第 30 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol.30, No.6
2004 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 2004

非线性奇异系统的受控不变分布及其不变性[1)]

王文涛[1]　刘晓平[2]　赵　军[2]

[1](沈阳工业大学理学院　沈阳　110023)

[2](东北大学信息科学与工程学院　沈阳　110004)

(E-mail: wwtlxy@163.com)

摘　要　该文研究非线性奇异系统受控不变分布问题. 提出了非线性奇异系统受控不变分布的概念; 讨论了受控不变分布的一些不变性质; 给出了一个计算包含在输出核 $(\ker(dh))$ 内的最大受控不变分布的算法, 并讨论了该算法的一些性质. 最后给出一个计算包含在输出核内的最大受控不变分布的例子.

关键词　非线性奇异系统, 受控不变分布, 输出核

中图分类号　TP18; TP214

Controlled Invariant Distributions of Nonlinear Singular Systems and Their Invariant Properties

WANG Wen-Tao[1]　LIU Xiao-Ping[2]　ZHAO Jun[2]

[1](*College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang*　110023)

[2](*College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang*　110004)

(E-mail: wwtlxy@163.com)

Abstract　The controlled invariant distribution problems of nonlinear singular systems are studied. The concept of controlled invariant distributions is introduced to nonlinear singular control systems. Some invariant properties of controlled invariant distributions are discussed. An algorithm for controlled invariant distributions is developed. An example for calculating the maximal controlled invariant distributions contained in the output kernel is provided.

Key words　Nonlinear singular system, controlled invariant distribution, output kernel

1　引言

自 70 年代 Luenberger D. G 等人先后在经济系统、机器人系统等发现奇异系统的特征以来, 奇异系统的研究受到众多学者的关注[1~3], 而且围绕线性奇异系统已形成了与线性

1) 国家自然科学基金 (60274009), 辽宁省教育厅重大基础研究基金 (202062039) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60274009) and Foundation of Liaoning Province Education (202062039)

收稿日期 2004-02-12　收修改稿日期 2004-06-29

Received February 12, 2004; in revised form June 29, 2004

系统理论相平行的理论体系[4]. 但是, 对于非线性奇异系统的研究进展缓慢, 只是在系统的可解性和数值解等方面有些工作[5,6]. 近 10 年, 受非线性系统微分几何理论的推动, 非线性奇异系统的研究取得一些进展[7~9]. 最近, 非线性奇异系统零动态的概念被提出, 一些应用也被考虑[10,11]. 但是, 受控分布的概念还没有被应用到非线性奇异系统的研究中. 在一般非线性系统中, 受控分布的理论起着重要作用, 如系统的非交互控制问题与干扰解耦问题都可利用受控分布的理论来研究[12]. 特别是受控不变分布和包含在系统输出核内的最大受控不变分布在非线性系统的研究中有着广泛的应用[12]. 因此, 有必要将受控不变分布概念引入非线性奇异系统, 本文在这方面作一些探讨.

2 问题描述

对于非线性奇异控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{1a}$$

$$0 = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{1c}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 是可微分的状态向量, $\boldsymbol{z} \in R^s$ 是代数变量, $\boldsymbol{u} \in R^m$ 是输入向量, $\boldsymbol{p}_i(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})(i = 1,2)$ 是具有适当阶数的矩阵值函数, $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$ 分别为 n 和 s 维向量值函数, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in R^m)$ 是输出方程.

考虑状态反馈

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})$ 在区域 U 上非奇异. 实施状态反馈 (2), 系统 (1) 转化为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{z} + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} \tag{3a}$$

$$0 = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{z} + \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} \tag{3b}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{3c}$$

记

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}),\ \tilde{\boldsymbol{p}}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}),\ \tilde{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

现在, 对于非线性奇异系统 (1), 引入受控不变分布的概念.

定义 1. 对于非线性奇异系统 (1), 一个分布 $\triangle$ 被称为在区域 U 上为受控不变的, 如果在区域 U 上, 存在反馈组 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 使得 $\triangle$ 对于向量场 $\tilde{\boldsymbol{f}}_1, \tilde{\boldsymbol{p}}_1, \tilde{\boldsymbol{g}}_1$ 不变, 即对于所有 $\boldsymbol{x} \in U$, 有

$$[\tilde{\boldsymbol{f}}_1, \triangle](\boldsymbol{x}) \subset \triangle(\boldsymbol{x}), \quad [\tilde{\boldsymbol{p}}_1, \triangle](\boldsymbol{x}) \subset \triangle(\boldsymbol{x}), \quad [\tilde{\boldsymbol{g}}_1, \triangle](\boldsymbol{x}) \subset \triangle(\boldsymbol{x}) \qquad (5a), (5b), (5c)$$

定义 2. 对于非线性奇异系统 (1), 一个分布 $\triangle$ 被称为局部受控不变的, 如果对于每一点 $\boldsymbol{x} \in U$, 都存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 U^0, 使得 $\triangle$ 为 U^0 上的受控不变分布.

设由向量场 $\boldsymbol{g}_{11}, \cdots, \boldsymbol{g}_{1m}$ 生成的分布记为 $G_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_{11}, \cdots, \boldsymbol{g}_{1m}\}$, 则可得下面的结论.

引理 1. 设 $\triangle$ 是一个对合分布, 又设 $\triangle$ 和 $\triangle+G_1$ 在区域 U 上非奇异, 则 $\triangle$ 为局部受控不变的当且仅当

$$[\boldsymbol{f}_1,\triangle]\subset\triangle+G_1,\ [\boldsymbol{p}_{1j},\triangle]\subset\triangle+G,\ [\boldsymbol{g}_{1i},\triangle]\subset\triangle+G_1 \tag{6a), (6b), (6c}$$

证明. 根据定义 1 及李括号 (Lie bracket) 的性质, 从式 (6a) 和 (6c), 可得式 (5a) 和 (5c). 类似, 从式 (6b) 和 (6c), 可得式 (5b), 这样式 (5) 成立, 即 $\triangle$ 为局部受控不变分布. 证毕.

3 受控不变分布的一些不变性质

这里将讨论非线性奇异系统受控不变分布的一些不变性质, 主要讨论代数约束的独立性. 为此假设系统 (1) 为正则, 即存在矩阵 $\gamma(\boldsymbol{x})$ 使得矩阵 $\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})$ 为非奇异. 因此, 从式 (3b), $\boldsymbol{z}$ 能被唯一解出, 即

$$\boldsymbol{z}=-[\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]^{-1}[\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}] \tag{7}$$

将式 (7) 代入式 (3a), 得

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})-[\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})][\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})-[\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})][\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) \tag{9b}$$

记 $w=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$, 则式 (8) 可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w},\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

即对系统 (10) 实施反馈 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ 可得式 (8). 关于系统 (10), 我们有如下定理.

定理 1. 如果 $\triangle$ 是非线性奇异系统 (1) 的受控不变分布, $\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})\in\triangle$, 则 $\triangle$ 也是非线性系统 (10) 的受控不变分布.

为了进一步的探讨受控分布的不变性, 记 $G_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$, 其中 $\boldsymbol{g}_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 由式 (9) 定义, 并记

$$W(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

则有如下结论.

引理 2. 设 $R(\boldsymbol{w})$ 表示矩阵 $W(\boldsymbol{x})$ 的秩, 如果 $R(\boldsymbol{w})=\min\{s+m,s+n\}$, $\boldsymbol{p}_{1i}(\boldsymbol{x})\in G_1$, $1\leqslant i\leqslant s$, 则 $G_1=G_2$.

证明. 注意式 (10) 中 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})(1\leqslant i\leqslant m)$ 的结构, 我们能构造下面的矩阵方程

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ \gamma(\boldsymbol{x}) & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -[\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]^{-1}g_2(\boldsymbol{x})\\ 0 & I\end{bmatrix}=$$
$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x}) & 0\\ \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})-[\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})][\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}$$

由于 $R(\boldsymbol{w})=\min\{s+m,s+n\}$, 可知向量场

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})-[\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})][\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]^{-1}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})$$

为线性无关的. 再考虑假设 $\boldsymbol{p}_{1i}(\boldsymbol{x})\in G_1, 1\leqslant i\leqslant s$, 我们知道存在矩阵 $R(\boldsymbol{x})$ 使得

$$\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})R(\boldsymbol{x})$$

因此，能获得一个矩阵 $Q(\boldsymbol{x})$ 使得

$$g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})Q(\boldsymbol{x})$$

由于 $g(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})$ 线性无关，得 $Q(\boldsymbol{x})$ 为非奇异矩阵. 由此得 $G_1=G_2$. 证毕.

根据引理 2, 有下面的结论.

定理 2. 在引理 2 的条件下，如果 $\triangle$ 为非线性奇异系统 (1) 的受控不变分布，则 $\triangle$ 也是非线性系统 (10) 的受控不变分布.

4 包含在输出核 (ker(dh)) 内的受控不变分布

首先，对于系统 (1), 考虑一切满足式 (5) 且包含在输出核 ker($d\boldsymbol{h}$) 内的分布构成的分布族，记为 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$. 由于这个分布族对于加法有封闭性，因此它有最大元素，即分布族的所有元素的和. 根据引理 1, 分布族 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 的最大元素自然是包含在输出核 ker($d\boldsymbol{h}$) 内最大受控不变分布的候选对象. 这里我们将给出一个计算分布族 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 的最大元素的算法，并讨论算法的一些性质.

受控不变分布算法:

第 0 步. 建立 $\Omega_0=\mathrm{span}\{d\boldsymbol{h}\}$;

第 $\boldsymbol{k}$ 步. 建立

$$\Omega_k=\Omega_{k-1}+L_{\boldsymbol{f}_1}(\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp})+\sum_{i=1}^{s}L_{\boldsymbol{p}_{1i}}(\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp})+\sum_{j=1}^{m}L_{\boldsymbol{g}_{1j}}(\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp})\tag{11}$$

引理 3. 假设存在一个整数 k^* 使得 $\Omega_{k^*+1}=\Omega_{k^*}$, 则对于一切 $k>k^*$, 有 $\Omega_k=\Omega_{k^*}$. 如果 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 和 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 光滑，则 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 是 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 的最大元素.

证明. 由算法的结构，我们知道引理 3 的第一部分明显成立，因此，仅需要证明引理的第二部分.

首先，由 $\Omega_{k^*+1}=\Omega_{k^*}$ 可得，对于 $1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant m$, 有

$$L_{p_{1i}}(\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_{k^*},\ L_{g_{1j}}(\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_{k^*}$$

如果记 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{g}_{10}$, 上式可扩展到 $j=0$. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 中的余向量场，$\boldsymbol{\tau}$ 是 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 中向量场，则有

$$\langle L_{p_{1i}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=L_{p_{1i}}\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle+\langle\boldsymbol{\omega},[\boldsymbol{p}_{1i},\boldsymbol{\tau}]\rangle,\ \langle L_{g_{1j}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=L_{g_{1j}}\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle+\langle\boldsymbol{\omega},[\boldsymbol{g}_{1j},\boldsymbol{\tau}]\rangle$$

因为 $L_{p_{1i}}\omega\in\Omega_{k^*}$ 和 $L_{g_{1j}}\omega\in\Omega_{k^*}$，可得

$$\langle L_{p_{1i}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=0,\quad\langle L_{g_{1j}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=0$$

注意到 $\boldsymbol{\tau}\in\Omega_{k^*}^{\perp}$，得 $\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=0$，因此

$$\langle\boldsymbol{\omega},[\boldsymbol{p}_{1i},\boldsymbol{\tau}]\rangle=0,\quad\langle\boldsymbol{\omega},[\boldsymbol{g}_{1j},\boldsymbol{\tau}]\rangle=0$$

由于 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 光滑，$[\boldsymbol{p}_{1i},\boldsymbol{\tau}]$ 和 $[\boldsymbol{g}_{1j},\boldsymbol{\tau}]$ 零化 $\Omega_{k^*}\cap G_1^{\perp}$ 中的每一个余向量，即对于 $1\leqslant i\leqslant s,0\leqslant j\leqslant m$，有

$$[\boldsymbol{p}_{1i},\Omega_{k^*}^{\perp}]\subset\Omega_{k^*}^{\perp}+G_1,\quad[\boldsymbol{g}_{1j},\Omega_{k^*}^{\perp}]\subset\Omega_{k^*}^{\perp}+G_1$$

这说明 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 是 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 中的元素.

设 $\bar{\Delta}$ 是 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 中的另一元素，现证明 $\bar{\Delta}\subset\Omega_{k^*}^{\perp}$. 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 是 $\bar{\Delta}^{\perp}\subset G_1^{\perp}$ 的余向量场，而 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\bar{\Delta}$ 中的向量场时，有

$$\langle L_{p_{1i}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=0,\quad\langle L_{g_{1j}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\tau}\rangle=0$$

因此

$$L_{p_{1i}}(\bar{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})\subset\bar{\Delta}^{\perp},\quad L_{g_{1j}}(\bar{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})\subset\bar{\Delta}^{\perp}$$

这样，如果假设对于 $k\geqslant 0,\bar{\Delta}^{\perp}\subset\Omega_k$，则

$$\Omega_{k+1}\subset\Omega_k+\sum_{i=1}^{s}L_{p_{1i}}(\bar{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})+\sum_{j=0}^{m}L_{g_{1j}}(\bar{\Delta}^{\perp}\cap G_1^{\perp})\subset\bar{\Delta}^{\perp}$$

注意到 $\Omega_0=\mathrm{span}\{d\boldsymbol{h}\}\subset\bar{\Delta}^{\perp}$，有 $\bar{\Delta}\subset\Omega_{k^*}^{\perp}$，即 $\Omega_{k^*}^{\perp}$ 为 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 的最大元素.

证毕.

通过简单的计算，可以证明算法 (11) 具有反馈不变性，即有如下引理.

引理 4. 设 $\tilde{\boldsymbol{f}}_1,\tilde{\boldsymbol{p}}_1,\tilde{\boldsymbol{g}}_1$ 是任何一组由 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1$ 通过 $\tilde{\boldsymbol{f}}_1=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{g}\boldsymbol{\alpha}$，$\tilde{\boldsymbol{p}}_1=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{g}_1\gamma$，$\tilde{\boldsymbol{g}}_1=\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{\beta}$ 所得到的向量场，则对于序列 (11) 的每一个余分布 Ω_k，有

$$\Omega_k=\Omega_{k-1}+L_{\tilde{f}_1}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})+\sum_{i=1}^{s}L_{\tilde{p}_{1i}}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})+\sum_{j=1}^{m}L_{\tilde{g}_{1j}}(\Omega_{k-1}\cap\tilde{G}_1^{\perp})$$

其中 $\tilde{G}_1=\mathrm{span}\{\tilde{\boldsymbol{g}}_{11},\cdots,\tilde{\boldsymbol{g}}_{1m}\}$.

为方便，引进分布序列 (11) 的所有元素的和，记为 $\Delta^*=(\Omega_0+\Omega_1+\cdots+\Omega_k+\cdots)$. 对分布序列 (11)，如果存在整数 k^* 使得 $\Omega_{k^*}=\Omega_{k^*+1}$，则称 Δ^* 是可有限计算的. 如果 Δ^* 可有限计算，则 $(\Delta^*)^{\perp}=\Omega_{k^*}^{\perp}$.

定理 3. 假设 Δ^* 可有限计算，Δ^* 和 $(\Delta^*)^{\perp}+G_1$ 非奇异，则 $(\Delta^*)^{\perp}$ 为对合的且是包含在输出核 $\ker(d\boldsymbol{h})$ 内的最大局部受控不变分布.

证明. 由于 Δ^* 和 $(\Delta^*)^{\perp}+G_1$ 的非奇异性蕴涵 $(\Delta^*)^{\perp}$ 和 $\Delta^*\cap G_1^{\perp}$ 的光滑性，因此，仅需证明 $(\Delta^*)^{\perp}$ 是对合即可.

让 d 表示分布 $(\Delta^*)^{\perp}$ 的维数，在任何点 $\boldsymbol{x}^0$，总是可以发现 $\boldsymbol{x}^0$ 的一个邻域 U^0 和一组向量场 $\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_d$ 使得

$$(\Delta^*)^{\perp}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\tau}_1,\cdots,\boldsymbol{\tau}_d\}$$

考虑分布

$$D=\operatorname{span}\{\boldsymbol{\tau}_i:1\leqslant i\leqslant d\}+\operatorname{span}\{[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]:1\leqslant i,\ j\leqslant d\}$$

暂时假设 D 在区域 U^0 上非奇异，则在 D 中的每一个向量场 $\boldsymbol{\tau}$ 能被表达为 $(\triangle^*)^{\perp}$ 中的向量场 $\boldsymbol{\tau}'$ 和向量场 $\boldsymbol{\tau}''$ 之和，而 $\boldsymbol{\tau}''$ 具有下面的形式

$$\boldsymbol{\tau}''=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}c_{ij}[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]$$

其中 $c_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant d)$ 是 U^0 上的光滑实值函数.

我们想证明对于 $1\leqslant k\leqslant s,1\leqslant l\leqslant m$, 有

$$[\boldsymbol{f}_1,D]\subset D+G_1,\quad [\boldsymbol{p}_{1k},D]\subset D+G_1,\quad [\boldsymbol{g}_{1l},D]\subset D+G_1 \tag{12}$$

考虑 D 中向量场 $\boldsymbol{\tau}$ 的结构，式 (12) 的三个结论分别等价于下面三个结论

$$[\boldsymbol{f}_1,[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]]\subset D+G_1,\quad [\boldsymbol{p}_{1k},[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]]\subset D+G_1,\quad [\boldsymbol{g}_{1l},[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]]\subset D+G_1 \tag{13}$$

根据 Lie 括号的 Jacobi 恒等式，式 (13) 的左边分别产生下面三个等式

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{f}_1,[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{\tau}_j]]-[\boldsymbol{\tau}_j,[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{\tau}_i]]\\
&[\boldsymbol{p}_{1k},[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{p}_{1k},\boldsymbol{\tau}_j']]-[\boldsymbol{\tau}_j,[\boldsymbol{p}_{1k},\boldsymbol{\tau}_i]]\\
&[\boldsymbol{g}_{1l},[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{g}_{1l},\boldsymbol{\tau}_j]]-[\boldsymbol{\tau}_j,[\boldsymbol{g}_{1l},\boldsymbol{\tau}_i]]
\end{aligned}$$

由于向量场 $[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{\tau}_j]$, $[\boldsymbol{p}_{1k},\boldsymbol{\tau}_j]$ 和 $[\boldsymbol{g}_{1l},\boldsymbol{\tau}_j]$ 都属于 $(\triangle^*)^{\perp}+G_1$ 且非奇异，故这些向量场能表示为 $(\triangle^*)^{\perp}$ 中向量场 $\boldsymbol{\tau}$ 与 G_1 中向量场 $\boldsymbol{g}$ 之和，因此有

$$[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{g}],[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{p}_{1k},\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{g}],[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{g}_{1l},\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{g}]$$

注意到 $[\boldsymbol{\tau}_i,\boldsymbol{g}]\in(\triangle^*)^{\perp}+G_1$, 则有

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{g}]\in D+(\triangle^*)^{\perp}+G_1=D+G_1\\
&[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{p}_{1k},\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{g}]\in D+(\triangle^*)^{\perp}+G_1=D+G_1\\
&[\boldsymbol{\tau}_i,[\boldsymbol{g}_{1l},\boldsymbol{\tau}_j]]=[\boldsymbol{\tau}_j,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{g}]\in D+(\triangle^*)^{\perp}+G_1=D+G_1
\end{aligned}$$

这蕴涵式 (12) 成立. 再考虑 $\ker(d\boldsymbol{h})$ 的对合性质, 得 $D\subset\ker(d\boldsymbol{h})$. 这说明 D 是 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 中的元素. 由定义，又有 $D\supset(\triangle^*)^{\perp}$, 而且 $(\triangle^*)^{\perp}$ 是 $\Im(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{g}_1,\ker(d\boldsymbol{h}))$ 的最大元素，这说明 $D=(\triangle^*)^{\perp}$. 即 $(\triangle^*)^{\perp}$ 中任何向量场的 Lie 括号仍然属于 $(\triangle^*)^{\perp}$, 也就是说 $(\triangle^*)^{\perp}$ 是对合分布.

如果我们不假设 D 在区域 U^0 有常数维，则可得在 U^0 内 D 的正则点构成的集合 $\bar{U}$ 上 $D=(\triangle^*)^{\perp}$. 见文献 [1], $\bar{U}$ 在 U^0 中稠密. 再根据文献 [12] 的引理 1.3.4 得在整体 U^0 上 $D=(\triangle^*)^{\perp}$. 证毕.

事实上，计算包含在输出核 $\ker(d\boldsymbol{h})$ 内的局部最大受控不变分布将采用下面的方法. 首先，建立

$$W_0(\boldsymbol{x})=d\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$$

假设 Ω_{k-1} 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某邻域内有常数维 σ_{k-1}. 这样，Ω_{k-1} 能由 Ω_{k-1} 的 σ_{k-1} 个线性独立的行生成. 再用 $W_{k-1}(\boldsymbol{x})$ 表示由 Ω_{k-1} 的 σ_{k-1} 个线性独立行组成的 $\sigma_{k-1}\times n$ 矩阵，则 $\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp}(\boldsymbol{x})$ 中的余向量场 $\boldsymbol{\omega}$ 可表为 $\boldsymbol{\omega}=\mu W_{k-1}(\boldsymbol{x})$, 而且函数 $\mu(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\mu W_{k-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})=0 \tag{14}$$

如果矩阵 $A_{k-1}=W_{k-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某邻域内有常数维 ρ_{k-1}, 则方程 (14) 的解空间有常数维 $(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})$, 即存在一个 $(\sigma_{k-1}-\rho_{k-1})\times\sigma_{k-1}$ 矩阵，记为 $S_{k-1}(\boldsymbol{x})$, 使得 $\Omega_{k-1}\cap G_1^{\perp}(\boldsymbol{x})$ 由 $S_{k-1}(\boldsymbol{x})W_{k-1}(\boldsymbol{x})$ 的行生成. 因此， Ω_k 能由下面的计算确定，即

$$\begin{aligned}\Omega_k=&\Omega_{k-1}+\mathrm{span}\{L_{f_1}(S_{k-1}W_{k-1})_i\ \ 1\leqslant i\leqslant\sigma_{k-1}-\rho_{k-1}\}+\\&\mathrm{span}\{L_{p_{1j}}(S_{k-1}W_{k-1})_i\ \ 1\leqslant i\leqslant\sigma_{k-1}-\rho_{k-1},\ 1\leqslant j\leqslant s\}+\\&\mathrm{span}\{L_{g_{1l}}(S_{k-1}W_{k-1})_i\ \ 1\leqslant i\leqslant\sigma_{k-1}-\rho_{k-1},\ 1\leqslant l\leqslant m\}\end{aligned}$$

其中 $(S_{k-1}W_{k-1})_i$ 表示 $(S_{k-1}W_{k-1})$ 的 i-th 行.

如果 Ω_k 在 $\boldsymbol{x}^0$ 的某邻域内有常数维 σ_k, 用 Ω_k 代替 Ω_{k-1}, 重复前面的过程，可获得 Ω_{k+1}, 如果对某正整数 k, 有 $\sigma_{k-1}=\sigma_k$, 则算法结束并可获得 $\Omega_k^{\perp}$.

5　一个算例

考虑一个定义在 R^5 上两个输入 - 两个输出的非线性奇异系统，代数约束维数 $s=1$, 并设

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_2\\0\\x_1x_4\\x_3^2\\x_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_{11}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}x_2\\0\\x_4\\1\\x_1^2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{g}_{11}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1\\x_3\\0\\x_5\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{g}_{12}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\x_1\\x_2x_3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x})=x_1,\ \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x})=x_2$$

对于这个系统，有

$$W_0(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},\quad A_0(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0\\x_3&0\end{bmatrix}$$

这样， $\sigma_0=2$ 和 $\rho_0=1$, 能选择

$$S_0=[-x_3\quad 1]$$

因此有

$$\Omega_0\cap G_1^{\perp}=\mathrm{span}\{S_0W_0(\boldsymbol{x})\}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\omega}\}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=(-x_3\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0)$. 由简单计算可得

$$L_{f_1}\boldsymbol{\omega}=(-x_1x_4\quad -x_3\quad 0\quad 0\quad 0),\quad L_{p_{11}}\boldsymbol{\omega}=(x_4\quad -x_3\quad 0\quad 0\quad 0)$$

$$L_{g_{11}}\boldsymbol{\omega}=(0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0),\quad L_{g_{12}}\boldsymbol{\omega}=(-1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)$$

这样，作为 Ω_1 的基，可选择 $W_1(\boldsymbol{x})$ 为

$$W_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

因此

$$A_1(\boldsymbol{x})=W_1(\boldsymbol{x})G_1(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1&0\\x_3&0\\0&1\end{bmatrix}$$

这说明对所有 $\boldsymbol{x},\rho_1=2$，算法结束．事实上，建立 $S_1(\boldsymbol{x})=(-x_3\quad 1\quad 0)$，容易发现

$$S_1(\boldsymbol{x})W_1(\boldsymbol{x})=S_0(\boldsymbol{x})W_0(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\omega}$$

这蕴涵

$$L_{f_1}(\Omega_1\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_1,\ L_{p_{11}}(\Omega_1\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_1,\ L_{g_{11}}(\Omega_1\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_1,\ L_{g_{12}}(\Omega_1\cap G_1^{\perp})\subset\Omega_1$$

即 $k^*=1$．因此，Ω_{k^*} 由 $W_1(\boldsymbol{x})$ 的行生成且

$$(\Omega_{k^*})^{\perp}=\ker(W_1)=\mathrm{span}\begin{Bmatrix}[0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}\\ [0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}\end{Bmatrix}$$

6 结论

通过本文的讨论看出，受控不变分布的概念可推广到非线性奇异系统，并且可得到受控不变分布的有条件代数约束的独立性，即利用非线性奇异系统自身的信息，获得的某个分布也是该系统经反馈、消除代数约束后所得的非线性系统的受控不变分布，这使得获取系统受控不变分布的过程简化，而且都是确定的信息．这将为进一步研究非线性奇异系统一些控制问题提供理论工具．文中所提出的包含在输出核内的最大受控不变分布的算法也具有反馈不变性．

进一步探讨的问题是如何利用受控不变分布理论改善系统的控制．对一般的非线性系统，这个问题有很好的结果．对于非线性奇异系统，由于有受控不变分布的一些不变性质，使这个问题的研究会取得成果．

References

1 Luenberger D G. Dynamics equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(3): 312~321

2 You L S, B S Chen. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic contrained hanical systems. *International Journal of Control*, 1993, **58**(4): 587~612

3 Krishnan H, N H McClamroch. Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems. *Automatica*, 1994, **30**(12): 1885~1897

4 Campbell S L, Nichols N, Terrell W J, Duality. Observability and controllability for linear time-varying descriptor systems. *Circuits, Systems, Signal Process*, 1991, **10**(3): 455~470

5 Brenan K E, Campbell S L, Petzold. Numerical solution of initial-valve problems in differential-algebraic equations. New York: Elsevier, 1989

6 Campbell S L, Griepentrog E, Solvabilty of general differential-algebraic equations. *SIAM J. Sci. Comput*, 1995, **16**(2): 257~270

7 Liu X P, S Celikovsky. Feedback control of affine nonlinear singular control systems. *International Journal of Control*, 1997, **68**(4): 753~774

8 Liu X P. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems. *International Journal of Control*, 1998, **70**(5): 685~702

9 Liu X P. Asymptotic output tracking of nonlinear differential-algebraic control systems. *Automatica*, 1998, **34**(3): 393~397

10 Wang W T, Liu X P, Zhao J. The zero dynamics of nonlinear singular control systems. In: Proceeding of the American Control Conference. Anchorage: 2002. 3564~3569

11 Wang W T, Liu X P, Zhao J. The zero dynamics of nonlinear singular control system and Their Application. In: Proceeding of the American Control Conference. Denver: 2003, 1554~1559

12 Isidori A. Nonlinear Control Systems. Third Edition. Berlin, Germany: Springer-verlag, 1995

王文涛　沈阳工业大学理学院教授，博士．主要研究方向为非线性奇异控制系统的几何理论．

(**WANG Wen-Tao**　Professor of Shenyang University of Technology, Ph. D. His main research interests include the geometry theory of nonlinear singular control systems)

刘晓平　东北大学信息科学与工程学院教授，博士生导师．主要研究方向为非线性系统的鲁棒控制，奇异系统和过程控制

(**LIU Xiao-Ping**　Professor of Northeastern University and Ph.D. director. His research interests include nonlinear robust control, singular systems, and process control)

赵　军　东北大学信息科学与工程学院教授，博士生导师．主要研究方向为切换系统，非线性系统与鲁棒控制．

(**ZHAO　Jun**　Professor of Northeastern University and Ph.D. director. His research interests include switch systems, nonlinear systems and robust control)