

# 基于 T-S 模糊性能评估器的 非线性系统跟踪控制器设计<sup>1)</sup>

黎明<sup>1</sup> 张化光<sup>1</sup> 王成红<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(东北大学信息学院电气自动化研究所 沈阳 110004)

<sup>2</sup>(国家自然科学基金委员会信息科学部 北京 100085)

(E-mail: limingneu@263.net; hg-zhang@21cn.com; wangch@nsfc.gov.cn)

**摘要** 讨论了一类非线性系统的  $H_\infty$  状态反馈跟踪控制器设计问题. 区别于传统的模糊控制设计方法, 该文提出的控制策略由模糊性能评估器(FPE)和控制器(FC)两部分组成. 模糊性能评估器为模糊模型和控制策略提供了一种校验方法, 可以间接地判断闭环控制的效果, 从而提供了一种模糊控制系统无损调试的新方法. 文中以线性矩阵不等式组(LMIs)的形式, 给出了模糊性能评估器和控制器存在的充分条件.

**关键词**  $H_\infty$  控制, 跟踪控制, 模糊性能评估器(FPE), 线性矩阵不等式(LMI), T-S 模糊模型  
**中图分类号** TP273.2

## Fuzzy Tracking Control Design for Nonlinear Systems via T-S Fuzzy Performance Evaluator

LI Ming<sup>1</sup> ZHANG Hua-Guang<sup>1</sup> WANG Chen-Hong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(Institute of Electrical Automation, Northeastern University, Shenyang 110004)

<sup>2</sup>(Department of Information Sciences, National Natural Science Foundation of China, Beijing 100085)

(E-mail: limingneu@263.net; hg-zhang@21cn.com; wangch@nsfc.gov.cn)

**Abstract** Fuzzy control design method for a class of nonlinear system with  $H_\infty$  tracking performance is introduced. Compared with the traditional fuzzy controller, the scheme is made up of two parts: fuzzy performance evaluator (FPE) and fuzzy controller (FC). FPE offers a method to verify the validity of fuzzy models and controller. The performance of closed-loop system is evaluated in directly via the FPE. This procedure will not cause any damage to the original system. So it may be called a nondestructive debugging method. Some sufficient conditions are derived for the existence of FPE and FC via solving the linear matrix inequalities(LMIs).

1) 国家自然科学基金(60274017)、国家教委博士点专项基金(20011045023)和沈阳市自然科学基金(1022033-1-07)资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60274017), the Foundation for Doctoral Special Branch by the Ministry of Education of P. R. China (20011045023) and Shenyang City Natural Science Foundation (1022033-1-07)

收稿日期 2002-07-16 收修改稿日期 2003-10-10

Received July 16, 2002; in revised form October 10, 2003

**Key words**  $H_\infty$  control, tracking control, fuzzy performance evaluator (FPE), linear matrix inequality(LMI), T-S fuzzy model.

## 1 引言

基于 T-S 模糊模型的鲁棒控制器设计方法研究是模糊控制理论研究的热点问题. 文献[1]考虑模糊模型的逼近误差提出了一种鲁棒控制策略, 文献[2]在此基础上提出了一种跟踪控制器的设计方法. 但他们都假设模型误差可以用一个有界矩阵来限定, 这个矩阵其实很难确定, 同时控制器的设计也相对保守. 基于 FPE 的控制器设计方法, 利用模糊性能评估器来评估模糊模型并且实时计算干扰抑制量, 从而无需事先对模型逼近误差和不确定性做假设. 文献[3,4]提出了基于 FPE 的模糊自适应控制方法, 但需要调整的参数较多, 计算复杂. 本文针对 T-S 模糊模型提出一种更简单的鲁棒跟踪控制器的设计方法.

## 2 问题的提出

考虑如下一类非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t)) + Bu(t) + w_0(t) \\ y(t) &= C(x(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x(t) \in R^{n \times 1}$ ,  $u(t) \in R^{m \times 1}$ ,  $C(x(t))$  和  $A(x(t))$  为未知非线性函数,  $B$  已知且与  $x$  无关,  $B^T B$  可逆,  $w_0(t)$  为有界外部干扰,  $w_0(t) \in R^{n \times 1}$ ,  $y(t) \in R^{p \times 1}$ . 系统状态完全可测. 为了简化书写将  $x(t)$ ,  $y(t)$  简写为  $x, y$ , 其它变量也做同样的简化.

建立模糊动态模型, 该模型由  $L$  条模糊规则组成, 其中第  $i$  条模糊规则如下:

$$\begin{aligned} \text{If } x_1 \text{ is } F_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } F_{in} \text{ then } \dot{x} &= A_i x + Bu \\ y &= C_i x \end{aligned} \quad (2)$$

上式中  $i=1, 2, \dots, L$ ;  $F_{ij}$  为模糊集合;  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $C_i \in R^{p \times n}$ ,  $\{A_i, C_i\}$  能观测.

采用单点模糊化、乘积推理、中心平均反模糊化方法, 方程(1)可以表示为

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^L h_i(x) A_i x + Bu + w_1 \quad (3)$$

$$y = \sum_{i=1}^L h_i(x) C_i x + \Delta C(x) \quad (4)$$

这里  $w_1 = w_0 + \Delta A(x)$  为外界干扰和建模误差的总和;  $\Delta A(x) = A(x) - \sum_{i=1}^L h_i(x) A_i x$ ,  $\Delta C(x) = C(x) - \sum_{i=1}^L h_i(x) C_i x$  为有界建模误差;  $h_i(x) = \mu_i(x) / \sum_{j=1}^L \mu_j(x)$ ,  $\mu_i(x) = \prod_{j=1}^n F_{ij}(x)$ ,  $F_{ij}(x)$  为  $x_j$  属于模糊集合  $F_{ij}$  的隶属度函数.

我们的控制目标是跟踪参考模型  $\dot{x}_m = A_r x_m + Br$  的轨迹.

## 3 基本原理

基于模糊性能评估器设计方法的原理如图 1 所示.

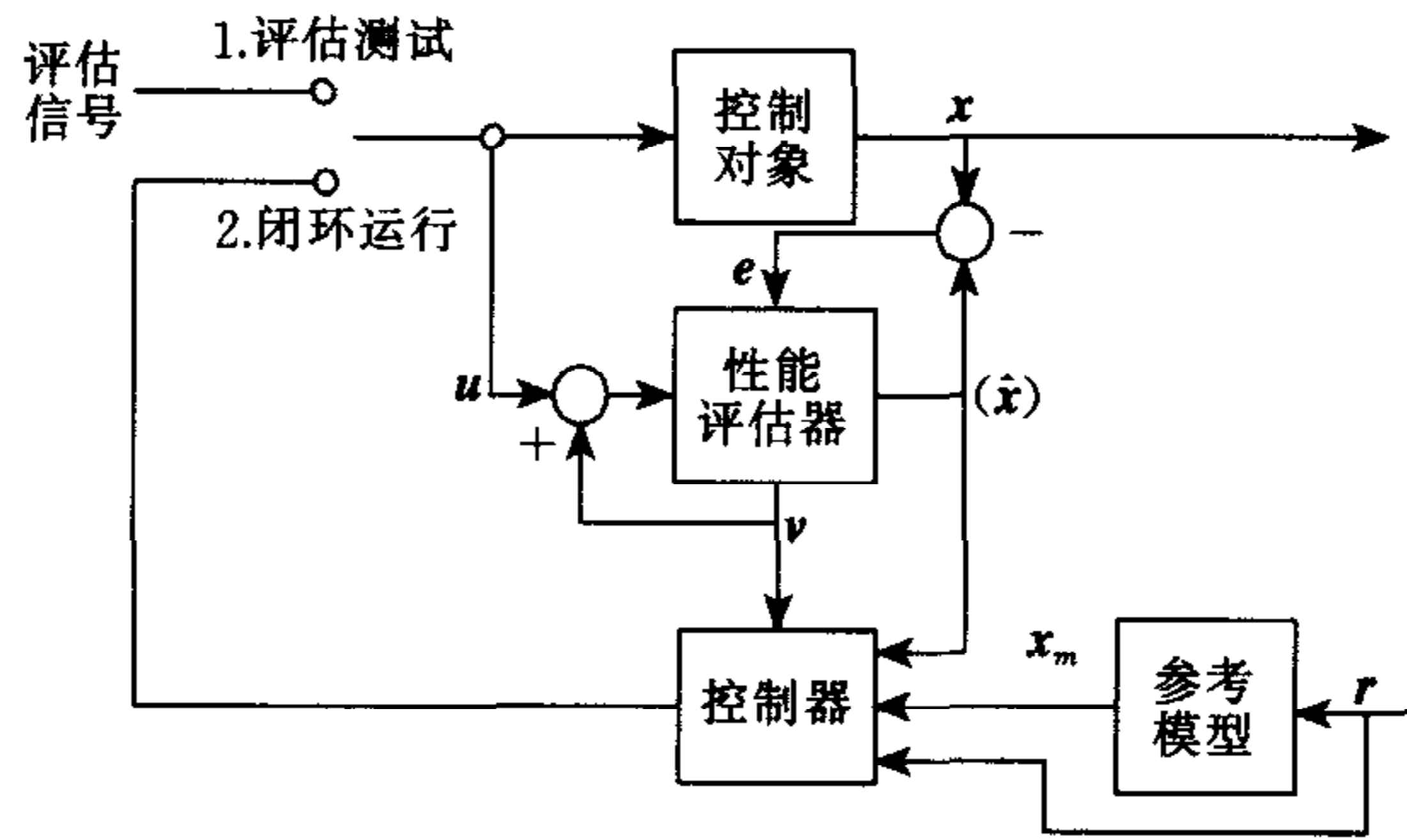


图 1 基于性能评估器跟踪控制器设计方法原理图

Fig. 1 The diagram of the tracking control scheme based on performance evaluator

图 1 中性能评估器是依据模糊模型来设计的,通过评估测试来确定模糊模型的有效性,预测闭环控制的控制效果.为了增强闭环控制的鲁棒性,引入干扰抑制项  $v$ .在进行评估测试预估闭环控制系统性能的过程中,由于只从被控系统中取信号,而不施加控制,因此不会对系统造成影响,所以可以称其为一种无损调试方法.

### 4 模糊性能评估器设计

根据模糊模型(2),定义由  $L$  条模糊规则描述的模糊性能评估器,其中第  $i$  条规则如下:

$$\begin{aligned} \text{If } x_1 \text{ is } F_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_{in} \text{ then } \dot{\hat{x}} &= A_i \hat{x} + B(u + v) + M_i(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C_i \hat{x} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\hat{x}$  为性能评估器状态变量,  $v = -K_v(x - \hat{x})$  为干扰抑制量,  $\hat{y}$  为性能评估器输出,  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) 为误差反馈增益.通过设计  $M_i$  和  $v$ ,使得性能评估器的状态跟踪真实系统的状态,  $M_i$  为常规的误差反馈增益,  $v$  用于抑制建模误差和干扰.

式(5)可简写为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}(x) \hat{x} + B(u + v) + \hat{M}(x)(x - \hat{x}) + d$$

其中  $\hat{A}(x) = \sum_{i=1}^L h_i(x) A_i$ ,  $\hat{M}(x) = \sum_{i=1}^L h_i(x) \sum_{j=1}^L h_j(x) M_i C_j$ ,  $d = \sum_{i=1}^L h_i(x) \Delta C(x)$ .

定义性能评估误差  $e = x - \hat{x}$ ,得到误差动态系统为

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(x) h_j(x) \tilde{A}_{ij} e + w \quad (6)$$

其中  $\tilde{A}_{ij} = A_{ij} - BK_v A_{ij} = A_i - M_i C_j$ ,  $w = w_1 - d$ .

设计参数  $M_i$  和  $v$ ,使得式(6)中的状态跟踪误差满足如下的  $H_\infty$  性能指标

$$\int_0^{t_f} e^T(t) e(t) dt \leq e^T(0) P e(0) + \gamma^2 \int_0^{t_f} w^T(t) w(t) dt \quad (7)$$

首先,按照主导系统的设计思想,将模糊性能评估器的主导局部子系统  $A_i - M_i C_i$  的极点配置到给定的值,确定参数  $M_i$ .然后,根据如下定理计算干扰抑制量  $v$ .

**定理 1.** 考虑模糊性能评估器误差方程(6),对于给定的  $\gamma > 0$ ,如果下列线性矩阵不等式组存在公共的正定解  $P = P^T = Q^{-1} > 0$ ,  $Y$  和  $i, j = 1, 2, \dots, L$ ,

$$\begin{bmatrix} Q^T A_{ij}^T + A_{ij} Q + Y^T B^T + BY + \frac{1}{\gamma^2} I & Q^T \\ & Q \\ & & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

则当取  $K_v = YQ^{-1}$  时, 式(6)中的跟踪误差满足如式(7)所示的  $H_\infty$  性能指标.

证明. 取 Lyapunov 函数  $V = e^T P e$ ,  $\dot{V} = e^T \left[ \sum_{i=1}^L h_i(x) \sum_{j=1}^L h_j(x) (\tilde{A}_{ij}^T P + P \tilde{A}_{ij}) \right] e + 2w^T P e$ .

考虑性能指标  $\int_0^{t_f} e^T e dt = e^T(0) P e(0) + \int_0^{t_f} \gamma^2 w^T w dt +$

$$\int_0^{t_f} \left\{ e^T \left[ \sum_{i=1}^L h_i(x) \sum_{j=1}^L h_j(x) \left( I + A_{ij}^T P + P A_{ij} + K_v^T B^T P + P B K_v + \frac{1}{\gamma^2} P^T P \right) \right] e \right\} dt.$$

如果  $I + A_{ij}^T P + P A_{ij} + K_v^T B^T P + P B K_v + \frac{1}{\gamma^2} P^T P < 0$ , 则满足  $H_\infty$  性能指标(7).

上式的两端分别左乘和右乘  $Q = P^{-1}$ , 并令  $Y = K_v Q$ , 进一步化简得到

$$Q^T Q + Q^T A_{ij}^T + A_{ij} Q + Y^T B^T + BY + \frac{1}{\gamma^2} I < 0 \quad (9)$$

由 Schur 引理, 矩阵不等式(9)等价于线性矩阵不等式(8).

证毕.

从式(7)可以看出, 性能评估器的评估误差与模型误差以及干扰有关, 通过施加干扰抑制量, 可以将这个误差衰减到给定的水平.

## 5 控制器设计

设参考模型为  $\dot{x}_m = A_r x_m + B r$ . 定义误差为  $\varepsilon = \hat{x} - x_m$ , 则误差动态系统为

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\hat{x}} - \dot{x}_m = \hat{A}(x) \varepsilon + (\hat{A}(x) - A_r) x_m + B(u + v) + \hat{M}(x)(x - \hat{x}) - r + d \quad (10)$$

控制律  $u$  取为

$$u = u_f - v + u_r \quad (11)$$

其中  $u_f$  为模糊控制量,  $v$  为干扰抑制量,  $u_r$  为跟踪误差补偿项. 下面分别设计:

- 1) 干扰抑制量  $v$  来源于模糊性能评估器;
- 2) 模糊控制量  $u_f$  由如下  $L$  条模糊规则组成, 其中第  $i$  条为

$$\text{If } x_1 \text{ is } F_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_{in} \text{ then } u_{if} = K_{ic} \varepsilon,$$

得到模糊控制量为  $u_f = \sum_{i=1}^L h_i(x) K_{ic} \varepsilon = K_c(x) \varepsilon$ ,  $K_{ic}$  的计算方法由下面定理 2 给出:

- 3)  $u_r$  的设计方法

$$\dot{\varepsilon} = (\hat{A}(x) + B K_c(x)) \varepsilon + (\hat{A}(x) - A_r) x_m - r + B u_r + \hat{M}(x)(x - \hat{x}) + d \quad (12)$$

$u_r$  的设计原则是使  $(\hat{A}(x) - A_r) x_m - r + B u_r = 0$ , 一般来说,  $B$  是不可逆的, 所以只能按照广义逆的方式求解, 得到的是最小二乘解, 存在误差  $\delta_m$ .

取  $u_r = (B^T B)^{-1} B^T [r - (\hat{A}(x) - A_r) x_m]$ . 相应的残差为  $\delta_m = [(\hat{A}(x) - A_r) x_m - r + B u_r]$ .

定义  $\delta = \delta_m + \hat{M}(x)(x - \hat{x}) + d$ . 式(12)可简化为  $\dot{\varepsilon} = \sum_{i=1}^L h_i(x) (A_i - B K_{ic}) \varepsilon + \delta$ .

**定理 2.** 考虑误差方程(10), 对于给定的  $\rho > 0$ , 如果下列线性矩阵不等式组存在公共的正定解  $Q_\delta = Q_\delta^T = P_\delta^{-1} > 0$  和  $Y_i, i=1, 2, \dots, L$ ,

$$\begin{bmatrix} A_i Q_\delta + Q_\delta A_i^T + 2BY_i + \frac{1}{\rho^2} I & Q_\delta \\ Q_\delta & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

则当取  $K_{ic} = Y_i Q_\delta^{-1}$  时,可以得到如下  $H_\infty$  性能指标  $\int_0^{t_f} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} dt < \boldsymbol{\varepsilon}^T(0) P_\delta \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^{t_f} \rho^2 \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta} dt$ .

证明过程与定理 1 类似,此处略.

**定理 3.** 考虑非线性系统(1),如果采用控制律(11),则闭环系统所有状态有界且满足如下  $H_\infty$  跟踪性能  $\|x - x_m\|_2^2 \leq e^T(0) P e(0) + \boldsymbol{\varepsilon}^T(0) P_\delta \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \gamma^2 \|w\|_2^2 + \rho^2 \|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$ .

**证明.** 因为  $\|x - x_m\|_2^2 \leq \|x - \hat{x}\|_2^2 + \|\hat{x} - x_m\|_2^2$ ,由定理 1 和定理 2,直接得到结论. 证毕.

进一步得到  $\|x - x_m\|_2^2 \leq (1 + \rho^2 \|M(x)\|_2^2) \|e\|_2^2 + \rho^2 (\|\boldsymbol{\delta}_m\|_2^2 + \|d\|_2^2)$ .

仿真结果因篇幅所限,数据从略,可参见文献[5],其结果验证了该方法的有效性.

## 6 结束语

本文提出了一种新型的模糊控制器设计方法.通过设计模糊  $H_\infty$  性能评估器,使得其状态与实际状态之间的误差衰减到给定的衰减水平  $\gamma^2$ . 然后基于此性能评估器来设计控制器,保证闭环控制系统有良好的跟踪能力.同时,模糊性能评估器也提供了一种检验模糊模型有效性和预估闭环控制效果的方法.

## References

- 1 Chen B S, Tseng C S, Uang H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 1999, 7(5): 571~585
- 2 Tseng C S, Chen B S, Uang H J. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2001, 9(3): 381~391
- 3 Zhang H G, Li M. Adaptive fuzzy controller design based on the principle of  $H_\infty$  observer. *ACTA Automatica Sinica*, 2002, 28(6): 969~973 (in Chinese)
- 4 Li M, Zhang H G, He X Q. Adaptive fuzzy controller design based on  $H_\infty$  performance evaluator. In: Proceedings of the 2002 International Conference on Control and Automation. Xiamen; 2002. 55~59
- 5 Li M. Research on modeling and control for nonlinear system via fuzzy sets and rough sets [Ph. D. dissertation]. Shenyang: Northeastern University, 2003 (in Chinese)

**黎明** 2003 年于东北大学获博士学位. 主要研究方向为模糊控制理论与粗糙集理论与应用.

(LI Ming Received his Ph. D. degree from Northeastern University in 2003. His research interests include fuzzy control and rough set theory and applications.)

**张化光** 1991 年于东南大学获博士学位,现任东北大学信息工程学院教授,博士生导师. 主要研究领域为复杂系统的模糊自适应控制、非线性控制、混沌控制等.

(ZHANG Hua-Guang Received his Ph. D. degree from Southeastern University in 1991. Now he is a Professor and a Ph. D. director at Institute of Information Science & Engineering, Northeastern University P. R. China. His main research interests include fuzzy adaptive control of complex systems, nonlinear systems control, and chaos control etc.)

**王成红** 国家自然科学基金委员会信息科学部副教授. 研究方向为自动控制理论、可靠性理论、运筹学.

(WANG Chen-Hong Associate professor of National natural science foundation of P. R. China. His main research interests include automatic control theory, reliability theory and operational research.)