

# 新型联邦最小二乘滤波算法及应用<sup>1)</sup>

赵 龙 陈 哲

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 北京 100083)  
(E-mail: long760125@sina.com)

**摘 要** 为克服多传感器信息融合时联邦 Kalman 滤波在系统噪声和测量噪声的统计信息不准确时所存在的局限性, 提出了一种基于最小二乘估计的新型联邦滤波算法, 定义为联邦最小二乘滤波. 定性讨论了它与联邦 Kalman 滤波的关系, 通过在 INS/ 双星 /GPS 组合导航系统中的实际应用进一步地比较两种算法. 实测数据的仿真结果证明, 在系统噪声和测量噪声不准确的情况下, 联邦最小二乘滤波的精度要高于联邦 Kalman 滤波.

**关键词** 组合导航, 最小二乘估计, Kalman 滤波, 联邦滤波  
**中图分类号** V249.32

## A New Type of Federated Least Square Filtering Algorithm and Its Application

ZHAO Long CHEN Zhe

(School of Automation Science and Electrical Engineering,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)  
(E-mail long760125@sina.com)

**Abstract** A new type of federated filtering based on the least square estimation is presented, which is defined as federated least square filtering (FLSF), while the statistic information of the system noise and observation noise are uncertain in order to overcome the limitation of federated Kalman filtering (FKF) in multi-sensor information fusion. The relationship between FLSF and FKF is discussed in some detail. These two methods are compared further for practical application in inertial navigation system/double-star system/global positioning system (INS/DS/GPS) integrated navigation system. The simulating results indicate that the FLSF has better filtering accuracy than FKF, while the statistic information of the system noise and observation noise are uncertain.

**Key words** Integrated navigation, least square estimation, Kalman filtering, federated filtering

1) 航空基础科学基金 (03D51007) 和航天科技创新基金 (2001) 资助

Supported by Aeronautical Science Fund of P. R. China (03D51007) and Astronautical Innovation Fund of P. R. China (2001)

收稿日期 2003-09-09 收修改稿日期 2003-12-02

Received September 9, 2003; in revised form December 2, 2003

## 1 引言

随着各种飞行器对导航、定位精度及可靠性要求的不断提高,利用各种导航系统的优点及信息融合技术进行组合来取长补短,已成为今后导航系统发展的主要方向<sup>[1]</sup>.对于多传感器组合导航系统,若采用集中式 Kalman 滤波,则存在计算量大、容错性能差等缺点.为了解决这一问题,Speyer 等人先后提出了分散滤波思想<sup>[2]</sup>,但都存在着信息传输量大等缺点.1988 年,Carlson 提出了联邦滤波理论<sup>[3]</sup>,才使上述问题得到解决.文献 [4] 给出了一种动态信息分配方案,导出了集中 Kalman 滤波、分散化滤波和联邦滤波的等价关系,并证明了联邦 Kalman 滤波器全局滤波精度和集中 Kalman 滤波的滤波精度相同.然而,Kalman 滤波理论是在假设系统动态过程和测量噪声的统计特性等先验知识已知的情况下得到的,这使得联邦 Kalman 滤波理论在实际应用中存在一定的局限性.

2003 年 5 月 26 日,随着第三颗卫星的成功发射和准确定位,标志着我国第一代卫星导航定位系统已成功建成,它既有结构简单、卫星数目少,又兼有导航、定位、通信的功能<sup>1)</sup>.目前,我国双星导航研究刚刚起步,关于双星定位数据融合方法及信息容错设计的文献已问世<sup>[5,6]</sup>,然而由于双星的定位信息是由地面中心站解算并通过卫星转发给用户,所以无法得到准确的噪声及误差模型.为了克服这一缺点,本文提出了一种基于最小二乘估计的新型联邦滤波算法,称其为联邦最小二乘滤波.目前关于将具有自适应性及鲁棒性强的最小二乘估计与联邦滤波相结合的文章在国内外的资料中还未见到.该滤波算法对系统噪声和测量噪声不作任何要求,具有一定的自适应能力.通过在 INS/双星/GPS 组合系统中的实际应用对联邦最小二乘滤波和联邦 Kalman 滤波算法进行仿真与验证.

## 2 联邦最小二乘滤波理论

### 2.1 问题的提出

考虑一时变离散系统模型<sup>[1]</sup>

$$X_k = \Phi_{k|k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \quad (1)$$

式中  $X_k \in R^n$  为时刻  $k$  的系统状态,  $\Phi_{k|k-1} \in R^{n \times n}$  为从  $k-1$  到时刻  $k$  的一步状态转移矩阵,  $\Gamma_{k-1} \in R^{n \times r}$  为  $k$  时刻的系统噪声矩阵,  $W_{k-1} \in R^r$  为  $k$  时刻未知系统噪声.

设该系统由  $N$  个传感器子系统构成,每个子系统独立进行测量,则有  $N$  组测量值.对于其中第  $i$  个子系统,令其系统方程和测量方程分别为<sup>[7]</sup>

$$X_{ik} = \Phi_{i,k|k-1} X_{i,k-1} + \Gamma_{i,k-1} W_{i,k-1} \quad (2)$$

$$Z_{ik} = H_{ik} X_{ik} + V_{ik} \quad (3)$$

上式中  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $Z_{ik} \in R^{m_i}$  为  $k$  时刻第  $i$  个子系统的测量值;  $H_{ik} \in R^{m_i \times n_i}$  为  $k$  时刻第  $i$  个子系统的测量矩阵;  $V_{ik} \in R^{m_i}$  为  $k$  时刻第  $i$  个子系统的测量噪声.

联邦滤波是一个两级数据处理系统,其典型结构有 4 种(文献 [7] 给出 6 种),其一般结构图如图 1 所示<sup>[7]</sup>.图中联邦滤波状态估计为  $\hat{X}_f$ , 方差阵为  $P_f$ ; 子滤波器输出为其状态估计

1) 我国第三颗北斗一号导航定位卫星发射升空. <http://asp3.6to23.com/zllongyi/survey/weixing.htm>.

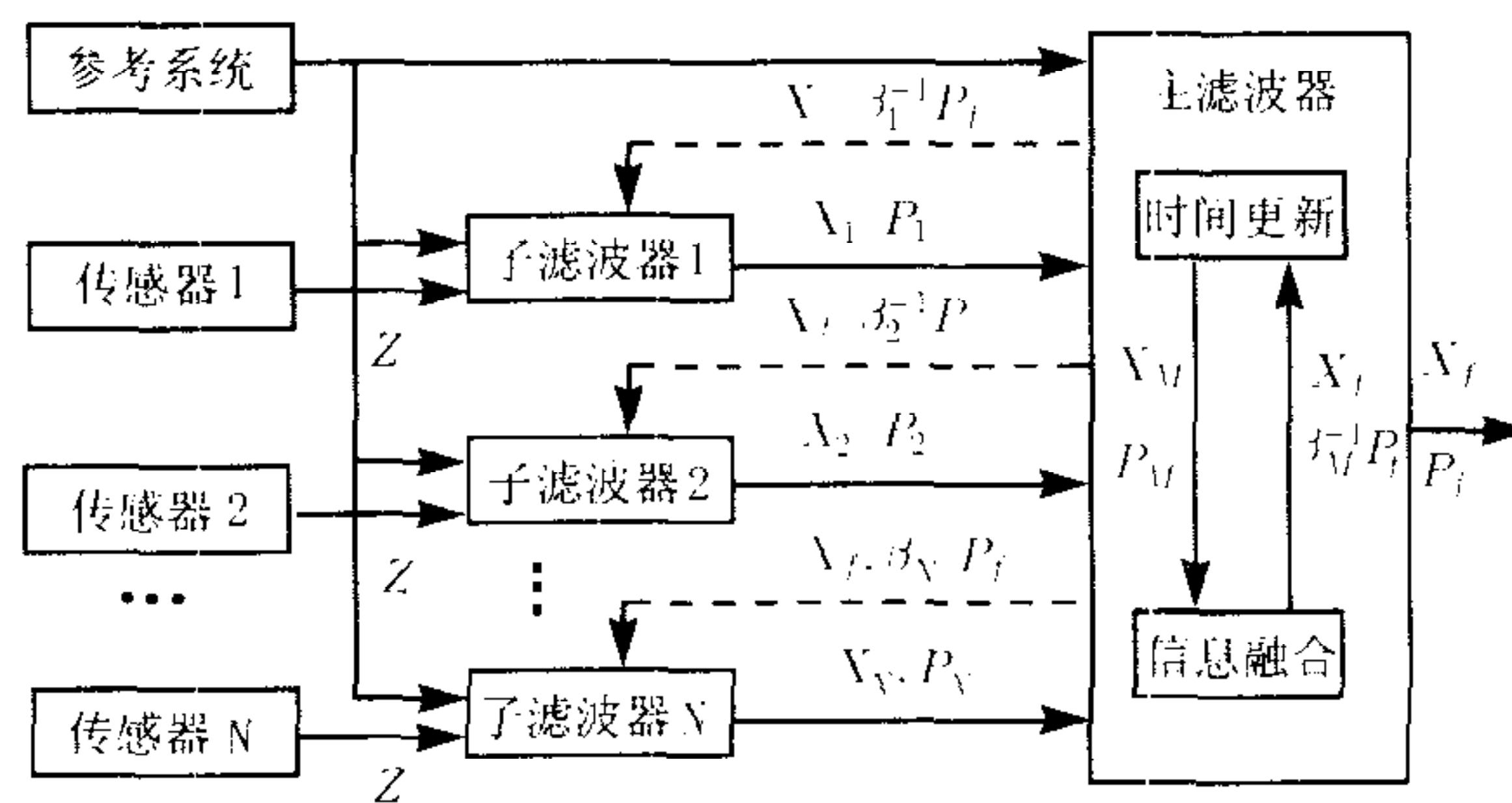


图 1 联邦最小二乘滤波结构图

Fig.1 Federated least square filtering structure

$\hat{X}_i$  和其方差阵  $P_i$ ; 主滤波器输出为其状态估计  $\hat{X}_M$  和其方差阵  $P_M$ ;  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N, M$ ) 为信息分配因子。

当系统是时变的且系统噪声和子系统的测量噪声的统计信息未知时, 联邦 Kalman 滤波此时的滤波精度会降低, 甚至可能发散。所以, 下面给出一种适用于先验统计信息不准确情况下应用的联邦滤波算法, 即联邦最小二乘滤波。

## 2.2 联邦最小二乘滤波算法

针对式 (2) 和 (3), 利用基于量测值加权平方和最小原理的最小二乘估计进行系统状态估计的数学模型<sup>[8,9]</sup> 为

$$\hat{X}_{ik} = \Phi_{i,k|k-1} \hat{X}_{i,k-1} + K_{ik} (Z_{ik} - H_{ik} \Phi_{i,k|k-1} \hat{X}_{i,k-1}) \quad (4)$$

式中  $K_{ik} = P_{i,k|k-1} H_{ik}^T (\lambda I + H_{ik} P_{i,k|k-1} H_{ik}^T)^{-1}$  为滤波增益,  $P_{i,k|k-1} = \Phi_{i,k|k-1} P_{i,k-1} \Phi_{i,k|k-1}^T$  为一步预测均方误差,  $P_{ik} = \frac{1}{\lambda} [P_{i,k|k-1} - K_{ik} H_{ik} P_{i,k|k-1}]$  为估计均方误差,  $\lambda$  为遗忘因子。

在进行多传感器信息融合时, 将上述利用最小二乘估计进行状态估计的思想和联邦滤波理论相结合便得到联邦最小二乘滤波。所以按照联邦滤波信息分配和状态重置的原理, 联邦最小二乘滤波算法的数学模型可描述如下:

1) 信息分配, 将全局的状态方差  $P_f$  通过分配因子分配到主滤波器和子滤波器, 即

$$P_{i,k-1} = \beta_i^{-1} P_{k-1}, \quad \hat{X}_{i,k-1} = \hat{X}_{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, M \quad (5)$$

其中信息分配因子满足信息守恒原理, 即  $\beta_M + \sum_{i=1}^N \beta_i = 1$ ;

2) 联邦最小二乘滤波算法的时间更新

$$P_{i,k|k-1} = \Phi_{i,k|k-1} P_{i,k-1} \Phi_{i,k|k-1}^T, \quad i = 1, 2, \dots, N, M \quad (6)$$

$$\hat{X}_{i,k|k-1} = \Phi_{i,k|k-1} \hat{X}_{i,k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, M \quad (7)$$

3) 联邦最小二乘滤波算法的测量更新

$$P_{ik} = \frac{1}{\lambda} [P_{i,k|k-1} - K_{ik} H_{ik} P_{i,k|k-1}], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

$$\hat{X}_{ik} = \hat{X}_{i,k|k-1} + K_{ik} (Z_{ik} - H_{ik} \hat{X}_{i,k|k-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

$$P_{Mk} = P_{M,k|k-1} \quad (10)$$

$$\hat{X}_{Mk} = \hat{X}_{M,k|k-1} \quad (11)$$

式中  $K_{ik} = P_{i,k|k-1} H_{ik}^T (\lambda I + H_{ik} P_{i,k|k-1} H_{ik}^T)^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  为子系统滤波增益;

#### 4) 最优信息融合

$$P_f^{-1} = P_{Mk}^{-1} + \sum_{i=1}^N P_{ik}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

$$P_f^{-1} \hat{X}_f = P_{Mk}^{-1} \hat{X}_{Mk} + \sum_{i=1}^N P_{ik}^{-1} \hat{X}_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

### 3 与联邦 Kalman 滤波算法的比较

针对式 (2) 和 (3) 的状态空间模型, 联邦 Kalman 滤波算法 (限于篇幅, 这里仅列出与联邦最小二乘滤波有区别的公式, 详见参考文献 [4,7]) 可以描述如下:

1) 信息分配, 将全局的状态方差  $P_f$  和系统噪声  $Q_f$  通过分配因子分配到主滤波器和子滤波器, 即

$$P_{i,k-1} = \beta_i^{-1} \rho_{k-1}, \quad Q_{i,k-1} = \beta_i^{-1} Q_f, \quad \hat{X}_{i,k-1} = \hat{X}_{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, M \quad (14)$$

#### 2) 联邦 Kalman 滤波算法的时间更新

$$P_{i,k|k-1} = \Phi_{i,k|k-1} P_{i,k|k-1} \Phi_{i,k|k-1}^T + \Gamma_{i,k|k-1} Q_{i,k|k-1} \Gamma_{i,k|k-1}^T, \quad i = 1, 2, \dots, N, M \quad (15)$$

#### 3) 联邦 Kalman 滤波算法的测量更新

$$P_{ik} = P_{i,k|k-1} - K_{ik} H_{ik} P_{i,k|k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

$$\hat{X}_{ik} = \Phi_{i,k|k-1} \hat{X}_{i,k-1} + K_{ik} (Z_{ik} - H_{ik} \Phi_{i,k|k-1} \hat{X}_{i,k-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

式中  $K_{ik} = P_{i,k|k-1} H_{ik}^T (H_{ik} P_{i,k|k-1} H_{ik}^T + R_{ik})^{-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  为子系统滤波增益.

从形式上看, 联邦最小二乘滤波公式 (5),(6),(8) 和 (9) 与 Kalman 滤波公式 (14) ~ (17) 很相似. 它们的主要区别在于: 1) 信息分配公式 (5) 和 (14) 的区别是, 由于联邦最小二乘滤波不考虑系统噪声而不用向子系统分配信息; 2) 时间更新公式 (6) 和 (15) 的区别是, 联邦最小二乘滤波不考虑系统模型误差和系统噪声的统计特性, 而联邦 Kalman 滤波需要准确知道其统计特性; 3) 测量更新公式中两种算法子系统滤波增益公式的区别是, 联邦最小二乘滤波不需要测量噪声的统计信息, 仅是对测量信息进行加权, 离当前时刻越近的测量值权值越大, 而联邦 Kalman 滤波需要预先知道测量噪声的统计信息或在线辨识, 同时还受系统噪声的影响; 4) 当  $Q_{i,k-1} \rightarrow 0$ ,  $\lambda = 1$  及  $R_{ik} \rightarrow I$  时联邦最小二乘滤波和联邦 Kalman 滤波是等价的, 所以, 当系统噪声和测量噪声的统计特性未知或不准确时, 联邦最小二乘滤波具有较强的自适应能力, 而联邦 Kalman 滤波的滤波精度会受到影响.

## 4 联邦最小二乘滤波算法仿真

通过在 INS/ 双星 /GPS 组合导航系统中的应用, 对本文所提的联邦最小二乘滤波算法与联邦 Kalman 滤波作进一步仿真比较.

### 4.1 组合系统状态方程和测量方程的建立

取 INS 3 个平台误差角、2 个速度 (东向、北向) 误差、2 个位置 (东向、北向) 误差和 3 个陀螺漂移误差为状态构成 10 维的全局状态方程<sup>[1]</sup>

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + W(t) \quad (18)$$

上式中  $X^T = [\phi_E, \phi_N, \phi_U, \delta V_E, \delta V_N, \delta L, \delta \lambda, \varepsilon_{bE}, \varepsilon_{bN}, \varepsilon_{bU}]$ ;  $E, N$  和  $U$  为东北天坐标系;  $\phi_E, \phi_N$  和  $\phi_U$  为 INS 数学平台误差角;  $\delta V_E$  和  $\delta V_N$  为 INS 的速度误差;  $\delta L$  和  $\delta \lambda$  为 INS 位置误差;  $\varepsilon_{bE}, \varepsilon_{bN}$  和  $\varepsilon_{bU}$  为 3 个轴向陀螺漂移误差;  $W(t)$  为系统噪声.

设 INS 为参考系统. 由于双星接收机仅输出位置 (经度和纬度), 所以用 INS 解算的位置减去双星输出的位置作为测量量, 构成子滤波器 1; 用 INS 解算的位置减去 GPS 输出的位置作为测量量, 构成子滤波器 2.

$$Z_i(t) = \begin{bmatrix} (L_I - L_{iD})R_M \\ (\lambda_I - \lambda_{iD})R_N \cos(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_M \delta L_i + N_{iN} \\ R_N \cos(L) \delta \lambda_i + N_{iE} \end{bmatrix} = H_i X_i(t) + V_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

这里  $H_i = [0_{2 \times 5} \quad \text{diag}[R_M \quad R_N \cos(L)] \quad 0_{2 \times 3}]$ ;  $V_i^T = [N_{iN} \quad N_{iE}]$ ;  $L_I, \lambda_I$  为 INS 输出的纬度和经度;  $L_{iD}, \lambda_{iD}$  为双星和 GPS 接收机输出的纬度和经度;  $R_M$  为子午面曲率半径;  $R_N$  为卯酉圈曲率半径;  $N_{iE}, N_{iN}$  为双星和 GPS 接收机沿东、北向位置误差.

### 4.2 仿真试验及结果分析和比较

#### 4.2.1 仿真条件

将在某科学实验车上实测的静态惯组 (IMU) 数据输入到 INS 仿真器中进行解算, 用解算出的 INS 信息与同步采集的双星和 GPS 数据进行实时信息融合, 以 GG24 型 GPS+GLONASS 混合接收机测量该静态点的经纬度信息为基准 (相当于真值). 其中加速度计零偏为  $5 \times 10^{-4} \text{ gm/s}^2$ , 陀螺漂移为  $0.5^\circ/\text{h}$ , 双星接收机的定位误差  $\pm 20 \sim \pm 30\text{m}$ , GPS 接收机的定位误差  $\pm 10 \sim \pm 20\text{m}$ , GG24 混合接收机的定位误差为  $\pm 5\text{m}$ .

根据以上条件, 分别采用联邦 Kalman 滤波和联邦最小二乘滤波进行仿真计算. 仿真过程中, 采用无重置结构,  $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ ; 联邦 Kalman 滤波中, 取 INS/ 双星子系统的观测噪声  $R_1 = \text{diag}[(30\text{m})^2 \quad (30\text{m})^2]$ , INS/GPS 子系统的观测噪声  $R_2 = \text{diag}[(20\text{m})^2 \quad (20\text{m})^2]$ . 联邦最小二乘滤波不需要系统噪声和测量噪声的任何统计特性, 只需给出遗忘因子  $\lambda$  的值, 一般取为  $0.95 \sim 0.99$ ,  $\lambda$  越小, 滤波器跟踪参数时变能力愈强, 但同时受到噪声干扰的影响愈严重, 因此, 常常需要在快速应变能力和降低估计精度两方面作出折衷, 这里选取  $\lambda = 0.97$ . 下面分三种情况进行仿真试验, 因双星接收机输出周期为 1.5 秒, 所以取滤波周期为 1.5 秒, 并给出了部分仿真结果.

#### 4.2.2 仿真结果分析和比较

##### 1) 反馈校正

分别将联邦 Kalman 滤波和联邦最小二乘滤波应用到 INS/ 双星 /GPS 组合系统中, 并采用反馈校正方案, 其结果如图 2 所示

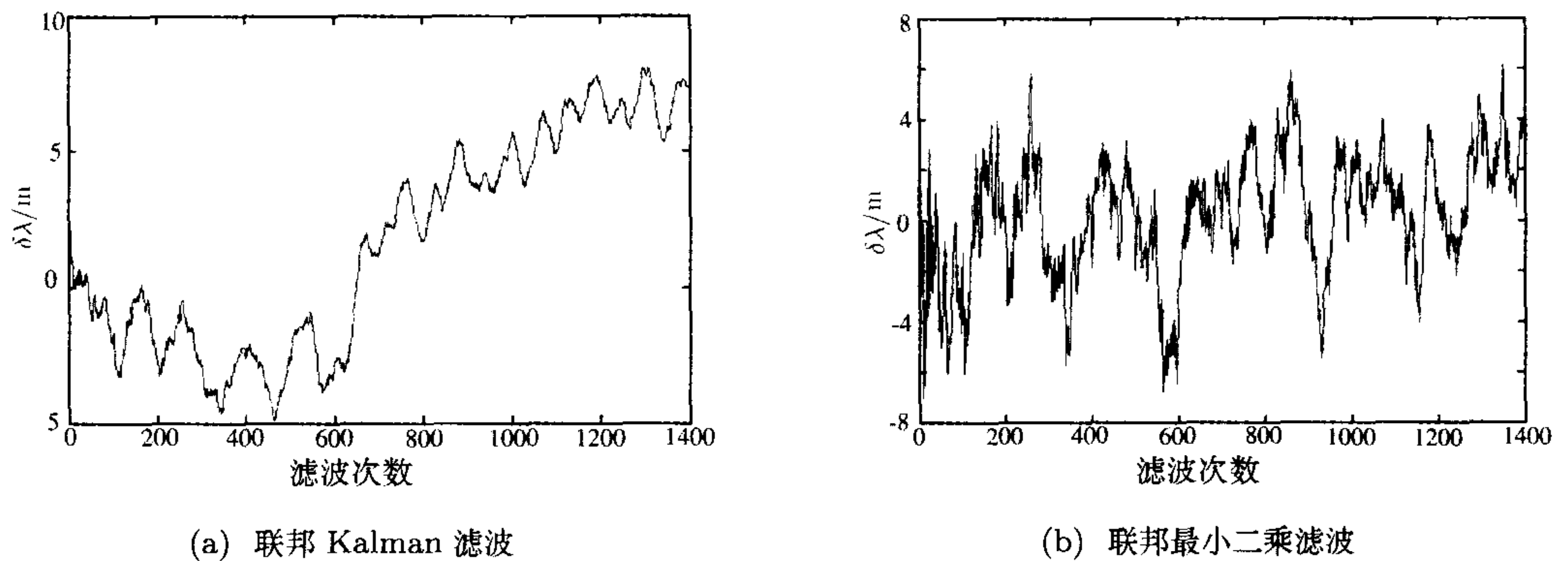


图 2 反馈校正后的位置误差

Fig. 2 Position errors using feedback correction

从图 2 中可以看出, 利用两种方法所得到的位置误差均在  $\pm 10\text{m}$  以内, 但由于子系统的观测噪声的统计信息不准确而导致联邦 Kalman 滤波的精度稍低于联邦最小二乘滤波, 且有明显上升趋势.

### 2) 输出校正

分别将联邦 Kalman 滤波和联邦最小二乘滤波应用到 INS/ 双星 /GPS 组合系统中, 并采用输出校正方案, 其结果如图 3 所示.

从图 3 中可以看出, 联邦最小二乘滤波的估计精度明显比 Kalman 滤波精度高. 这是因为子系统的测量噪声的统计信息不准确, 且输出校正又不对惯导系统的信息进行校正, 联邦 Kalman 滤波的结果仅是两个子系统滤波结果的加权值, 因此其结果近似于子系统的估计精度; 而联邦最小二乘滤波不对系统噪声和量测噪声做任何要求, 仅对测量信息进行加权, 从而使得其估计精度较高.

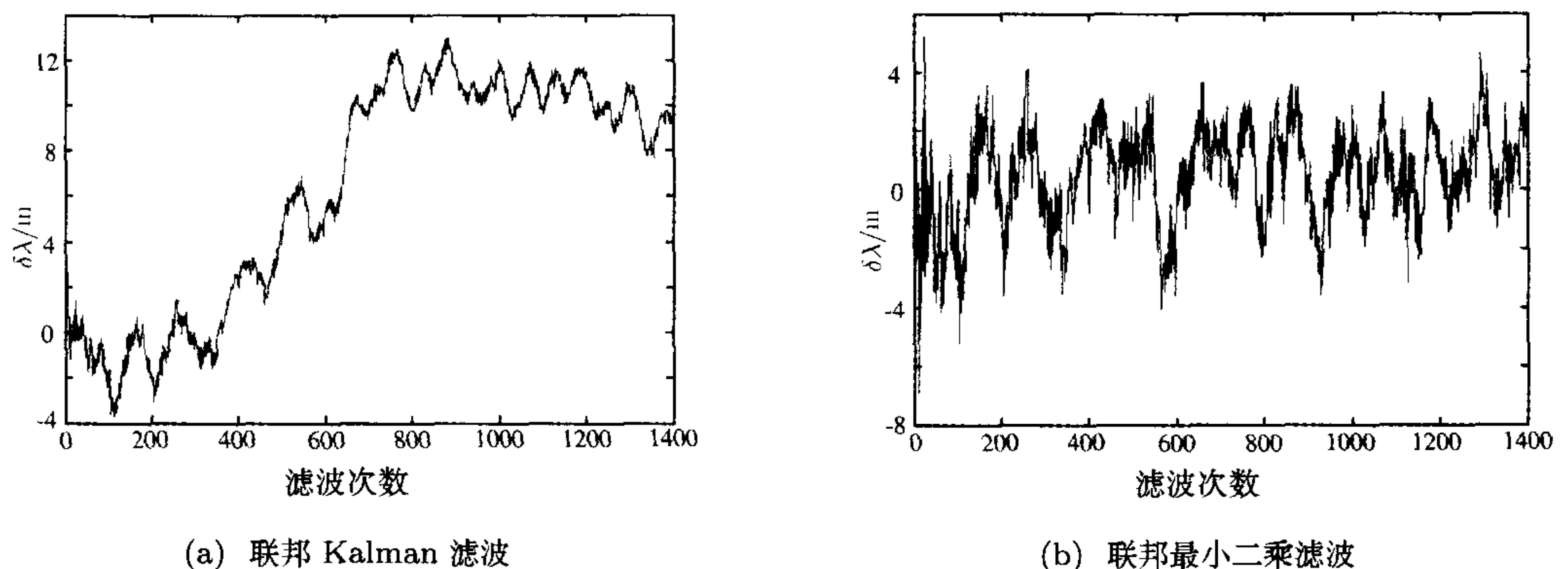


图 3 输出校正后的位置误差

Fig. 3 Position errors using output correction

### 3) 分段滤波

具有自主知识产权的“北斗双星”是有源导航定位系统, 考虑到战时 GPS 的不可用性及利用双星组合时为了不暴露目标而提出了分段滤波的方案, 即航行器在整个航行过程中只组合 2~3 次, 每次组合 3~5 分钟. 所以, 需要根据双星的定位信息准确地估计出 INS 的

失准角、速度、位置和陀螺漂移等误差, 并采用反馈校正方式将此误差补偿. 将联邦 Kalman 滤波和联邦最小二乘滤波分别应用到分段滤波中, 分段滤波选在滤波次数的 1 ~ 200 次、600 ~ 800 次和 1200 ~ 1400 次之间, 每次滤波 5 分钟, 其它时间内为纯惯导解算, 其仿真结果如图 4 所示. 图中的两条直线是  $\pm 100\text{m}$  误差带.

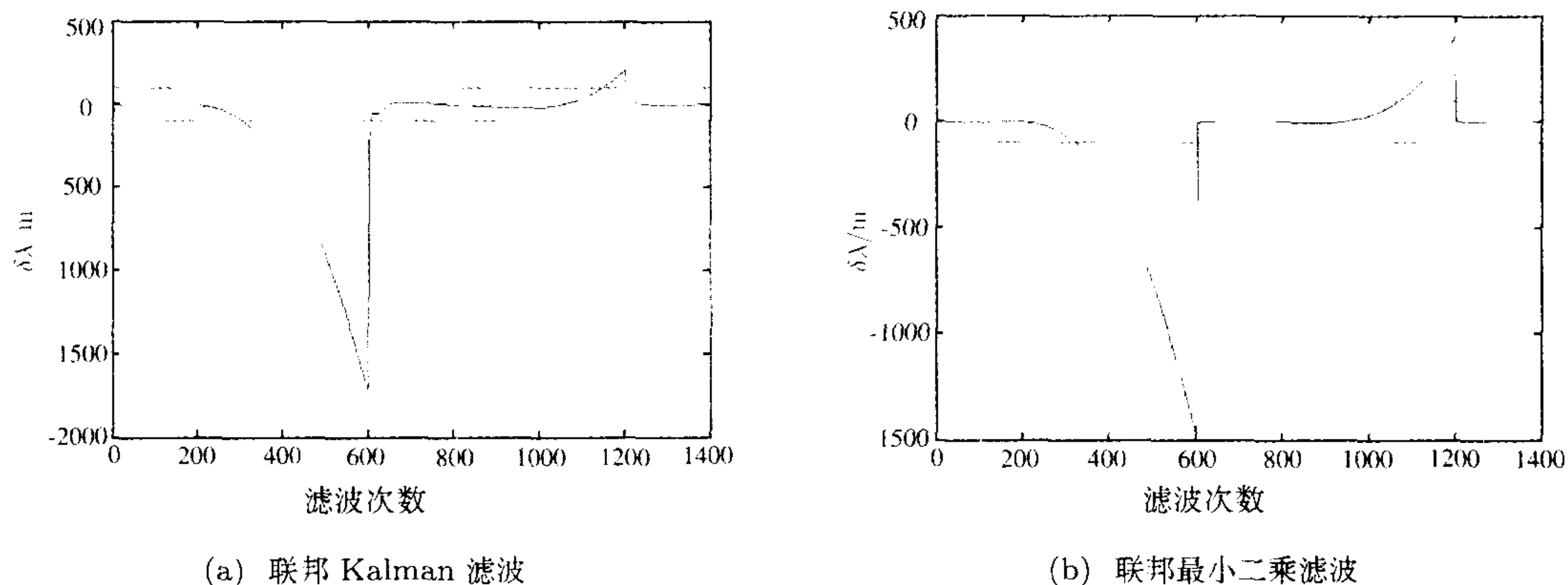


图 4 分段滤波后的位置误差

Fig. 4 Position errors using segment filtering

从图 4 可以看出, 为避开有源双星系统易暴露目标的缺点而采用两种方法进行分段滤波都能有效地抑制惯导系统的误差, 但在测量噪声的统计信息不准确时, 联邦最小二乘滤波比联邦 Kalman 滤波的估计精度高, 抑制惯导系统误差的能力强.

## 5 结束语

以双星应用为背景, 开展了 INS/ 双星 /GPS 组合导航系统信息融合技术研究. 为克服在系统噪声和量测噪声统计信息不确定时联邦 Kalman 滤波的缺点, 提出了基于最小二乘估计的联邦最小二乘滤波. 通过仿真试验验证了联邦最小二乘滤波的精度比联邦 Kalman 滤波的精度高.

## References

- 1 Yuan Xin, Yu Jixiang, Chen Zhe. Navigation System. Beijing: Aviation Industry Press, 1993. 135 ~ 190 (in Chinese)
- 2 Speyer J L. Computation and transmission requirements for a decentralized Linear-Quadratic-Gaussian control problem *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1979, **24**(2) 266 ~ 269
- 3 Carlson N A. Federated filter for fault-tolerant integrated navigation system. In: Proceeding of the IEEE Position Location and Navigation Symposium. Orlando, USA. 1988. 110 ~ 119
- 4 Gu Qitai, Wang Song. Study on the theory of federated filter. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2002, **10**(6): 34 ~ 40 (in Chinese)
- 5 Jin Shiyao, Li Hongliang, Tao Jing. The Fault-Tolerant Design in the information processing system for twin-star positioning. *Computer Engineering and Science*, 2001, **23**(5): 1 ~ 4(in Chinese)
- 6 Zhou Hongchao, Wang Zhengming. Data fusion method on orbit determination using GEOSTAR system *Chinese Space Science and Technology*, 2000, **20**(4). 30 ~ 35(in Chinese)

- 7 Qin Yongyuan, Zhang Hongyue, Wang Shuhua. Kalman filtering and integrated navigation theory. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998. 191 ~ 204(in Chinese)
- 8 Liu Xuanhuang. The algorithms of recursive least square and Kalman filtering. *Journal of East China Jiaotong University*, 1998, **15**(2): 62 ~ 67 (in Chinese)
- 9 Liu Danyang , Liu Xuanhaung. Optimal state estimation without the requirement of a priori statistics information of the initial state. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1994, **39**(10):2087 ~ 2091

**赵 龙** 分别于 1998 年和 2001 年在内蒙古师范大学和哈尔滨工程大学获学士和硕士学位。现为北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院博士研究生。主要研究领域为组合导航 / 制导和信息融合等。

(**ZHAO Long** Received his bachelor and Master degrees in 1998 and 2001 respectively from Inner Mongolia Normal University and Harbin Engineering University. He is currently a Ph.D. candidate in School of Automation Science and Electrical Engineering , Beijing University of Aeronautics and Astronautic. His main research interests include integrated navigation/guidance, information fusion, etc.)

**陈 哲** 1962 年和 1966 年在北京航空航天大学获得学士和硕士学位，现为北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院教授、博士生导师， IEEE 高级会员。主要研究领域为自动控制、导航 / 制导与机器人技术。

(**CHEN Zhe** Received her bachelor and Master degrees in 1962 and 1966 respectively from Beijing University of Aeronautics and Astronautic. She is currently a professor, Ph.D. director in School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautic. Her main research interests include automatic control, navigation/guidance, robot technology, etc.)