张庆灵
(东北大学系统科学研究所 沈阳 110004)
(E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn)

摘 要 该文讨论不确定广义系统的最优保性能控制问题. 给出了不确定广义系统保性能控制器的两种设计方法: 一是代数 Riccati 方程方法, 给出了参数化的控制器; 另一个是线性矩阵不等式方法, 给出了在使性能函数上界最小的意义下, 最优控制器的设计算法, 用实例演示了该方法的有效性.

关键词 广义系统, 保性能控制, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

Optimal Guaranteed Cost Control for Descriptor Systems with Uncertainties

XIONG Jun-Lin ZHANG Qing-Ling
(*Institute of System Science, Northeastern University, Shenyang* 110004)
(E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn)

Abstract This paper presents results on optimal guaranteed cost control for a class of descriptor systems with norm bounded uncertainties. Two sufficient and necessary conditions for the existence of guaranteed cost control are obtained in terms of algebraic Riccati equation and linear matrix inequalities, respectively. Also, two procedures are proposed to select an optimal controller in the sense of minimizing the upper bound of the cost function. A numerical example is given to illustrate the methods.

Key words Descriptor systems, guaranteed cost control, linear matrix inequalities (LMIs)

1 引言

对于正常系统的保性能控制(guaranteed cost control)问题, 目前已取得了丰富的成果[1~3]. 但对广义系统来说, 这方面的成果还很少. 由于广义系统的保性能控制问题不仅

1) 教育部骨干教师基金和教育部博士点基金资助
Supported by Key Teacher Research Grant by the National Ministry of Education and University Doctoral Foundation of National Education Commission of P. R. China
收稿日期 2002-08-27 收修改稿日期 2002-11-25
Received August 27, 2002; in revised form November 25, 2002

要保证闭环系统的鲁棒稳定性和满足性能指标要求，还要求闭环系统是正则无脉冲，所以广义系统的保性能控制问题要比正常系统的复杂的多.本文讨论了满足匹配条件的范数有界的不确定广义系统的保性能控制问题，将正常系统中的保性能控制问题的结果做了推广.

2 问题描述和准备知识

考虑由以下状态方程描述的不确定线性广义系统

$$E\dot{x}(t) = [A + F\Delta(t)H_1]x(t) + [B + F\Delta(t)H_2]u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

上式中 $x(t)\in R^n$ 是系统状态；$u(t)\in R^m$ 为控制输入；E,A,B,F,H_1 和 H_2 是具有适当维数的常阵，$r=\mathrm{rank}E\leqslant n$；$\Delta(t)$ 是反映系统模型中不确定性的时变实矩阵，且满足 $\Delta(t)\in\Omega:=\{\Delta(t)\in R^{p\times q}:\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I_q,\forall t\}$；$x_0=[x_{10}^{\mathrm{T}}\quad x_{20}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$x_{10}\in R^r$ 是系统初态. 不失一般性，设系统(1)中系数矩阵 $E=\text{diag-block}(I_r,0)$. 考虑如下形式的性能函数[1]

$$J = \int_0^\infty [x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)]\mathrm{d}t \tag{2}$$

和状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{3}$$

其中矩阵 $R_1>0$，$R_2>0$，反馈矩阵 $K\in R^{m\times n}$.

定义 1. 如果对所有的 $\Delta(t)\in\Omega$，存在一个可逆矩阵

$$P \in \Lambda := \left\{\Lambda \in R^{n\times n}:\ \Lambda = \begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ \Lambda_2 & \Lambda_3\end{bmatrix},\ 0<\Lambda_1\in R^{r\times r}\right\}$$

使得

$$P^{\mathrm{T}}(A + F\Delta(t)H_1) + (A + F\Delta(t)H_1)^{\mathrm{T}}P < 0 \tag{4}$$

成立，则称系统(1)的自治系统二次稳定.

定义 2[1]. 如果存在可逆矩阵 $P\in\Lambda$，使得对所有的 $\Delta(t)\in\Omega$ 有

$$\begin{aligned}&R_1 + K^{\mathrm{T}}R_2K + P^{\mathrm{T}}[A + BK + F\Delta(t)(H_1 + H_2K)] +\\ &[A + BK + F\Delta(t)(H_1 + H_2K)]^{\mathrm{T}}P < 0\end{aligned} \tag{5}$$

则称控制律(3)是系统(1)和性能函数(2)的具有性能矩阵 P 的二次保性能控制.

3 保性能控制的分析、设计及优化

下面的定理揭示了二次保性能控制与鲁棒允许控制之间的密切关系.

定理 1. 考虑系统(1)和性能函数(2)，如果控制律(3)是具有性能矩阵 $P\in\Lambda$ 的二次保性能控制，那么闭环系统是鲁棒允许，并且性能函数(2)的闭环值满足 $J\leqslant x_{10}^{\mathrm{T}}P_1x_{10}$. 相反，若控制律(3)使得闭环系统鲁棒允许，那么对所有的矩阵 $R_1>0$ 和 $R_2>0$，该控制律是具有某性能矩阵 $\tilde{P}\in\Lambda$ 的二次保性能控制.

证明. 由于篇幅所限，从略.

注 1. 定理 1 中的性能函数 J 的上界只与初态 x_{10} 有关，而与初态 x_{20} 无关. 若为了除去对初态的依赖性，可假设 x_0 是零均值随机变量，则有 $E\{x_{10}x_{10}^{\mathrm{T}}\}=I_r$，对性能函数(2)取数

学期望得到 $\bar{J}=E\{J\}\leqslant E\{x_{10}^{\mathrm{T}}P_1x_{10}\}=\mathrm{tr}\{P_1\}$.

下面的定理给出设计保性能控制器的两种等价方法.

定理 2. 考虑不确定广义系统(1)和性能函数(2)，以下几种说法等价.

Ⅰ) 状态反馈控制律(3)是一个二次保性能控制.

Ⅱ) 存在矩阵 $Q>0$ 和常数 $\varepsilon>0$ 使得下面的代数 Riccati 方程

$$(A-\varepsilon^{-1}B\tilde{R}_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_1)^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}(A-\varepsilon^{-1}B\tilde{R}_2^{-1}E_2^{\mathrm{T}}E_1)+\varepsilon P^{\mathrm{T}}FF^{\mathrm{T}}P-P^{\mathrm{T}}B\tilde{R}_2^{-1}BP+\varepsilon^{-1}H_1^{\mathrm{T}}(I-\varepsilon^{-1}H_2\tilde{R}_2^{-1}H_2^{\mathrm{T}})H_1+R_1+Q=0 \tag{6}$$

有可逆解 $P\in\Lambda$,其中 $\tilde{R}_2=(R_2+\varepsilon^{-1}H_2^{\mathrm{T}}H_2)$.

此时，状态反馈控制律(3)可参数化为

$$\boldsymbol{u}(t)=[-\tilde{R}_2^{-1}(B^{\mathrm{T}}P+\varepsilon^{-1}H_2^{\mathrm{T}}H_1)^{\mathrm{T}}+\tilde{R}_2^{-\frac{1}{2}}LQ^{\frac{1}{2}}]\boldsymbol{x}(t) \tag{7}$$

其中 L 为满足 $\|L\|<1$ 的任意矩阵. 并且性能函数(2)的闭环值满足 $J\leqslant x_{10}^{\mathrm{T}}P_1x_{10}$.

Ⅲ) 存在可逆矩阵 $X\in\Lambda$，$W\in R^{m\times n}$ 和常数 $\varepsilon>0$ 满足下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}(AX+BW)+(AX+BW)^{\mathrm{T}}+\varepsilon FF^{\mathrm{T}} & (H_1X+H_2W)^{\mathrm{T}} & X^{\mathrm{T}} & W^{\mathrm{T}}\\ H_1X+H_2W & -\varepsilon I & 0 & 0\\ X & 0 & -R_1^{-1} & 0\\ W & 0 & 0 & -R_2^{-1}\end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

此时状态反馈控制律(3)可表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=WX^{-1}\boldsymbol{x}(t) \tag{9}$$

并且性能函数(2)的闭环值满足 $J\leqslant x_{10}^{\mathrm{T}}X_1^{-1}x_{10}$.

证明. 由于篇幅所限，从略.

下面的定理分别给出在最小化性能函数(2)的上界及其数学期望的上界的意义下，设计最优控制律(9)的优化算法.

定理 3. 考虑不确定广义系统(1)和性能函数(2)，如果下面最优化问题

$$\min_{\varepsilon,X,W,r} r$$

$$\mathrm{s.t.}\begin{cases}(8)\\ \begin{bmatrix}-r & x_{10}^{\mathrm{T}}\\ x_{10} & -X_1\end{bmatrix}<0\end{cases} \tag{10}$$

有解(ε,X,W,r)，则控制律(9)是一个在最小化性能函数(2)的上界的意义下的最优二次保性能控制.

证明. 与文献[4]中定理 3 的证明类似，从略.

定理 4. 考虑不确定广义系统(1)和性能函数(2)，如果下面最优化问题

$$\min_{\varepsilon,X,W,S}\mathrm{tr}(S)$$

$$\mathrm{s.t.}\begin{cases}(8)\\ \begin{bmatrix}-S & I\\ I & -X_1\end{bmatrix}<0\end{cases} \tag{11}$$

有解(ε,X,W,S)，则控制律(9)是一个在最小化性能函数(2)的数学期望的上界的意义下的最优二次保性能控制.

证明. 与文献[2]中定理 4 的证明类似，从略.

4 例子

考虑不确定广义系统(1)和性能函数(2)，其中的参数由下面的式子给出

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&10\\0&10&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\\8\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\\0.1\end{bmatrix}$$

$$H_1=[0.1\quad 0.1\quad 0.1],\quad H_2=0.1,\quad R_1=I,\quad R_2=1$$

利用 MATLAB 的 LMI 工具箱，应用定理 3 得到最优保性能控制律为

$$\boldsymbol{u}^*(t)=[10.8490\quad -7.0051\quad -3.6874]\boldsymbol{x}(t)$$

相应的性能函数上界的最小值为 $J^*=0.0411$；应用定理 4 得到最优保性能控制律为

$$\boldsymbol{u}^*(t)=[12.8663\quad -7.9836\quad -4.3435]\boldsymbol{x}(t)$$

相应的性能函数数学期望的上界的最小值为 $\bar{J}^*=4.9647$.

5 结束语

本文给出了不确定广义系统的最优保性能控制问题的一个解. 给出了设计保性能控制器的两个充要条件，一个是以代数 Riccati 方程的形式给出；另一个是以线性矩阵不等式的形式给出. 由于具有线性矩阵不等式约束的线性优化问题属于凸优化问题，能够利用内点法得到全局最优解，所以给出的最优控制器的设计算法很容易求解，最后用例子演示了算法的有效性.

References

1 Petersen I R, DcFarlance D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1991～1997

2 Jiang P, Su H, Chu J. LMI approach to optimal guaranteed cost control for a class of linear uncertain discrete systems. In: Proceedings of the American Control Conference. Chicago: 2000. 327～331

3 Xue An-Ke, Sun You-Xian. Robustness of guaranteed cost control systems with uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(5): 346～352(in Chinese)

4 Yu L, Chu J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-dealy system. *Automatica*, 1999, **35**(6): 1155～1159

熊军林　2003 年于东北大学获硕士学位，现在是香港大学机械工程系博士研究生. 目前主要研究领域为鲁棒控制理论和时滞系统.

(**XIONG Jun-Lin**　Received his Master's degree from Northeastern University in 2003. Now he is a Ph. D. candidate in the Department of Mechanical Engineering of Hong Kong University. His research interests include robust control theory and time-delay systems.)

张庆灵　东北大学教授，博士生导师，东北大学理学院院长. 目前主要研究领域为广义系统和鲁棒控制.

(**ZHANG Qing-Ling**　Professor and dean of the College of Science, Northeastern University, P. R. China. His research intereests include robust control theory and descriptor systems.)