第30卷 第4期
2004年7月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4
July, 2004

一个新的界实准则的线性矩阵不等式表示[1)]

李 彤 贾英民
(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)
(E-mail: sx_lt@163.net)

摘 要 利用描述系统方法对状态空间系统的 H_∞ 性能进行分析,得到了一个新的界实准则的线性矩阵不等式表示.该表示所具有的分离结构在分析多面体不确定系统的鲁棒性能时,可以有效地减少分析过程的保守性.与存在的同类结果相比,克服了一些理论和数值计算上的不足.两个数值例子说明了该方法的有效性.

关键词 界实准则,线性矩阵不等式,描述系统方法,多面体不确定性,参数相关 Lyapunov 矩阵
中图分类号 TP273

Improved LMI Representation for Bounded Real Criterion of Systems with Polytope-Type Uncertainty

LI Tong JIA Ying-Min
(*7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)
(E-mail: sx_lt@163.net)

Abstract An improved LMI representation for bounded real criterion is derived by employing a descriptor system approach. Due to its decoupling property between system matrices and Lyapunov matrices, the new criterion can reduce conservatism inherent in robust performance analysis of systems with convex polytope-type uncertainty. The results exhibit some favorable features in computation through two numerical examples.

Key words Bounded real criterion, LMI, descriptor system approach, polytope-type uncertainty, parameter-dependent Lyapunov matrix

1 引言

在鲁棒控制理论的发展过程中,二次稳定是一个非常重要的概念和方法[1,2],它使得不确定系统的鲁棒稳定性分析变得易于处理.同样,基于界实引理(BRL)对系统进行鲁棒 H_∞ 性能分析时,通常也要求对所有允许的不确定参数,系统存在一个统一的 Lyapunov 函数[3,4].然而,由此导出的结果必然具有较大的保守性.这就限制了二次稳定方法在鲁棒控

1) 国家自然科学基金(60374001,60334030)和国家教育部高校博士点基金(20030006003)资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60374001,60334030) and the University Doctoral Foundation of Chinese State Education Commission(20030006003)
收稿日期 2002-11-12 收修改稿日期 2003-03-27
Received November 12, 2002; in revised form March 27, 2003

制领域中的应用,尤其是在那些需要对系统的鲁棒性能作出较为精确刻划的场合.

为了减少这种保守性,许多学者进行了参数相关的 Lyapunov 函数的研究,并取得了一定的成果,参见文献[5~7]及其相关文献.其中一种思路就是:通过引入辅助变量将标称系统性能准则中正定的 Lyapunov 矩阵与系统矩阵的乘积分离,再将分离后的准则应用于凸多面体不确定系统的所有顶点以获得鲁棒性能准则,所得结果被证明具有较小的保守性.文献[5]的工作在这方面是具有开创性的,它研究了离散时间系统的分离的稳定性准则;文献[6]利用逆投影定理将上述结果推广到连续时间系统及 H_2 性能准则;文献[7]则进一步通过引入一个取值必须充分小的标量参数 ε,对于严格正则的对象,获得了具有分离特征的 H_∞ 性能准则(即界实准则).然而,正是由于这个 ε 的存在破坏了条件的线性性,给数值验证以及 H_∞ 性能指标的优化带来了困难.同时,对于 $D\neq 0$ 的情况,条件并不能简单地推广.针对以上这些不足之处,本文尝试给出一些新的结果.

首先,从最近常用于研究时滞系统的描述系统方法[8,9]出发,将所研究的状态空间系统等价转化为一个特定的描述系统;然后,基于描述系统的 Lyapunov 方法对转化模型进行 H_∞ 性能分析,给出了一种新的具有分离特征的界实准则,同时又根据描述系统的相关性质构造性地证明了所得界实准则的必要性.需要指出的是,类似的构造性方法在文献[10]中出现过.另外,本文还考虑了基于这种新的界实准则的状态反馈控制问题,获得了相应的综合结果.所作的两个数值算例也显示出本文结果具有较小的保守性.

2 问题的形成及预备知识

考虑如下的受扰线性系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{z} &= C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态变量;$\boldsymbol{w}\in R^m$ 是属于空间 $L_2[0,\infty]$ 的能量有限的扰动信号;$\boldsymbol{z}\in R^p$ 为评价信号;A,B,C,D 为给定的适维系统矩阵.

引理 1[8,11]. 给定正数 $\gamma>0$,记 $T_{zw}(s):=C(sI-A)^{-1}B+D$,则

1) 系统(1)对应的自治系统(即 $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$)是渐近稳定的,如果存在矩阵 $P_1=P_1^{\mathrm{T}}>0$,P_2 和 P_3 使得下列的线性矩阵不等式(LMI)成立:

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P_2+P_2^{\mathrm{T}}A & P_1-P_2^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}P_3 \\ P_1-P_2+P_3^{\mathrm{T}}A & -P_3-P_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}<0 \tag{2}$$

2) 系统(1)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件是存在矩阵 $P_1=P_1^{\mathrm{T}}>0$ 使得下列的线性矩阵不等式(LMI)成立.

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P_1+P_1A & P_1B & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P_1 & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix}<0 \tag{3}$$

上述引理中正定的矩阵 P_1 在文献中也被称为 Lyapunov 矩阵,条件(3)通常被称为界实准则.比较引理 1 中的两个线性矩阵不等式条件可以看出,虽然 LMI(3)可用于分析系统的干扰抑制性能 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$,而 LMI(2)只能用于分析稳定性,然而式(2)在结构上却有一个突出的特点:它不包含诸如 P_1A,P_1B 这样的 Lyapunov 矩阵与系统矩阵的乘积项.这种分离结构尤其适合于分析含有下述凸多面体不确定性的系统

$$\Omega_1 := \left\{(A,B,C,D) \mid (A,B,C,D) = \sum_{i=1}^{N}\tau_i(A_i,B_i,C_i,D_i);\tau_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{N}\tau_i = 1\right\} \quad (4)$$

其中$(A_i,B_i,C_i,D_i)(i=1,\cdots,N)$是多面体的 N 个已知的顶点. 利用条件(2)可以给出如下的鲁棒稳定准则

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm T}P_2 + P_2^{\mathrm T}A_i & P_1^{(i)} - P_2^{\mathrm T} + A_i^{\mathrm T}P_3 \\ P_1^{(i)} - P_2 + P_3^{\mathrm T}A_i & -P_3 - P_3^{\mathrm T} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1,\cdots,N$$

注意到在上述条件中 Lyapunov 矩阵 P_1 是随着多面体的顶点变化的，从而可以容易地获得一个参数依赖的 Lyapunov 函数$\sum_{i=1}^{N}\tau_i P_1^{(i)}$. 而在式(3)中由于存在前述的乘积项，则对所有的不确定参数只能得到一个固定的 Lyapunov 函数. 文献[7]中已经证明，这样的二次条件相对要保守得多.

至此，一个很自然的问题就是：方程(3)是否也具有与方程(2)相似的分离结构？这也正是本文的出发点. 先介绍几个关于描述系统的概念. 考虑如下一般形式的线性时不变描述系统

$$E\dot{\xi} = A\xi \quad (5)$$

其中 $\xi\in R^n$ 为描述变量，$E,A\in R^{n\times n}$均为常量阵并且 $\operatorname{rank}E=r\leqslant n$.

定义 1. 1) 称系统(5)是正则的，如果 $\det(sE-A)$不恒等于零；2) 称系统(5)是无脉冲的，如果 $\deg[\det(sE-A)]=\operatorname{rank}E$；3) 称系统(5)是稳定的，如果方程 $\det(sE-A)=0$ 的根均具有负实部；4) 称系统(5)是容许的(admissible)，如果它是正则的、无脉冲的和稳定的.

正如文献[12]中所指出的，描述系统的正则性保证了方程(5)的解对任意的初始条件均是存在和唯一的，无脉冲则意味着系统(5)是因果的.

3　主要结果

3.1　界实准则

定义微分信号 $\boldsymbol{y}:=\dot{\boldsymbol{x}}$，并记描述系统变量为 $\boldsymbol{\xi}:=[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\quad \boldsymbol{y}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$，则式(1)可等价转化为

$$\begin{aligned} E\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \bar{A}\boldsymbol{\xi} + \bar{B}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} &= \bar{C}\boldsymbol{\xi} + D\boldsymbol{w} \end{aligned} \quad (6)$$

的描述系统形式，其中系数矩阵

$$E := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} := \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -I \end{bmatrix}, \quad \bar{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{C} := [C \quad 0] \quad (7)$$

定理 1. 给定 $\gamma>0$，系统(1)内部稳定且满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件为存在 $P_1=P_1^{\mathrm T}>0,P_2,P_3$ 使得下列 LMI 成立.

$$\begin{bmatrix} P_2^{\mathrm T}A + A^{\mathrm T}P_2 & P_1 - P_2^{\mathrm T} + A^{\mathrm T}P_3 & P_2^{\mathrm T}B & C^{\mathrm T} \\ P_1 - P_2 + P_3^{\mathrm T}A & -P_3 - P_3^{\mathrm T} & P_3^{\mathrm T}B & 0 \\ B^{\mathrm T}P_2 & B^{\mathrm T}P_3 & -\gamma I & D^{\mathrm T} \\ C & 0 & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

证明. 设系统(1)内部稳定且满足 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$. 显然，由式(1)内部稳定知描述系统(6)是容许的. 于是，存在可逆阵 $M,N\in R^{2n\times 2n}$使得[13]

$$MEN=\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix},\quad M\bar{A}N=\begin{bmatrix}A&0\\0&I\end{bmatrix}\tag{9}$$

将 E 和 $\bar{A}$ 的表达式(7)代入方程(9),从中解得

$$M=\begin{bmatrix}I&I\\0&-I\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}M_1\\M_2\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}I&0\\A&I\end{bmatrix}:=[N_1\quad N_2]\tag{10}$$

从而

$$M\bar{B}=[B^{\mathrm{T}}\quad -B^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad \bar{C}N=[C\quad 0]\tag{11}$$

由 A 是 Huwitz-稳定且 $\|C(sI-A)^{-1}B+D\|_\infty<\gamma$,根据引理 1 经过简单的推导可得存在 $Q_1>0$,使得

$$\begin{bmatrix}AQ_1+Q_1A^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}} & Q_1C^{\mathrm{T}}+BD^{\mathrm{T}}\\ CQ_1+DB^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}}-\gamma^2I\end{bmatrix}<0$$

令 $Z:=BB^{\mathrm{T}}+\alpha I$,其中 $\alpha>0$. 注意到上述不等式的严格性,则当 α 足够大时亦有

$$\begin{bmatrix}\Xi_1 & \Xi_2\\ \Xi_2^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}}-\gamma^2I\end{bmatrix}<0\tag{12}$$

其中 $\Xi_1:=\begin{bmatrix}AQ_1+Q_1A^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & -Z-\alpha I\end{bmatrix}$, $\Xi_2:=\begin{bmatrix}Q_1C^{\mathrm{T}}+BD^{\mathrm{T}}\\ -BD^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$. 进一步,可以验证下面两个等式

$$\Xi_1=M(\bar{A}\bar{Q}+\bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}})M^{\mathrm{T}}$$

$$\Xi_2=M(\bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}}+\bar{B}D^{\mathrm{T}})$$

成立,其中 $\bar{Q}:=N\begin{bmatrix}Q_1 & -\alpha I\\ -\alpha I & 0\end{bmatrix}N^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}+N_2(-Z)M_2=\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ AQ_1-\alpha I & Z\end{bmatrix}$. 于是式(12)变为

$$\begin{bmatrix}M&0\\0&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{A}\bar{Q}+\bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} & \bar{Q}^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}}+\bar{B}D^{\mathrm{T}}\\ \bar{C}\bar{Q}+D\bar{B}^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}}-\gamma^2I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M^{\mathrm{T}}&0\\0&I\end{bmatrix}<0$$

取 $\bar{P}:=\bar{Q}^{-1}$,经合同变换、Schur 补以及简单的配方可得上式等价于

$$\hat{P}^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}\hat{P}+\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C}+(\hat{P}^{\mathrm{T}}\bar{B}+\bar{C}^{\mathrm{T}}D)(\gamma^2I-D^{\mathrm{T}}D)^{-1}(\bar{B}^{\mathrm{T}}\hat{P}+D^{\mathrm{T}}\bar{C})<0$$

其中 $\hat{P}:=\gamma^2\bar{P}$. 取 $P:=\gamma^{-1}\hat{P}=\gamma\bar{P}=\gamma\bar{Q}^{-1}:=\begin{bmatrix}P_1&0\\P_2&P_3\end{bmatrix}$,其中 $P_1=\gamma Q_1^{-1}>0$,则经 Schur 补和简单的标定后可得

$$\begin{bmatrix}P^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}P & P^{\mathrm{T}}\bar{B}\\ \bar{B}^{\mathrm{T}}P & -\gamma I\\ \bar{C} & D\end{bmatrix}<0$$

上式按块乘开后即是式(8),必要性得证. 充分性的证明与文献[9]类似,这里从略. 证毕.

当系统矩阵(A,B,C,D)为不确定矩阵且取值于给定的凸多面体集合 Ω_1 时,基于定理 1 可以导出如下的鲁棒性能准则. 为简单起见,省略了它的证明过程.

推论 1. 取值于 Ω_1 的凸多面体不确定系统(1)鲁棒稳定且满足 H_∞ 性能指标 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分条件是,存在 $P_1^{(i)\mathrm{T}}=P_1^{(i)}>0, i=1,\cdots,N, P_2, P_3$ 使得下列一族 LMIs 成立.

$$\begin{bmatrix}P_2^{\mathrm{T}}A_i+A_i^{\mathrm{T}}P_2 & P_1^{(i)}-P_2^{\mathrm{T}}+A_i^{\mathrm{T}}P_3 & P_2^{\mathrm{T}}B_i & C_i^{\mathrm{T}}\\ P_1^{(i)}-P_2+P_3^{\mathrm{T}}A_i & -P_3-P_3^{\mathrm{T}} & P_3^{\mathrm{T}}B_i & 0\\ B_i^{\mathrm{T}}P_2 & B_i^{\mathrm{T}}P_3 & -\gamma I & D_i^{\mathrm{T}}\\ C_i & 0 & D_i & -\gamma I\end{bmatrix}<0,\quad i=1,\cdots,N\tag{13}$$

注 1. 文献[7]中亦给出了一个类似的改进了的界实条件(corollary 2.4)，但该条件依赖于一个必须保持充分小的标量参数 ϵ 且对 ϵ 是非线性的，这给数值验证及指标优化带来一定的困难和许多额外的计算量. 本文中的条件(8)则对所有涉及到的变量均是线性的，从而改进了文献[7]中的结论. 另外，文献[7]中的方法对于 $D\neq 0$ 的情况并不能简单地推广.

3.2　在状态反馈控制问题中的应用

这里将上节所得结果应用于 H_∞ 控制问题. 设受控对象方程由下式

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B_2\boldsymbol{u} + B_1\boldsymbol{w};\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{z} &= C\boldsymbol{x} + D_2\boldsymbol{u} + D_1\boldsymbol{w}\end{aligned}\tag{14}$$

给出，其中 $\boldsymbol{u}$ 为待设计的控制信号，其余信号的含义同前. 考虑状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$，则闭环系统的方程如下

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \bar{A}\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{z} &= \bar{C}\boldsymbol{x} + D_1\boldsymbol{w}\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $\bar{A}:=A+B_2K,\bar{C}:=C+D_2K$. 这里所要研究的问题是，设计状态反馈增益 K 使得闭环系统内部稳定且从干扰信号 $\boldsymbol{w}$ 到评价信号 $\boldsymbol{z}$ 的闭环传递函数 $T_{zw}(s)$ 的 H_∞ 范数小于指定的正数 γ.

定理 2. 给定 $\gamma>0$，存在状态反馈 $u=Kx$ 使得闭环系统(15)内部稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件是存在适维矩阵 $Q_1^{\mathrm T}=Q_1>0,Q_2,Q_3$ 及 Y，使得下列的 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} Q_2+Q_2^{\mathrm T} & Q_3-Q_2^{\mathrm T}+Q_1A^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T} & 0 & Q_1C^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}D_2^{\mathrm T}\\ Q_3^{\mathrm T}-Q_2+AQ_1+B_2Y & -Q_3-Q_3^{\mathrm T} & B_1 & 0\\ 0 & B_1^{\mathrm T} & -\gamma I & D_1^{\mathrm T}\\ CQ_1+D_2Y & 0 & D_1 & -\gamma I\end{bmatrix}<0\tag{16}$$

如果上述条件成立，那末状态反馈增益 K 可由式 $K=YQ_1^{-1}$ 给出.

证明. 定义可逆阵 $U:=\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 & 0 & 0\\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{bmatrix}$. 由定理 1 写出闭环系统(15)的分离的界实条件，对之用 U 作合同变换，然后再作可逆的变量代换 $P_1^{-1}=Q_1,P_3^{-1}=Q_3,-Q_3P_2Q_1=Q_2$ 及 $KQ_1=Y$，即可得式(16).　　证毕.

当受控对象的系统矩阵属于一个给定的凸多面体集 $\Omega_2:=\Big\{(A,B_1,B_2,C,D_1,D_2)\,\Big|\,(A,B_1,B_2,C,D_1,D_2)=\sum_{i=1}^{N}\tau_i(A_i,B_{1,i},B_{2,i},C_i,D_{1,i},D_{2,i});\tau_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{N}\tau_i=1\Big\}$ 时，类似于推论 1，可得如下的推论(证明过程略).

推论 2. 给定 $\gamma>0$，存在状态反馈增益 K 使得系统(14)在不确定集合 Ω_2 上是鲁棒稳定且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分条件为存在适维的矩阵 $Q_1>0,Q_2^{(i)},Q_3^{(i)},i=1,\cdots,N$ 及 Y 使得下列的一族 LMIs($i=1,\cdots,N$)成立.

$$\begin{bmatrix} Q_2^{(i)}+Q_2^{(i)\mathrm T} & Q_3^{(i)}-Q_2^{(i)\mathrm T}+Q_1A_i^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B_{2,i}^{\mathrm T} & 0 & Q_1C_i^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}D_{2,i}^{\mathrm T}\\ Q_2^{(i)\mathrm T}-Q_2^{(i)}+A_iQ_1+B_{2,i}Y & -Q_3^{(i)}-Q_2^{(i)\mathrm T} & B_{1,i} & 0\\ 0 & B_{1,i}{}^{\mathrm T} & -\gamma I & D_{1,i}{}^{\mathrm T}\\ C_iQ_1+D_{2,i}Y & 0 & D_{1,i} & -\gamma I\end{bmatrix}<0,$$

$$i=1,\cdots,N$$

如果上述条件成立,则满足要求的鲁棒反馈增益 K 可由式 $K=YQ_1^{-1}$ 给出.

注 2. 不同于推论 1,在上述条件中 Q_2,Q_3 两个可逆的变量由于与系统矩阵分离而得以随多面体顶点变化,但正定矩阵 Q_1 由于和系统矩阵乘在一起而必须对所有顶点保持一致.

4 数值算例

例 1. 考虑文献[7]中研究的一个例子:$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1+g & -1-g\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $C=[1\quad -2]$,其中 g 为一个取值于$[-g_1,g_1]$的区间参数. 表 1 分别列出了标称情况下以及参数摄动时由本文方法和文献[7]方法所得结果的比较,其中 γ^* 为能够保证的最小的 H_∞ 性能指标值.

表 1 两种分析条件所得结果的比较

Table 1 Comparison between two analysis conditions

参数摄动范围		$g_1=0$	$g_1=0.3777$	$g_1=0.681$
本文的 γ^*		0.2484	3.4956	6.7207
文献[7]中的 γ^*	$\varepsilon=0.01$	0.2743	4.5386	33.1317
	$\varepsilon=0.001$	0.2510	4.8046	86.4597
	$\varepsilon=0.0001$	0.2468	4.9337	252.9883

由表 1 中数据可以看出,在标称情况下($g_1=0$),只有当参数 ε 取到足够小文献[7]的优化结果才能与本文相媲美,然而,这时由于文献[7]的条件中含有 ε^{-1}项,很有可能造成数值溢出. 而在参数摄动的情况下($g_1=0.3777$ 和 $g_1=0.681$),本文所得优化结果则明显优于文献[7],而且随着摄动范围的增加这种优越性就越明显. 这正说明了文献[7]中由于 ε 的非线性所带来的结果的保守性.

例 2. 考虑人造卫星系统的偏摆角的控制问题[7]. 两个相互铰接的刚体的偏摆角 θ_1,θ_2 的动态方程由式

$$\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -0.2 & 0.2 & -f & f\\ 0.2 & -0.2 & f & -f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\0\\g\\0\end{bmatrix}\mathcal{T}$$

给出,其中$\mathcal{T}$为驱动力矩,w 为作用在驱动力矩上的干扰,参数 f 为铰链建模的弹簧阻尼系数,用有限元分析得到的两个不确定参数的变化范围为 $f\in[0.0038\quad 0.04]$, $g\in[0.8\quad 1.2]$. 评价信号 z 定义为 $z=[\theta_2\quad 0.01\mathcal{T}]^{\mathrm{T}}$.

利用本文推论 2 可得,能够保证的最小的干扰抑制水平 $\gamma^*=0.5308$. 而利用文献[7]的引理 3.1,取 $\varepsilon=0.01$ 可得 $\gamma^*=0.5449$;取 $\varepsilon=0.001$ 可得 $\gamma^*=0.5312$.

5 结语

本文利用描述系统方法及其相关性质推导出一个改进的界实准则. 该准则具有两个突出的特点:首先,它是充要条件并且具有特定的分离结构,这种结构可以有效地改善二次鲁棒分析方法中所固有的保守性;其次,它不涉及任何非线性参数,因此 H_∞ 性能指标的优化

是个基于 LMI 的标准凸优化问题，目前有很多软件包可以直接求解此类问题. 另外，本文还将所得分析准则应用于状态反馈控制问题中，获得了相应的基于 LMI 的综合结果.

References

1 Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 1986, **22**(4): 397～411

2 Khargonekar P P, Petersen I R, Kemin Zhou. Robust stabilization of uncertain linear system: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 1990, **35**(3): 356～361

3 Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 1996, **63**(4): 741～750

4 Kokame H, Kobayashi H, Mori T. Robust H_∞ performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 1998, **43**(2): 223～226

5 de Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 1999, **37**(4): 261～265

6 Apkarian P, Tuan H D, Bernussou J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linearmatrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2001, **46**(12): 1941～1946

7 Shaked U. Improved LMI representation for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2001, **46**(4): 652～656

8 Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatica Control*, 2002, **47**(2): 253～270

9 Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 2001, **43**(4): 309～319

10 Eiho Uezato, Masao Ikeda. Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and H_∞ control of descriptor systems. In: Proceedings of the 38th IEEE CDC. Phoenix: IEEE CSS, 1999. 4092～4097

11 Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4**: 421～448

12 Dai L. Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 118. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989

13 Rehm A, Allgöwer F. H_∞ control of descriptor systems with norm-bounded uncertainties in the system matrices. In: Proceedings of IEEE ACC. Chicago: AACC, 2000. 3244～3248

李　彤　北京航空航天大学第七研究室博士生. 研究兴趣是鲁棒控制及其 LMI 综合方法. 目前的研究方向为线性矩阵不等式在鲁棒控制理论中的应用及 H_∞ 控制.

(**LI Tong**　Ph. D. candidate of the Seventh Research Division at Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interests include robust control and in LMI-based system synthesis.)

贾英民　北京航空航天大学第七研究室教授、博士生导师. 研究兴趣包括鲁棒控制、自适应控制、智能控制及其在车辆系统和工业过程中的应用.

(**JIA Ying-Min**　Professor, Ph. D. supervisor of the Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics. His research interests include robust control, adaptive control and intelligent control, and their applications in vehicles systems and industrial processes.)