第 30 卷 第 4 期 2004 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4 July, 2004

线性周期系统特征指数的配置[1)]

王 平 李铁寿 吴宏鑫

(北京控制工程研究所 北京 100080)

(E-mail: wp@bice.cast.ac.cn)

摘 要 线性周期系统的稳定性完全由它的特征指数决定，该文研究如何配置线性周期系统的特征指数. 为了配置特征指数，首先需要用旋转变换将原系统化简成块能控标准形. 在块能控标准形的基础上文中提出一种设计周期状态反馈的方法，可以任意配置线性周期系统的特征指数. 文章还给出了一个线性周期系统特征指数可以任意配置的充分条件. 此设计方法曾应用于磁控小卫星的控制器设计，仿真结果表明，采用该文提出的设计方法控制线性周期系统是非常有效的.

关键词 线性周期系统，特征指数，系统配置

中图分类号 O231.1

Characteristic Exponent Assignment for Linear Periodic System

WANG Ping LI Tie-Shou WU Hong-Xin

(*Beijing Institute of Control Engineering, Beijing* 100080)

(E-mail: wp@bice.cast.ac.cn)

Abstract The stability of the linear periodic system is determined by it's characteristic exponent. This paper studies how to assign characteristic exponent for linear periodic system. In order to do this, the original system has to be converted to the block controllable form by rotating transform first. Then based on the block controllable form, a method to design a periodic state feedback control law is presented, which can arbitrarily relocate the system's characteristic exponents. A sufficient condition that characteristic exponent can be assigned arbitrarily for linear periodic system is also attained in the paper. The method has been applied to controller design of small satellite using magnetorquer. The simulation result demonstrates the validity of this method to control the linear periodic system.

Key words Linear periodic system, characteristic exponent, system assignment

1) 国家自然科学基金(60034010)资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60034010)

收稿日期 2002-12-24 收修改稿日期 2003-07-15

Received December 24, 2002; in revised form July 15, 2003

1 引言

线性周期系统是最简单也是最重要的一种时变系统.实际工程中许多时变系统都可以近似表示成一个线性周期系统,所以研究线性周期系统的控制问题具有重要意义.

对于下面线性周期系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \quad A(t) = A(t+T) \tag{1}$$

设 $\Phi(t,0)$是其状态转移矩阵,并按下式定义矩阵 S 和 $Q(t)$

$$\Phi(T,0) = \mathrm{e}^{ST}, Q(t) = \Phi(t,0)\mathrm{e}^{-St} \tag{2}$$

可以证明,$Q(t)$是一个周期矩阵,$Q(t+T)=Q(t)$[1].

定义 1. 矩阵 e^{ST}称为线性周期系统(1)的单值性矩阵(monodromy matrix),其特征值称为系统(1)的特征乘子(characteristic multiplier).矩阵 S 的特征值称为系统(1)的特征指数(characteristic exponents).

定理 1(Floquet 定理)[1]. 线性周期系统(1)的状态转移矩阵 $\Phi(t,0)$可以表示为

$$\Phi(t,0) = Q(t)\mathrm{e}^{St}, \quad Q(t+T) = Q(t) \tag{3}$$

根据 Floquet 定理可知,线性周期系统的状态转移矩阵是一个周期矩阵和一个指数矩阵的乘积,系统稳定性完全由指数矩阵决定.

推论 1. 如果线性周期系统的所有特征乘子都位于复平面的单位圆内或所有的特征指数都位于复平面左半平面,则线性周期系统是渐近稳定的.

特征乘子或特征指数对于线性周期系统的作用如同特征值在线性定常系统中的作用.基于线性定常系统的特征值配置思想,在设计线性周期系统的控制器时,也希望可以配置线性周期系统的特征乘子或特征指数.此问题可以表述如下.

对于下面线性周期系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \quad A(t) = A(t+T), \quad B(t) = B(t+T) \tag{4}$$

上式中 $\boldsymbol{x}\in R^n$,$\boldsymbol{u}\in R^m$;$A(t)$,$B(t)$分别是 $h\times n$ 和 $h\times m$ 维时变矩阵,并假设它们的元素都解析.

设计周期时变的状态反馈

$$\boldsymbol{u} = K(t)\boldsymbol{x}, \quad K(t) = K(t+T) \tag{5}$$

使闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [A(t) + B(t)K(t)]\boldsymbol{x} \tag{6}$$

具有期望的特征乘子或特征指数.

由于线性周期系统的特征乘子和特征指数是等价的,为了叙述方便,本文以后在不引起混淆的情况下,统一称它们为线性周期系统的极点.关于线性周期系统的极点配置问题,前人已经做过大量研究[2~7],但是这些工作大部分是基于离散系统.对于连续线性周期系统,这方面的工作还比较少.本文对连续线性周期系统的极点配置问题进行研究,重点回答下面两个问题.

问题 1. 线性周期系统(4)满足什么条件时,它的极点可以任意配置?

问题 2. 如何配置线性周期系统的极点?

在解决以上两个问题时,本文使用了块能控标准形和旋转变换.

2 块能控标准形的极点配置

因为无法给出一般线性周期系统的单值性矩阵的闭合表达式，所以首先考察一类特殊的线性周期系统——块能控标准形. 块能控标准形的概念首先由 Lukyanov 提出[8]，将其应用于线性周期系统可定义如下.

定义 2. 具有如下形式的线性周期系统称为块能控标准形.

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_r = A_{r,r}(t)\boldsymbol{x}_r + B_{r,r-1}(t)\boldsymbol{x}_{r-1} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_i = \sum\limits_{\alpha=i}^{r} A_{i,\alpha}(t)\boldsymbol{x}_\alpha + B_{i,i-1}(t)\boldsymbol{x}_{i-1}, \quad i = 2,3,\cdots,r-1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} A_{1,\alpha}(t)\boldsymbol{x}_\alpha + B_{10}(t)\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_r \quad \boldsymbol{x}_{r-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_1]^{\mathrm{T}}$，$x_i \in R^{ni}$，$A_{i,j}(t)$，$B_{i,i-1}(t)$满足：

1) $A_{i,j}(t)$，$B_{i,i-1}(t)$的各元素解析；

2) $A_{i,j}(t) = A_{i,j}(t+T)$，$B_{i,i-1}(t) = B_{i,i-1}(t+T)$；

3) $B_{i,i-1}(t)$是行满秩矩阵，$\mathrm{rank}[B_{i,i-1}(t)] = n_i$，$\forall\, t \geqslant 0$.

在块能控标准形中，各个块的维数 n_i组成向量$[n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_r]$，称为能控指数向量，在下一节还要对其进一步说明.

定理 2. 对于块能控标准形(7)，存在状态反馈

$$\boldsymbol{u} = K(t)\boldsymbol{x}, \quad K(t) = K(t+T) \tag{8}$$

使得闭环反馈系统在共扼特征极点成对出现的条件下，极点可以任意配制.

证明. 首先令 $\boldsymbol{y}_r = \boldsymbol{x}_r$，由式(7)第一行可得

$$\dot{\boldsymbol{y}}_r = A_{r,r}(t)\boldsymbol{y}_r + B_{r,r-1}(t)\boldsymbol{x}_{r-1} \tag{9}$$

若将 $\boldsymbol{x}_{r-1}$看成是式(9)的虚拟输入，令

$$\boldsymbol{x}_{r-1} = K_{r-1,r}(t)\boldsymbol{y}_r + \boldsymbol{y}_{r-1}, \quad K_{r-1,r}(t) = B^{+}_{r,r-1}[N_r - A_{rr}(t)] \tag{10}$$

这里 $B^{+}_{i+1,i}$是 $B_{i+1,i}$的 Moor-Penrose 伪逆；$B^{+}_{i+1,i}(t) = B^{\mathrm{T}}_{i+1,i}(t)[B_{i+1,i}(t)B^{\mathrm{T}}_{i+1,i}(t)]^{-1}$；$N_r$是常值方阵，由设计者选定.

将式(10)代入式(9)，有

$$\dot{\boldsymbol{y}}_r = N_r\boldsymbol{y}_r + B_{r,r-1}(t)\boldsymbol{y}_{r-1} \tag{11}$$

其次再看 $\dot{\boldsymbol{y}}_{r-1}$，由式(10)可得

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{r-1} = \dot{\boldsymbol{x}}_{r-1} - \dot{K}_{r-1,r}(t)\boldsymbol{y}_r - K_{r-1,r}(t)\dot{\boldsymbol{y}}_r \tag{12}$$

将式(7)的第二行和式(11)代入式(12)中的 $\dot{\boldsymbol{x}}_{r-1}$和 $\dot{\boldsymbol{y}}_r$，可得

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{r-1} = C_{r-1,r}(t)\boldsymbol{y}_r + C_{r-1,r-1}(t)\boldsymbol{y}_{r-1} + B_{r-1,r-2}(t)\boldsymbol{x}_{r-2} \tag{13}$$

其中

$$C_{r-1,r}(t) = A_{r-1,r}(t) + A_{r-1,r-1}(t)K_{r-1,r}(t) - \dot{K}_{r-1,r}(t) - K_{r-1,r}N_r \tag{14a}$$

$$C_{r-1,r-1}(t) = A_{r-1,r-1}(t) + K_{r-1,r}(t)B_{r,r-1}(t) \tag{14b}$$

若将 $\boldsymbol{x}_{r-2}$看成是式(13)的虚拟输入，令

$$\boldsymbol{x}_{r-2} = K_{r-2,r}(t)\boldsymbol{y}_r - K_{r-2,r-1}(t)\boldsymbol{y}_{r-1} + \boldsymbol{y}_{r-2} \tag{15}$$

其中

$$K_{r-2,r}(t)=-B^{+}_{r-1,r-2}(t)C_{r-1,r}(t),\quad K_{r-2,r-1}(t)=B^{+}_{r-1,r-2}[N_{r-1}-C_{r-1,r-1}(t)] \tag{16}$$

将式(15)代入式(13)，得到

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{r-1}=N_{r-1}\boldsymbol{y}_{r-1}+B_{r-1,r-2}(t)\boldsymbol{y}_{r-2}$$

依此类推，从上到下逐层化简，最终可以将块能控标准形化成如下形式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}_i=N_i\boldsymbol{y}_i+B_{i,i-1}(t)\boldsymbol{y}_{i-1}, & i=2,3,\cdots,r\\ \dot{\boldsymbol{y}}_1=\sum\limits_{\alpha=1}^{r}C_{1\alpha}(t)\boldsymbol{y}_\alpha+B_{10}(t)\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{17}$$

最后，对于系统(17)设计状态反馈

$$\boldsymbol{u}=\sum_{\alpha=1}^{r}K_{0\alpha}(t)\boldsymbol{y}_\alpha \tag{18}$$

其中

$$K_{01}(t)=-B^{+}_{10}(t)[C_{11}-N_1],\quad K_{0\alpha}(t)=-B^{+}_{10}(t)C_{1\alpha}(t),\ \alpha=2,3,\cdots,r \tag{19}$$

显然，矩阵 $K_{0\alpha}(t)$ 是周期时变的，$K_{0\alpha}(t)=K_{0\alpha}(t+T)$. 将控制规律(18)代入系统(17)，可得闭环系统的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}_i=N_i\boldsymbol{y}_i+B_{i,i-1}(t)\boldsymbol{y}_{i-1}, & i=2,3,\cdots,r\\ \dot{\boldsymbol{y}}_1=N_1\boldsymbol{y}_1\end{cases} \tag{20}$$

根据状态转移矩阵定义可知，系统(20)的的单值性矩阵

$$\Phi(T,0)=\begin{bmatrix}e^{N_1T} & \times & \cdots & \times\\ 0 & e^{N_2T} & \cdots & \times\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{N_rT}\end{bmatrix} \tag{21}$$

显然系统的特征乘子为

$$\Sigma_1=\sigma(e^{N_1T})\cup\sigma(e^{N_2T})\cup\cdots\cup\sigma(e^{N_rT}) \tag{22}$$

特征指数为

$$\Sigma_2=\sigma(N_1)\cup\sigma(N_2)\cup\cdots\cup\sigma(N_r) \tag{23}$$

上式中 Σ_1 是特征乘子集合，Σ_2 是特征指数集合，$\sigma(A)$ 表示矩阵 A 的特征值集合. 因为矩阵 N_r 由设计者给定，所以块能控标准形的极点可以任意配置.　　证毕.

在证明定理 2 的同时也给出了块能控标准形的极点配置方法. 用递推形式，首先令 $\boldsymbol{y}=L^{-1}(t)\boldsymbol{x}$，$L(t)$ 是周期时变的李雅普诺夫变换(李雅普诺夫变换定义见文献[9])，具有如下形式

$$L(t)=-\begin{bmatrix}K_{r,r} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ K_{r-1,r} & K_{r-1,r-1} & 0 & \cdots & 0\\ K_{r-2,r} & K_{r-2,r-1} & K_{r-2,r-2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ K_{1,r} & K_{1,r-1} & K_{1,r-2} & \cdots & K_{1,1}\end{bmatrix} \tag{24}$$

其中 $K_{i,\alpha}\in R^{n_i\times n_\alpha}$ 的计算方法如下：

1) 当 $i>\alpha$，$K_{i,\alpha}(t)=0$；

2) 当 $i=\alpha$，$K_{i,i}(t)=I_{ni\times ni}$，为常值单位阵；

3) 当 $i<\alpha$，$K_{i,\alpha}(t)$ 按下式递推计算获得

$$K_{i,\alpha}(t) = B_{i+1,i}^{+}(t)\Big[\dot{K}_{i+1,\alpha}(t) + K_{i+1,\alpha}(t)N_\alpha + K_{i+1,i+1}(t)B_{\alpha+1,\alpha}(t) - \sum_{\beta=i+1}^{\alpha} A_{i+1,\beta}(t)K_{\beta,\alpha}(t)\Big] \tag{25}$$

然后,按照下面公式设计状态反馈

$$K_{0\alpha}(t) = -B_{10}^{+}(t)\Big[\dot{K}_{1\alpha}(t) + K_{1\alpha}(t)N_\alpha + K_{1,\alpha+1}(t)B_{\alpha+1,\alpha}(t) - \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_{1\beta}(t)K_{\beta\alpha}(t)\Big],$$

$$\alpha = 2,3,\cdots,r \tag{26a}$$

$$K_{01}(t) = -B_{10}^{+}(t)[K_{12}(t)B_{21}(t) + A_{11}(t) - N_1] \tag{26b}$$

以上递推过程可以编成标准程序在计算机上实现.

3 块能控标准形的化简

在解决块能控标准形的极点配置问题以后,接下来需要研究如何将一般线性周期系统化成块能控标准形,为此需回答以下两个问题.

问题 3. 线性周期系统和块能控标准形李雅普诺夫等价的条件是什么?

问题 4. 如何将线性周期系统化简成块能控标准形?

本节对上述两个问题进行讨论. 对一般线性周期系统可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \quad A(t) = A(t+T), \quad B(t) = B(t+T). \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n, \boldsymbol{u}\in R^m, A(t), B(t)$ 分别是 $h\times n$ 和 $h\times m$ 维时变矩阵,并假设它们的元素都解析. 记

$$P_{k+1}(t) = -A(t)P_k(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t)}P_k(t), \quad P_1(t) = B(t) \tag{28}$$

定义矩阵

$$U_k(t) = [P_1(t) \vdots P_2(t) \vdots \cdots \vdots P_k(t)] \tag{29}$$

设 $l_k(t) = \mathrm{rank}[U_k(t)]$. 显然对任意时刻 t, $l_k(t)$ 随 k 递增且有界. 存在正数 r, 使得 $l_{k+1}(t) = l_k(t)$, 当 $k\geqslant r$ 时.

令 $l_0(t) = 0$, 定义

$$n_k(t) = l_k(t) - l_{k-1}(t) \tag{30}$$

称向量 $[n_1(t) \quad n_2(t) \quad \cdots \quad n_r(t)]$ 为线性周期系统(27)的能控指数向量.

引理 1. 等价线性周期系统的能控指数向量相同.

证明. 对线性周期系统(27)做任意等价变换 $\boldsymbol{y} = M(t)\boldsymbol{x}$, 变换后的系统为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \overline{A}(t)\boldsymbol{y} + \overline{B}(t)\boldsymbol{u} \tag{31}$$

其中

$$\overline{A}(t) = [M(t)A(t) + \dot{M}(t)]M(t), \quad \overline{B}(t) = M(t)B(t) \tag{32}$$

对于系统(31), 根据式(28)可以计算得到

$$\overline{P}_1(t) = \overline{B}(t) = M(t)B(t)$$

$$\overline{P}_2(t) = -\overline{A}(t)\overline{P}_1(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{P}_1(t) = M(t)[-A(t)P_1(t) + \dot{P}_1(t)] = M(t)P_2(t)$$

$$\cdots$$

$$\overline{P}_k(t) = M(t)P_k(t)$$

所以 $\overline{U}_k(t) = M(t)U_k(t)$. 因为 $M(t)$ 是等价变换, 所以 $\mathrm{rank}[\overline{U}_k(t)] = \mathrm{rank}[U_k(t)]$. 根据能

控指数向量的定义易知，系统(27)和(31)具有相同的能控指数向量.　证毕.

定义 3. 对于线性周期系统(27)，如果它的能控指数向量满足 $\forall t\geqslant 0, \sum_{i=1}^{r} n_i(t)=n$，则称线性周期系统是瞬时能控的[1)].

对于系统(27)，因为 $A(t)$，$B(t)$是解析的，所以能控指数向量一定分段为常值向量.

定理 3. 线性周期系统(27)和块能控标准形(8)李雅普诺夫等价的充分必要条件是，系统(27)是瞬时能控的且它的能控指数向量是常值.

证明. 首先证明充分性. 假设系统(27)是瞬时能控的且它的能控指数向量是常值. 由能控指数向量定义可知 $\mathrm{rank}[B(t)]=n_1>0$，存在李雅普诺夫变换 $M(t)$，使得变换后的系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_2\\ \dot{\boldsymbol{y}}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{22}(t) & \widetilde{B}_2(t)\\ \widetilde{A}_{12}(t) & A_{11}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{y}}_2\\ \boldsymbol{y}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ B_{10}(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{33}$$

其中$[\tilde{\boldsymbol{y}}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=M(t)\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}_1\in R^{n_1}$，$B_{10}(t)$行满秩，$\mathrm{rank}[B_{10}(t)]=n_1$. 在下一节将详细说明如何计算李雅普诺夫变换 $M(t)$.

对于系统(33)，由能控指数向量定义可知 $\mathrm{rank}[\widetilde{B}_2(t)]=n_2$. 若 $n_2<n-n_1$，对系统$\{\widetilde{A}_{22},\widetilde{B}_2(t)\}$可以继续做类似的变换. 根据能控指数向量定义，在变换过程中总有 $\mathrm{rank}[\widetilde{B}_i(t)]=n_i$，所以类似变换可以一直进行，直到$\sum_{i=1}^{r} n_i=n$. 此时系统(27)便化成如下的块能控标准形

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}_r=A_{r,r}(t)\boldsymbol{y}_r+B_{r,r-1}(t)\boldsymbol{y}_{r-1}\\ \dot{\boldsymbol{y}}_i=\sum_{\alpha=i}^{r}A_{i,\alpha}(t)\boldsymbol{y}_\alpha+B_{i,i-1}(t)\boldsymbol{y}_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,r-1\\ \dot{\boldsymbol{y}}_1=\sum_{\alpha=1}^{r}A_{1,\alpha}(t)\boldsymbol{y}_\alpha+B_{10}(t)\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{34}$$

再证必要性. 假设块能控标准形(8)和系统(27)等价，根据引理 1 二者的能控指数向量相同. 因为块能控标准形(8)的能控指数向量为$[n_1\quad n_2\quad\cdots\quad n_r]$，且$\sum_{i=1}^{r} n_i=n$(即瞬时能控的且它的能控指数向量是常值). 所以系统(27)也瞬时能控的且它的能控指数向量是常值.

证毕.

定理 3 直接回答了问题 3，同时在定理 3 充分性的证明过程中也回答了问题 4. 由定理 2 和 3 可以直接得到下面推论.

推论 2. 对于线性周期系统(27)，如果它瞬时能控且它的能控指数向量是常值，则存在状态反馈

$$\boldsymbol{u}=K(t)\boldsymbol{x},\quad K(t)=K(t+T),$$

使得闭环反馈系统在共扼极点成对出现的条件下，极点可以任意配制.

推论 2 给出了问题 1 的一个充分条件.

4　旋转变换

将一般线性周期系统化简为块能控标准形，关键是要解决下面问题.

1) 这里瞬时能控的定义和文献[9]中的定义叙述不同，但是二者的本质是相同的.

问题 5. 对于 $n\times m$ 维矩阵 $B(t)$，如果 $B(t)=B(t+T)$，所有元素都解析，$\forall t\geqslant 0$，$\mathrm{rank}[B(t)]=r>0$，如何得到李雅普诺夫变换 $M(t)$，使得

$$M(t)B(t)=\begin{bmatrix}0\\ \bar{B}(t)\end{bmatrix} \tag{35}$$

其中 $\bar{B}(t)$ 是行满秩矩阵，$\mathrm{rank}[\bar{B}(t)]=r$，$\forall t\geqslant 0$.

如果 B 是定常矩阵，用高斯消元法很容易解决此问题. 但是当 B 是周期时变矩阵时，很多情况下高斯消元法无法保证变换是连续的. 例如，数组 $\boldsymbol{b}(t)=[\sin t\quad \cos t]^{\mathrm{T}}$，由于 $\sin t$，$\cos t$ 都可能等于零，所以无论用 $\sin t$ 消去 $\cos t$ 还是用 $\cos t$ 消去 $\sin t$，都不可能在整个周期中连续实现. 其次由式(32)可知，对于周期时变系统，在变换过程中需要计算矩阵 $M^{-1}(t)$ 和 $\dot{M}(t)M^{-1}(t)$ 在一个周期中的变化，而一般变换的上述计算很困难. 为此，本文提出旋转变换.

定义 4. 如果单位正交矩阵的行列式等于 1，则称之为旋转矩阵，它所对应的变换称之为旋转变换.

定义 5. 如果 n 维数组 $\boldsymbol{a}(t)=[a_1(t)\quad a_2(t)\quad \cdots\quad a_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 满足：

1) $\boldsymbol{a}(t)$ 解析；2) $\boldsymbol{a}(t+T)=\boldsymbol{a}(t)$；3) $\forall t\geqslant 0$，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{a}(t)=1$，则称数组 $\boldsymbol{a}(t)$ 为单位周期向量.

定理 4. 对于单位周期向量 $\boldsymbol{a}(t)$，存在旋转矩阵 $M(t)$，使得 $M(t)\boldsymbol{a}(t)=[0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\forall t\geqslant 0$.

证明. 首先，不失一般性地假设 $\forall t\geqslant 0$，$a_{n-1}^2(t)+a_n^2(t)\neq 0$. 根据 $\boldsymbol{a}(t)$ 的元素，定义 $n-1$ 个旋转角

$$\begin{cases}\theta_1(t)=\arcsin a_1(t)\\ \theta_i(t)=\arcsin\dfrac{a_i(t)}{\prod\limits_{\alpha=1}^{i-1}\cos\theta_\alpha(t)},\quad i=2,3,\cdots,n-2\\ \theta_{n-1}(t)=\arctan 2[a_{n-1}(t),a_n(t)]\end{cases} \tag{36}$$

上式中 $-\pi/2<\theta_i(t)<\pi/2$，$i=1,2,\cdots,n-2$；$-\pi<\theta_{n-1}(t)<\pi$，$\arctan 2[x,y]$ 表示 (x,y) 在平面坐标系中的相角.

其次，由旋转角可以定义 $n-1$ 个旋转矩阵 $M_i(\theta_i)$

$$M_i(\theta_i)=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccccc}1&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&\cdots&0&\cos\theta_i&0&\cdots&0&-\sin\theta_i\\ 0&\cdots&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&1&0\\ 0&\cdots&0&\sin\theta_i&0&\cdots&0&\cos\theta_i\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \\ 第\,i\,行\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\\ \text{第}i\text{列}\end{array} \tag{37}$$

$M_i(\theta_i)$ 的第 i 行和第 n 行对角线元素等于 $\cos\theta_i$，其它对角线元素等于 1. $M_i(\theta_i)$ 的第 i 行第 n 列元素等于 $-\sin\theta_i$，第 n 行第 i 列元素等于 $\sin\theta_i$，其它非对角线元素等于 0，如式(37)所示.

最后，构造矩阵

$$M(t) = M_1(\theta_1)M_2(\theta_2)\cdots M_{n-2}(\theta_{n-2})M_{n-1}(\theta_{n-1}) \tag{38}$$

容易证明 $M(t)$ 是旋转矩阵且 $M(t)\boldsymbol{a}(t) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \forall t \geqslant 0$.　　证毕.

对于矩阵 $M_i(\theta_i)$，容易证明 $\dot{M}_i(\theta_i)M_i^{-1}(\theta_i)$ 是反对称矩阵，其第 i 行第 n 列元素等于 $-\dot{\theta}_i$，第 n 行第 i 列元素等于 $\dot{\theta}_i$，其它各元素等于零，如式(39)所示.

$$\dot{M}_i(\theta_i)M_i^{-1}(\theta_i) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -\dot{\theta}_i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dot{\theta}_i & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 第\,i\,行 \\ \\ \\ \end{array} \\ 第\,i\,列 \end{array} \tag{39}$$

对于式(38)中的旋转矩阵 $M(t)$，满足下面等式

$$\dot{M}(t)M^{-1}(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\Big[\prod_{j=1}^{i-1}M_j(\theta_j)\Big]\big[\dot{M}_i(\theta_i)M_i^{-1}(\theta_i)\big]\Big[\prod_{j=i-1}^{1}M_j^{\mathrm{T}}(\theta_j)\Big] \tag{40}$$

其中 $\dot{M}_i(\theta_i)M_i^{-1}(\theta_i)$ 是反对称矩阵，由式(39)给出.

由此可见，对于旋转矩阵，$M^{\mathrm{T}}(t)$ 可以代替 $M^{-1}(t)$；$\dot{M}(t)M^{-1}(t)$ 是一个简单的反对称阵. 所以旋转变换可以极大地简化变换过程中的计算量.

对于数组 $b(t) = [\sin t \quad \cos t]^{\mathrm{T}}$，如果使用旋转矩阵，令

$$M(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \tag{41}$$

很容易实现 $M(t)b(t) = [0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$，并且 $M(t)$ 一定是连续变换. 所以使用旋转矩阵，除了计算简单以外还可以保证变换的连续性.

根据定理 4，用旋转矩阵对 $B(t)$ 逐列进行化简，使其成为梯形阵，即可解决问题 5.

至此本文已经解决了一类线性周期系统的极点配置问题，现总结如下：

1)旋转换 $\boldsymbol{y}=M(t)\boldsymbol{x}$ 将原系统化简成块能控标准形(34)；

2)选取矩阵 $N_i \in R^{n_i \times n_i}, i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$，使得 N_i 的特征值为期望设计的极点；

3)按照递推公式(25)计算李雅普诺夫变换(24)和状态反馈(26)；

4)根据状态反馈(26)，由下式得到原系统的状态反馈矩阵 $K(t)$.

$$K(t) = [K_{0r}(t) \mid K_{0,r-1}(t) \mid \cdots \mid K_{01}(t)]L^{-1}(t)M(t) \tag{42}$$

以上计算过程可以编成标准程序在计算机上迅速实现.

至此对于能控指数向量是常值的瞬时能控的线性周期系统，我们已经解决了问题 2. 应当指出，能控指数向量是常值这个条件非常严格，对于很多线性周期系统不成立. 当能控指数向量分段是常值时，可以按照本文的方法分段设计控制器. 但是由于状态变换在一个周期中是分段连续的，所以从理论上证明系统的稳定性比较困难，还需要做进一步的工作.

5　结论

本文研究了线性周期系统的极点配置问题，证明了对于瞬时能控的线性周期系统，如果它的能控指数向量是常值，则它的极点可以任意配置. 针对这种线性周期系统，本文提出了一种在工程中实用的状态反馈计算方法. 该方法首先用旋转变换将系统化成块能控标准形，

在此基础上选定期望的特征指数，然后通过迭代算法得到状态反馈在一个周期中的变换规律. 采用此方法设计控制器，可以将设计过程编成标准程序，利于工程实现.

此方法曾应用于磁控小卫星滚动/偏航轴的控制器设计[10]，取得了良好的仿真结果.

References

1 Brockett R W. Finite Dimensional Linear System. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1970. 46～47

2 Kaczorek T. Pole Placement for linear discrete-time systems by periodic output feedbacks. *Systems and Control Letters*, 1985, **6**(4): 267～269

3 Al-Rahmani H M, Franklin G F. Linear periodic systems: eigenvalues assignment using discrete periodic feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(1): 99～103

4 Hernandez V, Urbano A. Pole-placement problem for discrete-time linear periodic systems. *International Journal of Control*, 1989, **50**(2): 361～371

5 Colaneri P. Output stabilization via pole-placement of discrete-time linear periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(6): 739～742

6 Grasselli O M, Longhi S. Robust tracking and regulation of linear periodic discrete-time systems. *International Journal of Control*, 1991, **54**(3): 613～633

7 Aeyels D, Willems J. Pole assignment for linear time-invariant systems by periodic memoryless output feedback. *Automatic*, 1992, **28**(6): 1159～1168

8 Lukyanov A G, Utkin V I. Time-varying linear system decompozed control. In: Proceeding of the American Control Conference. Philadelphia: 1998. **5**: 2884～2888

9 Chen Chi-Tsong. Linear System Theory and Design. Beijing: Science Press, 1988. 144 (in Chinese)

10 Wang Ping. Periodic PD control low design for small satellite using megnitorquers. *Chinese Space Science and Technology*, 1999, **19**(5): 14～19(in Chinese)

王 平 1992 年毕业于哈尔滨工业大学自动控制系. 1995 和 1999 年在北京控制工程研究所获得硕士和博士学位. 现工作在北京控制研究所，是航天器控制系统设计师，主要从事航天器姿态和轨道控制研究.

(**WANG Ping** Graduated from Automatic Control department of HIT in 1992, and received his master and Ph. D. degrees from Beijing Institute of Control Engineering (BICE) in 1995 and 1999. He works in BICE and is the engineer to design spacecraft control system now. His research area is spacecraft attitude and orbit control.)

李铁寿 1964 年北京大学数学力学系本科毕业，1968 年中国科学院自动化研究所研究生毕业. 长期从事航天器姿态、轨道动力学研究和控制系统总体设计工作. 现为北京控制工程研究所研究员，博士生导师.

(**LI Tie-Shou** Graduated from Department of Mathematics and Mechanics in Peking University in 1964, and received his master degree from Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences in 1968. He studies attitude and orbit dynamics of spacecraft and designs the control system of satellite for a long time. He is the professor and supervisor of PhD candidates in Beijing Institute of Control Engineering now.)

吴宏鑫 1965 年毕业于清华大学自动控制系，现在是北京控制工程研究所的研究员和博士生导师，目前主要从事智能控制、自适应控制、航天器控制领域的研究.

(**WU Hong-Xin** Graduated from the Automatic Control Department of Tsinghua University in 1965. He is the professor and supervisor of PhD candidates in Beijing Institute of Control Engineering. His research interests include Intelligent Control, adaptive control and spacecraft control.)