第 30 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 30, No. 3
2004 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 2004

修理工带休假的单部件可修系统的可靠性分析[1)]

唐应辉[1] 刘晓云[2]

[1](电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

[2](电子科技大学自动化工程学院 成都 610054)

(E-mail: tang yh@uestc. edu. cn)

摘 要 考虑修理工带有单重休假的单部件可修系统,系统发生故障时可能因修理工的休假而得不到立即修理,因此系统可处于工作、等待修理和修理三种状态. 利用全概率分解技术和拉普拉斯或拉普拉斯——司梯阶变换工具,讨论了系统的可靠度、瞬时可用度和稳态可用度,以及$(0,t]$时间中系统的平均故障次数和稳态故障频度,得到了关于系统的可靠度、瞬时可用度和稳态可用度,以及$(0,t]$时间中系统的平均故障次数和稳态故障频度等可靠性指标的重要结果.

关键词 系统,可用度,故障,修理,故障次数,故障频度

中图分类号 O213.2; O226

Reliability Analysis of One Unit Repairable System With Repairman Vacation

TANG Ying-Hui[1] LIU Xiao-Yun[2]

[1](*College of Applied Mathematics, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu* 610054)

[2](*College of Automation Engineering, University of Electronic Science & Technology of China, Chengdu* 610054)

(E-mail: tang yh@uestc. edu. cn)

Abstract This paper considers a one unit repairable systems with single repairman vacation. If the system fails the repair starts immediately unless the repairman is in vacation time, in which case a waiting repairable time is needed. So that the system may be in one of three states: the working state, the waiting repair state and the being repaired state. By using the total probability decomposition and the tool of the Laplace transform, the following reliability problems are discussed: 1) the reliability, pointwise availability and the stead-state availability ; 2) the expected failure number during a given $(0,t]$ and the stead-state failure frequency. Some important reliability results such

1) 国家教育部首批高校骨干教师资助计划([2000]65),四川省学术与技术带头人培养基金([2001]16)和电子科技大学青年科学资金(YF021102)资助

Supported by Key Teacher Research Grant by the National Ministry of Education([2000]65), Sichuan Province's Foundation for Training Leader of Academy and Technology([2001]16), and Youth Foundation of University of Electronic Science & Technology of China(YF021102)

收稿日期 2003-03-18 收修改稿日期 2004-03-12

Received March 18, 2003; in revised form March 12, 2004

as the pointwise availability and the stead-state availability are obtained.

Key words　Availability, failure, repair, failure number, failure frequency

1　引言

在以前考虑的可靠性系统中，人们都假定系统(部件)发生故障时能立即得到修理[1~5]，但实际情况并非如此，例如系统(部件)发生故障需要请外单位的修理工时就需要一定的等待修理时间；或在系统(部件)正常工作期间，为了有效地发挥修理工的潜力，安排修理工去从事其它辅助性工作以增加系统的收入. 当辅助性工作完成后，若系统仍然正常，则修理工就开始下一项辅助性工作；若系统已处于故障状态，则修理工就立即修理故障的系统，一旦系统被修复转为正常运转后，修理工又开始下一项辅助性工作. 问题在于怎样设置辅助性工作，才能既较好地满足系统处于故障状态时的修复要求，又使修理工能发挥潜力，系统有较大的经济收益？或修理工在连续繁忙一段时间后去休假，休假结束后再回到系统上班. 若系统在修理工的休假期间发生故障，则故障的系统必须等待修理工休假结束转来才能被修理. 问题是修理工的休假时间长短如何影响系统的有关可靠性指标？怎样给修理工一个合理的休假时间？所有这些情况都说明系统发生故障后并不能立即得到修理，而往往有一段随机的等待时间. 我们把由类似以上情况而导致修理工不在系统的时间统称为修理工的“休假时间”. 因此，我们研究这类可修系统的可靠性问题具有重要的理论意义和应用价值. 本文研究修理工带单重休假的单部件可修系统，其模型的描述如下：

考虑一个单部件的可靠性系统，其工作寿命长度 X 遵从一般分布函数 $F(t)$，且平均工作寿命长度为 $1/\lambda$；当系统(部件)正常工作时，修理工就去进行一次“休假”. 若修理工“休假”转来发现系统(部件)已处于故障状态，则修理工就立即修理，其修理时间长度 Y 遵从一般分布函数 $Y(t)$，且平均修理时间长度为 $1/\mu$，系统(部件)修复后立即转为工作状态，修理工又去进行一次“休假”；若修理工“休假”转来发现系统(部件)仍然正常，此时修理工就呆在系统中，此时系统(部件)发生故障状态就立即修理，系统(部件)修复后立即转为工作状态，修理工又去进行一次“休假”. 我们称修理工这种“休假”规则为“单重休假规则”，也就是说，在“单重休假规则”下，修理工每次只进行一次“休假”，若系统(部件)在修理工的“休假”期间内发生故障，那么已处于故障的系统(部件)此时得不到立即修理，只有等待修理工“休假”转来；若系统(部件)在修理工的“休假”期间内没有发生故障，那么系统(部件)在下一次发生故障时就能得到立即修理. 进一步假设：

1)修理工的“休假”时间长度 V 遵从一般分布函数 $V(t)$，且每次休假是相互独立的，即“休假”时间序列 $\{V_i, i\geq 1\}$ 相互独立，同一般分布函数 $V(t)$；

2)系统(部件)的工作寿命长度 X，故障后的修理时间长度 Y 和修理工的“休假”时间长度 V 是相互独立的；

3)在 $t=0$ 的初始时刻系统(部件)是新的，且系统(部件)故障修复后如新的一样，工作寿命长度仍为 X.

我们称这样的可修系统为修理工带单重休假的单部件可修系统.

2 系统的可靠性分析

2.1 系统的可靠度

定理 1. 令 $R(t)$ 表示系统在时刻 t 的可靠度,则 $R(t)=1-F(t)$,且首次故障前的平均时间为 $MTTFF=1/\lambda$.

2.2 系统的可用度

令 $S(t)$ 表示在时刻 t 系统所处的状态,$S(t)=1$ 表示时刻 t 系统正常,$S(t)=0$ 表示时刻 t 系统故障,则 $A(t)=P\{S(t)=1/S(0)=1\}$ 表示在初始时刻 $t=0$ 时是新的条件下,时刻 t 系统正常的概率,即系统的瞬态可用度,且令 $a^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}A(t)dt$ 表示 $A(t)$ 的拉普拉斯变换,$\Re(s)\geqslant 0$. 其中 $\Re(s)$ 为复变量 s 的实部,以下意义同.

定理 2. 对任意工作寿命分布函数 $F(t)$、任意修理时间函数 $Y(t)$ 和任意休假时间函数 $V(t)$,有

$$a^*(s)=\frac{1-f(s)}{s\left\{1-y(s)\int_0^\infty e^{-st}d[F(t)V(t)]\right\}} \tag{1}$$

而且稳态可用度为

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0^+}sa^*(s)=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu}+\int_0^\infty td[F(t)V(t)]} \tag{2}$$

其中 $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$, $y(s)=\int_0^\infty e^{-st}dY(t)$ 分别表示分布函数 $F(t)$ 和 $Y(t)$ 拉普拉斯——司梯阶变换,对 $\Re(s)\geqslant 0$ 均存在.

证明. 利用全概率分解技术,并注意到系统每次的修复时刻是再生点,得

$$\begin{aligned}A(t)=&P\{X_1>t\geqslant 0;\ S(t)=1/S(0)=1\}+P\{X_1\leqslant t;\ S(t)=1/S(0)=1\}=\\&1-F(t)+P\{X_1<V_1;\ V_1+Y_1\leqslant t;\ S(t)=1/S(0)=1\}+\\&P\{X_1\geqslant V_1;X_1+Y_1\leqslant t;\ S(t)=1/S(0)=1\}=\\&1-F(t)+\int_0^t\int_0^{t-x}F(x)A(t-x-y)dY(y)dV(x)+\\&\int_0^t\int_0^{t-x}V(x)A(t-x-y)dY(y)dF(x)\end{aligned} \tag{3}$$

其中 X_1 表示系统的第一次工作寿命长度,其中 Y_1 表示第一次修理时间长度,其中 V_1 表示第一次休假时间长度. 对式(3)取拉普拉斯变换,得

$$a^*(s)=\frac{1-f(s)}{s}+y(s)a^*(s)\int_0^\infty e^{-st}d[F(t)V(t)]$$

然后解方程即得式(1). 再由 $\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0^+}sa^*(s)$,使用罗必塔法则即得式(2). 证毕.

2.3 $(0,t]$ 时间中系统的平均故障次数

设 $M(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间中系统的平均故障次数,且令 $m(s)=\int_0^\infty e^{-st}dM(t)$ 表示 $M(t)$ 的

拉普拉斯——司梯阶变换.

定理 3. 对任意工作寿命分布函数 $F(t)$、任意修理时间函数 $Y(t)$ 和任意休假时间函数 $V(t)$，有

$$m(s)=\frac{f(s)}{1-y(s)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}[F(t)V(t)]} \tag{4}$$

而且稳态故障频度为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\lim_{s\to 0^+}sm(s)=\frac{1}{\frac{1}{\mu}+\int_0^{\infty}t\,\mathrm{d}[F(t)V(t)]} \tag{5}$$

证明. 利用全概率分解技术，并注意到系统每次的修复时刻是再生点，得

$$\begin{aligned}
M(t)=&E\{(0,t]\text{中系统的故障次数};X_1\leqslant t\}=\\
&E\{(0,t]\text{中系统的故障次数};X_1<V_1;X_1\leqslant t\}+\\
&E\{(0,t]\text{中系统的故障次数};X_1\geqslant V_1;X_1\leqslant t\}=\\
&P\{X_1<V_1;X_1\leqslant t<V_1+Y_1\}+\int_0^t\int_0^{t-x}[M(t-x-y)+1]F(x)\mathrm{d}Y(y)\mathrm{d}V(x)+\\
&P\{X_1\geqslant V_1;\ X_1\leqslant t<X_1+Y_1\}+\int_0^t\int_0^{t-x}[M(t-x-y)+1]V(x)\mathrm{d}Y(y)\mathrm{d}F(x)=\\
&\int_0^t[1-V(x)]\mathrm{d}F(x)-\int_0^t\int_x^t Y(t-u)\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}F(x)+\int_0^t[1-Y(t-x)]V(x)\mathrm{d}F(x)+\\
&\int_0^t\int_0^{t-x}[M(t-x-y)+1]\mathrm{d}Y(y)\mathrm{d}[F(x)V(x)]
\end{aligned} \tag{6}$$

对式(6)取拉普拉斯——司梯阶变换，并注意到下式：

$$\int_0^t\int_x^t Y(t-u)\mathrm{d}V(u)\mathrm{d}F(x)=\int_0^t Y(t-u)F(u)\mathrm{d}V(u)$$

可得式(4). 再根据托贝尔定理[7]，并使用罗必达法则可得式(5). 证毕.

注 1. 在修理工具有单重休假规则的单部件可修系统中，易知修理延迟了，其平均延迟时间为 $\int_0^{\infty}t\mathrm{d}[F(t)V(t)]-\frac{1}{\lambda}$；

注 2. 若 $P\{V=0\}=1$，即修理工以概率 1 不休假，则系统即为文献[1,4]研究的经典单部件可靠性系统，而且由本文的结果易得文献[1,4] 的相应结果.

References

1 Cheng Kan. Classes of Life Distributions and Mathematical Theory of Reliability. Bejing: Science Press, 1999(in Chinese)

2 Tang Ying-Hui. Some new reliability problems and results on one-unit repairable system. *Microelectronics & Reliability*, 1996, **36**(4): 465～468

3 Tang Ying-Hui, Liu Xiao-Yun. The optimum age replacement decision for the system with intermittently used equipment. *Control & Decision*, 1995, **10**(4) : 377～380 (in Chinese)

4 Cao Jing-Hua, Cheng Kan. Introduction to Mathematical Theory of Reliability. Bejing: Science Press, 1986(in Chinese)

5 Su Bao-He. Reliability indices and optimal checking policies for a repairable system. *Acta Automatica Sınica*, 2002, **28** (1): 116～119(in Chinese)

6 Ross S M. Stochastic Processes. New York: John Wiley, 1983

7 Widder D V. The Laplace Transform. Princeton: Princeton University Press, 1941

唐应辉 博士. 现任电子科技大学应用数学学院副院长、教授、博士生导师. 研究方向为系统可靠性、排队论和决策理论及应用.

(**TANG Ying-Hui** Deputy-dean, professor in the College of Applied Mathematics at University of Electronic Science and Technology of China. His research interests include system reliability, queueing theory, and decision theory.)

刘晓云 在读博士. 现任电子科技大学自动化工程学院副教授. 主要研究方向为系统可靠性、自动控制理论和系统安全技术等.

(**LIU Xiao-Yun** Associate professor at University of Electronic Science and Technology of China. Her research interests include system reliability, control theory, and system safe technology.)