

# 一类具有稳定性的广义预测控制算法<sup>1)</sup>

宋崇辉 柴天佑

(东北大学自动化研究中心 沈阳 110004)  
(E-mail: chui\_song@hotmail.com)

**摘要** 讨论加权广义预测控制算法 (WGPC), 通过定义过渡时域和在性能指标中引入加权多项式, 限制预测时域大于控制时域与过渡时域的和, 保证了预测控制算法的稳定性; 给出了控制增量的表达式. 研究表明, 算法不仅能保证系统的稳定性且计算量没有增加, 且可退化为带有终端等式稳定性约束的预测控制算法, 从而可以进行统一分析. 加权多项式根据一个虚拟的输出反馈来设计, 数值仿真结果说明了该方法的有效性.

**关键词** 广义预测控制, 稳定性分析, 加权多项式, 过渡时域  
**中图分类号** TP13

## A Weighted Predictive Control Algorithm with Guaranteed Stability

SONG Chong-Hui CHAI Tian-You

(Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang 110004)  
(E-mail: chui\_song@hotmail.com)

**Abstract** A stable generalized predictive control is proposed. The closed-loop stability is guaranteed by the added weighted polynomials in the performance index and the condition that the predictive horizon is greater than the transitive horizon plus the control horizon. The calculation burden is not increased and this algorithm can recede to the terminal constraint generalized predictive control. The weighted polynomials are decided by a virtual output feedback control. An example is given to illustrate the effectiveness of this method.

**Key words** General predictive control, stability, weighted polynomial, transitive horizon

## 1 引言

从系统方程的角度看, 基于参数模型的预测控制研究主要为两类系统描述: 一类为状态方程描述, 称为后退时域控制 (RHC); 另一类为输入输出描述, 称为广义预测控制 (GPC)<sup>[1]</sup>. 由于系统闭环方程难于获得, 稳定性分析一直比较困难. Kwon 和 Pearson<sup>[2]</sup> 在研究后退时域控制时提出将状态在时域末端强制为零, 通过施加人为的稳定性条件, 保证系统的性能. 这一思想被人们引入各种预测控制算法中, 提出相应的 MPC 控制策略<sup>[3~5]</sup>.

1) 国家自然科学基金 (69934020)、国家“863”计划 (2002AA412140) 和国家“973”计划 (2002CB312201) 资助  
Supported by National Nature Science Foundation of P.R. China (69934020), National “863” Program (2002AA412140) and National “973” Basic Research Program (2002CB312201)

收稿日期 2002-07-15 收修改稿日期 2003-01-06

Received July 15, 2002, in revised form January 6, 2003

强制系统的输出预测值在预测时域内到达稳态值, 等于给系统施加了一个保证稳定性的等式约束. 然而严格的等式约束不仅会使控制律的调节过大, 且有可能与已有的约束相冲突, 产生可解性的问题.

为了克服等式约束的缺点, 人们引入终端加权<sup>[6~9]</sup>. 文献 [6] 针对以状态方程描述的离散线性系统, 选择特殊形式的终端加权项, 保证系统稳定, 但要求系统方程  $A$  是稳定的; 文献 [7,8] 考虑非线性系统, 提出二次型 Lyapunov 函数形式的加权项, 保证了系统的性能; 文献 [9] 考虑线性系统 MPC, 推出了终端加权矩阵应满足的时变 Lyapunov 方程.

本文针对以输入输出描述的对象, 通过定义过渡时域, 采用多项式对输出误差加权, 无需稳定性约束, 可以解决 GPC 算法的名义稳定性, 且算法的计算量没有增加, 最后以仿真例子说明本文所提出的算法的有效性.

## 2 系统描述与已知结果

受控对象的数学模型采用下列离散差分方程

$$A(z^{-1})\Delta y(t) = B(z^{-1})\delta u(t-1) \quad (1)$$

描述, 其中  $A(z^{-1})$  和  $B(z^{-1})$  是  $z^{-1}$  的多项式,  $\Delta = 1 - z^{-1}$ ,  $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}$ ,  $B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}$ ,  $\delta u(t-1) = \Delta u(t-1)$ ,  $n_A$  和  $n_B$  是被控对象阶数,  $u(t)$  和  $y(t)$  分别是受控对象的输入和输出.

**定义 1** (过渡时域). 对于采用差分方程 (1) 描述的系统,  $t$  时刻施加输出反馈

$$M(z^{-1})\delta u(t) = N(z^{-1})y(t) \quad (2)$$

其中  $M(z^{-1}) = m_0 + m_1 z^{-1} + \dots + m_{n_M} z^{-n_M}$ ,  $N(z^{-1}) = n_0 + n_1 z^{-1} + \dots + n_{n_N} z^{-n_N}$ ,  $n_M$  和  $n_N$  为  $M(z^{-1})$  和  $N(z^{-1})$  的阶数. 设  $t+j$  时刻为系统的输出完全由过去的输出序列所决定的时刻, 即

$$y(t+j+1) = \Phi(z^{-1})y(t+j) \quad (3)$$

中不显含  $u$ , 其中  $\Phi(z^{-1})$  为  $z^{-1}$  的多项式. 最小时间间隔定义为过渡时域, 记为  $N_s$ .

$$N_s = \max\{n_B + 1, n_M + 1\} \quad (4)$$

**注 1.** 在定义 1 中直接给出了过渡时域的大小, 若在  $t$  时刻施加输出反馈 (2), 在  $t+1$  时刻方程 (1) 可表示为

$$A(z^{-1})\Delta y(t+1) - \frac{b_0}{m_0} N(z^{-1})y(t) = z(B(z^{-1}) - b_0)\delta u(t-1) + \frac{b_0}{m_0} z(M(z^{-1}) - m_0)\delta u(t-1) \quad (5)$$

递推至  $\max\{n_B + 1, n_M + 1\}$  步可写为式 (3), 所以  $N_s$  的大小为式 (4).

**引理 1** (等价关系). 在  $t$  时刻对系统 (1) 施加输出反馈控制, 令  $N_s$  表示过渡时域,  $T(z^{-1})$  表示输出反馈 (2) 下的差分方程 (1) 闭环传递函数

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta M(z^{-1}) - z^{-1}N(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_{n_T} z^{-n_T} \quad (6)$$



那么, 当  $j > t + N_s$  时刻, 闭环系统与如下形式定义的无需坐标变换的状态方程

$$\tilde{\mathbf{x}}(i+1) = A\tilde{\mathbf{x}}(i), \quad y(i) = C\tilde{\mathbf{x}}(i) \quad (7)$$

等价, 其中  $i = j - (t + N_s)$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -t_{n_T} & \cdots & -t_2 & -t_1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad t_0], \quad \tilde{\mathbf{x}}(i) = \begin{bmatrix} y(i - n_T + 1) \\ \vdots \\ y(i) \end{bmatrix} \quad (8)$$

初始条件为  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [y(t + N_s - n_T + 1) \cdots y(t + N_s)]$ .

**证明.** 可由自治方程 (3) 的形式直接得到, 略.

**推论 1.** 由于在过渡时域后, 闭环系统与式 (7) 的状态方程等价, 具有相同的特征多项式, 因此如果闭环系统稳定则相应的状态方程 (7) 也是稳定的.

**推论 2.** 如果闭环系统稳定, 则相应的状态方程 (7) 的状态向量满足下式 (即如式 (8) 定义的系统的输出序列满足下式)

$$\mathbf{x}(i+1)^T P \mathbf{x}(i+1) - \mathbf{x}(i)^T P \mathbf{x}(i) \leq -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}(i) \quad (9)$$

其中  $Q$  是任意指定的对称正定阵,  $P$  是下面 Lyapunov 方程的解

$$A^T P A - P \leq -Q \quad (10)$$

### 3 控制算法及稳定性分析

假定设定点信号  $y_r(t+j)$  是已知的,  $N_u$  表示控制时域,  $N_p$  表示预测时域. 在  $j \leq N_u$  时控制增量  $\delta u(t+j-1)$  为自由变量; 当  $j > N_u$  时, 控制增量设为可镇定系统的输出反馈, 为表达简单, 取为如下形式

$$\delta u(t+j-1) = K(z^{-1})[y(t+j+1) - y_r(t+j_1)], \quad j > N_u \quad (11)$$

满足

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta - z^{-1}B(z^{-1})K(z^{-1}) \quad (12)$$

的特征值在单位圆内,  $n_T$  为  $T(z^{-1})$  的阶数. 如果  $\delta u(t+j)$  取为更普遍的形式如式 (2), 算法的表达式会更加复杂一些. 显然,  $N_s = n_B + 1$ . 性能指标定义如下

$$J = \sum_{j=1}^{N_p} \{ \mu(j)[y(t+j) - y_r(t+j)]^2 + \lambda(j)[\delta u(t+j-1)]^2 \} + \sum_{i=1}^{n_T} P_i(z^{-1})[y(t+N_p - n_T + i) - y_r(y(t+N_p - n_T + i))]^2 \quad (13)$$

或等价形式

$$J = \sum_{j=1}^{N_p} \{ \mu(j)[y(t+j) - y_r(t+j)]^2 + \lambda(j)[\delta u(t+j-1)]^2 \} +$$

$$[\mathbf{x}_r(t + N_p) - \mathbf{x}_r(t + N_p)]^T P [\mathbf{x}(t + N_p) - \mathbf{x}_r(t + N_p)] \tag{14}$$

上式中  $N_p > N_u + N_s, \mu(j) > 0, \lambda(j) > 0, \forall j$  表示输出量和控制量的加权, 且对于式 (13)  $P_i(z^{-1}) = p_0^i + p_1^i z^{-1} + \dots + p_i^i z^{-i+1} i = 1, \dots, n_T$ ; 对于式 (14),  $P_{n_T \times n_T}$  为对称正定阵,  $\mathbf{x}(t + N_p) = [y(t + N_p - n_T + 1), \dots, y(t + N_p)]^T, \mathbf{x}_r(t + N_p) = [y_r(t + N_p - n_T + 1), \dots, y_r(t + N_p)]^T$ .

注 2. 式 (11) 为了递推预测值时表达简单而作了简化.

### 3.1 预测值的求取

下面给出预测值递推求解算法, 实际上是在计算机上通过矢量运算求输出预测值的步骤. 当  $j \leq N_u$  时, 与用 Diophantine 方程递推的预测值相同 (Diophantine 方程是递推方法的一种公式化表达). 令

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+N_p) \end{bmatrix}, \mathbf{y}_r = \begin{bmatrix} y_r(t+1) \\ \vdots \\ y_r(t+N_p) \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta u(t) \\ \vdots \\ \delta u(t+N_u-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y(t-n_A) \end{bmatrix}, \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \delta u(t-1) \\ \vdots \\ \delta u(t-n_B) \end{bmatrix}$$

引入记号, 令  $T(f(z^{-1})y(j), \mathbf{y})$  表示长度为  $N_p$  的  $f(z^{-1})y(j)$  的矢量形式,  $\text{para}[T(f(z^{-1})y(j), \mathbf{y})]$  表示由  $f(z^{-1})$  的系数形成的长度为  $N_p$  的向量, 即如果  $f(z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$ ,

$$\text{那么 } T(f(z^{-1})y(t+4), \mathbf{y}) = \underbrace{[0 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]}_{N_p \text{ Column}} \times \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+N_p) \end{bmatrix}, \text{para}[T(f(z^{-1})y(t+4), \mathbf{y})] = \underbrace{[0 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]}_{N_p \text{ Column}}.$$

注 3. 当  $j > N_u$  时, 系统假设受一个输出反馈控制, 由注 1 知, 在过渡时域, 系统方程随着  $j$  的变化而变化, 直到  $j > N_u + N_s$ . 所以要用迭代算法来直接求得输出预测值.

迭代算法总结如下:

步骤 1. 在第  $j$  步, 假设输出值已经被表示为  $y(t+j) = \mathbf{f}_j \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_j \mathbf{u} + \mathbf{h}_j \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}_j \mathbf{y}_r$ , 将  $j$  步以前的输出值写为如下形式

$$\begin{bmatrix} y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix} \mathbf{y}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_j \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_j \end{bmatrix} \mathbf{u}_0 - \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_j \end{bmatrix} \mathbf{y}_r \tag{15}$$

其中  $\mathbf{f}_j, \mathbf{g}_j, \mathbf{h}_j, \mathbf{w}_j$  为适当维数的矢量;

步骤 2. 在  $j+1$  步, 输出值可表示为

$$y(t+j+1) = f_{j+1}(z^{-1})y(t+j) + g_{j+1}(z^{-1})\delta u(t+j) - w_{j+1}(z^{-1})y_r(t+j+1) \tag{16}$$

其中  $f_{j+1}(z^{-1}), g_{j+1}(z^{-1}), w_{j+1}(z^{-1})$  为适当系数的多项式. 方程 (16) 可写为

$$y(t+j+1) = T(f_{j+1}(z^{-1})y(t+j), \mathbf{y}) + g_{j+1}(z^{-1})\delta u(t+j) - w_{j+1}(z^{-1})y_r(t+j+1) \tag{17}$$

将式 (15) 代入 (17)(注意到  $T(f_{j+1}(z^{-1})y(t+j), \mathbf{y})$  的定义), 整理后式 (16) 可写为

$$y(t+j+1) = \mathbf{f}_{j+1} \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{j+1} \mathbf{u} + \mathbf{h}_{j+1} \mathbf{u}_0 - \mathbf{w}_{j+1} \mathbf{y}_r \quad (18)$$

**步骤 3.** 从第 1 步到第  $N_p$  步, 重复步骤 1 和步骤 2 得到

$$Y = F\mathbf{y}_0 + G\mathbf{u} + H\mathbf{u}_0 - W\mathbf{y}_r \quad (19)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_p} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{N_p} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{N_p} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{N_p} \end{bmatrix}.$$

**注 4.** 当  $j \leq N_u$  时,  $\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_{N_u}$  为零矢量.

### 3.2 控制增量的求取

将式 (14)(或式 (13)) 表示的性能指标函数  $J$  进一步推导, 可写为

$$J = \sum_{j=1}^{N_p} \mu(j)[y(t+j) - y_r(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j)\delta u(t+j-1)^2 + \sum_{j=N_u+1}^{N_p} \lambda(j)\{K(z^{-1})[y(t+j-1) - y_r(t+j-1)]\}^2 + [\mathbf{x}(t+N_p) - \mathbf{x}_r(t+N_p)]^T P[\mathbf{x}(t+N_p) - \mathbf{x}_r(t+N_p)] \quad (20)$$

令  $\mu = \text{diag}\{\mu(1), \dots, \mu(N_p)\}$ ,  $\lambda = \text{diag}\{\lambda(1), \dots, \lambda(N_u)\}$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}_{N_p \times N_p}, \lambda_k = \begin{bmatrix} \text{para}[T(\lambda(N_u+1)K(z^{-1})y(t+N_u), \mathbf{y})] \\ \vdots \\ \text{para}[T(\lambda(N_p)K(z^{-1})y(t+N_p-1), \mathbf{y})] \end{bmatrix} \quad (21)$$

令  $\bar{\mu} = \mu + \bar{P} + \lambda_k$

$$J = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T \mu (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) + \mathbf{u}^T \lambda \mathbf{u} + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T \lambda_k (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T \bar{P} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r)^T \bar{\mu} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_r) + \mathbf{u}^T \lambda \mathbf{u} \quad (22)$$

令  $\bar{W} = I + W$ , 将式 (19) 代入式 (22) 得到

$$J = [G\mathbf{u} + F\mathbf{y}_0 + H\mathbf{u}_0 - \bar{W}\mathbf{y}_r]^T \bar{\mu} [G\mathbf{u} + F\mathbf{y}_0 + H\mathbf{u}_0 - \bar{W}\mathbf{y}_r] + \mathbf{u}^T \lambda \mathbf{u} \quad (23)$$

最小化性能指标 (即  $\partial J / \partial \mathbf{u} = 0$ ) 得到

$$\mathbf{u} = (G^T \bar{\mu} G + \lambda)^{-1} G^T \bar{\mu} [\bar{W}\mathbf{y}_r - H\mathbf{u}_0 - F\mathbf{y}_0] \quad (24)$$

由式 (24) 可知, 预测控制增量为

$$\delta u(t) = \vec{d}_1^T [\bar{W}\mathbf{y}_r - H\mathbf{u}_0 - F\mathbf{y}_0] \quad (25)$$

其中  $\vec{d}_1^T$  是  $(G^T \bar{\mu} G + \lambda)^{-1} G^T \bar{\mu}$  的第 1 行.



基本加权广义预测算法总结如下:

**步骤 1.** 给定预测时域  $N_p$  和控制时域  $N_u$  及加权常数  $\lambda(j)$  和  $\mu(j)$ ;

**步骤 2.** 选择正定对称加权阵  $P$  或加权多项式  $P_i(z^{-1})$  序列;

**步骤 3.** 计算矩阵  $G, H, F, W, \lambda_\kappa, \bar{\mu}$  和  $(G^T \bar{\mu} G + \lambda)^{-1}$ ;

**步骤 4.** 计算控制增量  $\delta u(t)$ .

**注 5.** 如果  $y(t+j) = y_r(t+j), j > N_u$ , 那么  $\delta u(t) = K(z^{-1})[y(t+j) - y_r(t+j)] = 0$ . 上述算法退化为受限的 GPC 算法<sup>[3]</sup>, 因此两种算法可以在同一个框架下考虑.

**注 6.** 将上述 WGPC 算法与标准的 GPC 算法比较, 可以看出 WGPC 与标准 GPC 算法步骤类似, 但无需坐标变换、无需约束从 WGPC 获得的控制增量就可以镇定系统, 同时计算负担并没有增加.

### 3.3 渐进稳定性

在时刻  $t$ , 令  $\delta u^*(t+i; t, t+N_u)$  表示优化后的控制输入,  $y^*(t+i; t, t+N_p)$  表示相应的优化输出,  $J^*(t)$  表示目标函数的优化值. 因为闭环稳定性不受  $y_r$  影响<sup>[3]</sup>, 所以令  $y_r(t+j) = 0$ .

**定理 1.** 考虑对系统 (1) 施加控制律 (25). 如果满足下列条件:

(A1)  $0 \leq \lambda(1) \leq \dots \leq \lambda(N_p), 0 \leq \lambda(1) \leq \dots \leq \lambda(N_p)$ ;

(A2)  $N_p - N_u \geq n_B + 1$ ;

(A3) 加权阵  $P$  是下面 Lyapunov 方程的对称正定解

$$A^T P A - P = -Q \quad (26)$$

其中  $A$  由方程 (8) 定义,  $Q = \bar{Q} + \tilde{Q}, \bar{Q}$  为正定对称阵, 且

$$\tilde{Q} = \text{para}[T(K(z^{-1})y(t+N_p), \mathbf{y})]^T \times \lambda(N_p) \times \text{para}[T(K(z^{-1})y(t+N_p), \mathbf{y})] + \mu(N_p)[-t_{n_T} \dots -t_1]^T [-t_{n_T} \dots -t_1] \quad (27)$$

其中  $t_1, \dots, t_{n_T}$  是方程 (12) 的系数.

那么, 闭环系统 ((1) 和 (25)) 是渐近稳定的.

**证明.** 在时刻  $t$ , 目标函数优化值为

$$J^*(t) = \sum_{j=1}^{n_p} \{ \mu(j)[y^*(t+j; t, t+N_p)]^2 + \lambda(j)[\lambda u^*(t+j-1; t, t+N_p)]^2 \} + \mathbf{x}(t+N_p)^T P \mathbf{x}(t+N_p) \quad (28)$$

将优化控制增量  $\delta u^*(t)$  施加于系统. 在时刻  $t+1$ , 输出是  $y(t+1) = y^*(t+1, t, t+N_p)$ . 在时刻  $t+1$ , 目标函数的优化值为

$$J^*(t+1) = \sum_{j=1}^{N_p} \{ \mu(j)[y^*(t+j+1; t+1, t+N_p+1)]^2 + \lambda(j)[\delta u^*(t+j, t+1, t+N_p+1)]^2 \} + \mathbf{x}(t+N_p+1)^T P \mathbf{x}(t+N_p+1) \quad (29)$$

在时刻  $t+1$ , 考虑如下定义的控制增量  $\delta u(t+j)$

$$\delta u(t+j; t+1, t+N_p+1) = \begin{cases} \delta u^*(t+j; t, t+N_p), & j = 1, \dots, N_p - 1 \\ K(z^{-1})y^*(t+N_p; t, t+N_p), & j = N_p \end{cases} \quad (30)$$

和相应的输出轨迹

$$y(t+j+1; t+1, t+N_p+1) = \begin{cases} y^*(t+j+1; t, t+N_p), & j=1, \dots, N_p-1 \\ y(t+j+1; t+1, t+N_p+1), & j=N_p \end{cases} \quad (31)$$

那么

$$\begin{aligned} J^* - J(t+1) &= \sum_{j=1}^{N_p} \{ \mu(j)[y^*(t+j; t, t+N_p)]^2 + \lambda(j)[\lambda u^*(t+j-1; t, t+N_p)]^2 \} - \\ &\quad \sum_{j=1}^{N_p} \{ \mu(j)[y^*(t+j+1; t+1, t+N_p+1)]^2 - \lambda(j)[\lambda(j)[\delta u^*(t+j, t+1, t+ \\ &\quad N_p+1)]^2 \} + \mathbf{x}(t+N_p)^T P \mathbf{x}(t+N_p) - \mathbf{x}(t+N_p+1)^T P \mathbf{x}(t+N_p+1) \end{aligned} \quad (32)$$

将 (A1)、式 (30) 和 (31) 代入式 (32), 得到

$$\begin{aligned} J^* - J(t+1) &\geq \mu(1)y(t)^2 + \lambda(1)\delta u^*(t-1)^2 - \mu(N_p)y(t+N_p+1)^2 - \lambda(N_p)\delta u(t+N_p)^2 + \\ &\quad \mathbf{x}(t+N_p)^T P \mathbf{x}(t+N_p) - \mathbf{x}(t+N_p+1)^T P \mathbf{x}(t+N_p+1) \end{aligned}$$

考虑式 (11), (12), (27)、条件 (A2), (A3)、引理 1 和推论 2, 得到下式

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t+N_p)^T P \mathbf{x}(t+N_p) - \mathbf{x}(t+N_p+1)^T P \mathbf{x}(t+N_p+1) - \mu(N_p)y(t+N_p+1)^2 - \\ &\lambda(N_p)\delta u(t+N_p)^2 = \mathbf{x}(t+N_p)^T Q \mathbf{x}(t+N_p) - \mu(N_p)y(t+N_p+1)^2 - \lambda(N_p)\delta u(t+N_p)^2 = \\ &\mathbf{x}(t+N_p)^T \bar{Q} \mathbf{x}(t+N_p) \geq 0 \end{aligned}$$

那么

$$J^*(t) - J(t+1) \geq \mu(1)y(t)^2 + \lambda(1)\delta u^*(t-1)^2 \quad (33)$$

当  $j > N_u$  时, 系统假设受输出反馈控制, 反馈控制并不会直接施加于系统. 由式 (30) 给出的控制增量是满足  $\delta u(t+j-1) = K(z^{-1})y(t+j-1)$   $j > N_u$  的控制增量中的一个. 按照极大值原理得到

$$J(t+1) \geq J^*(t+1) \quad (34)$$

由式 (33) 和 (34) 得到

$$\lambda(1)\delta u^*(t-1)^2 + \mu(1)y^*(t)^2 + J^*(t+1) \leq J^*(t) \quad (35)$$

由优化值的定义 (有限时域优化), 可得到

$$\eta \geq J^*(1) \geq J^*(2) \geq \dots \geq J^*(N) \geq 0 \quad (36)$$

其中  $\eta$  是一个常数. 那么

$$\begin{aligned} J^*(1) &\geq J^*(2) + \lambda(1)\delta u^*(0)^2 + \mu(1)y^*(1)^2 \geq J^*(3) + \lambda(1)\delta u^*(0)^2 + \mu(1)y^*(1)^2 + \\ &\lambda(1)\delta u^*(0)^2 + \mu(1)y^*(2)^2 \geq J^*(N) + \sum_{i=1}^N [\lambda(1)\delta u^*(N-2)^2 + \mu(1)y^*(N-1)^2] \geq \\ &J^*(N) + \sum_{i=1}^N [\mu(1)y^*(N-1)^2] \end{aligned} \quad (37)$$

进一步有

$$\sum_{i=1}^N [\mu(i)y^*(N-1)^2] \leq J^*(1) - J^*(N) \leq \eta \quad (38)$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 由无穷级数的性质得到  $y(\infty) \rightarrow 0$ , 那么闭环系统渐近稳定.

证毕.

### 3.4 仿真例子

例 (不稳定系统). 系统方程为  $(1 - 1.75z^{-1} + 0.7z^{-2})\Delta y(t) = (1 - 0.8z^{-1})\delta u(t - 1)$ , 设计参数取为  $n_p = 7$ ,  $N_u = 4$ ,  $\mu(1) = \dots = \mu(N_p) = 5$ ,  $\lambda(1) = \dots = \lambda(N_p) = 1$ , 参考信号  $y_r(t)$  是幅值为 5 的方波信号. 取假设的反馈矩阵  $K(z^{-1}) = -1.25 + 0.1z^{-1}$ ,  $\bar{Q} = I$ ,  $Q$  及  $P$  为

$$Q = \begin{bmatrix} 2.922 & -4.185 & 4.6500 \\ -4.185 & 11.6750 & -10.25 \\ 4.6500 & -10.25 & 12.26 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 19.633 & -28.289 & 19.16 \\ -28.289 & 58.789 & -41.796 \\ 19.165 & -41.796 & 43.472 \end{bmatrix}$$

结果如图 1 所示.

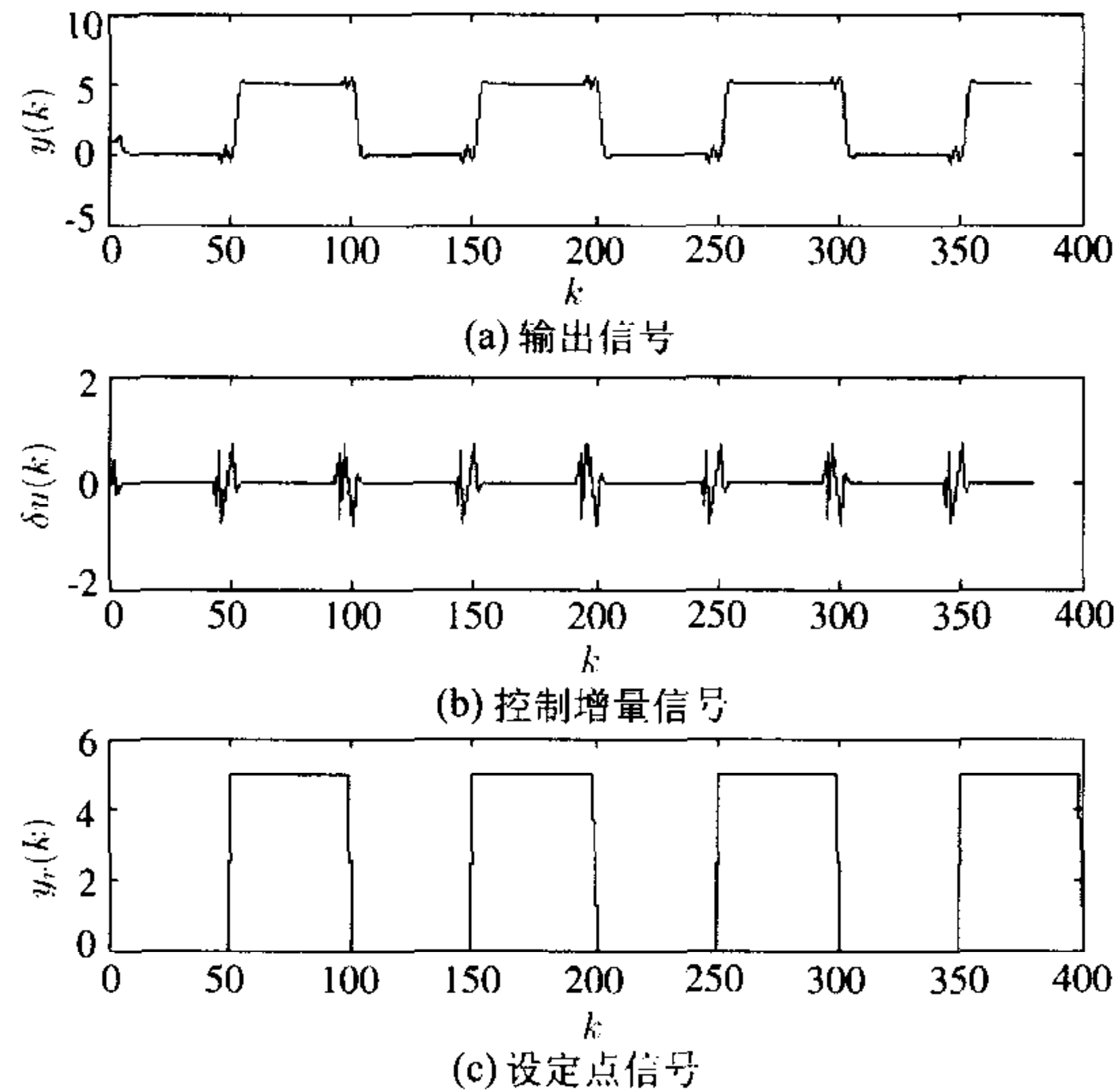


图 1 输出轨迹及控制增量和设定点信号

Fig. 1 Output Trajectory, Input Increment and Set Point Signal network with key inputs

## 4 结束语

加权预测控制算法显示了良好的稳定性, 通过对末端输出值序列的加权, 得到了稳定的开环控制增量序列. 当令  $y(t+j) = y_r(t+j)$  时, 等价于令输出反馈中的  $\delta u(t+j) = 0$ , 这时指标函数退化为  $J = \sum_{j=1}^{N_p} \mu(j)[y(t+j) - y_r(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_p} \lambda(j)[\delta u(t+j-1)]^2$ , 将文中的稳定性证明稍加修改, 就可以证明其稳定性. 预测值的递推比 GPC 要复杂, 但是并没有增加任何计算量上的负担, 求得的控制增量的表达形式与 GPC 非常类似. 当系统有干扰和不确定因素时, 系统的鲁棒性可以通过讨论闭环系统的解析形式进行分析, 本文提出的算法也很适合结合自适应算法.



## References

- 1 Clarke D W, Mohtadi C P S, Tuffs Generalized predictive control-Part I The basic algorithm And Part II Extensions and interpretations. *Automatica*, 1987, **23**(1): 137~160
- 2 Kwon W H, Pearson A E. On feedback stabilization of time varying discrete linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, **23**(4): 479~481
- 3 Clarke D W, Scattolini R. Constrained receding horizon predictive control. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 1991, **138**(4): 347~354
- 4 Keerthi S S, Gilbert E G. Optimal infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: stability and moving horizon approximations. *Journal of Optimal Theory Applications*, 1988, **57**(2): 265~293
- 5 Mosca E, Zhang J. Stable redesign of predictive control. *Automatica*, 1992, **28**(6), 1229~1233
- 6 Zheng Alex. Stability of model predictive control with time varying weights. *Computers and Chemical Engineering*, 1997, **21**(12). 1389~1393
- 7 Parisini T, Zoppoli R. A receding horizon regulator for nonlinear systems and a neural approximation. *Automatica*, 1995, **31**(10). 1443~1451
- 8 Chen H, Allegower F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 1998, **34**(10): 1205~1217
- 9 Kwon W H, Bruckstein A N, Kailath T. Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method. *International Journal of Control*, 1983, **37**(3): 631~643
- 10 Wang Yi-jing, Zuo Zhi-qiang. A Fast Algorithm of Generalized Predictive Control Based on Improved Back Propagation Network. *Control Engineering*, 2002, **9**(2): 10~13 (in Chinese)
- 11 Wang Dian Hui, Chai Tian You. Artificial Neural Networks Based Nonlinear Self-Tuning Predictive Controller *Acta Automatica Sinica*, 1997, **23**(3): 396~399 (in Chinese)
- 12 Xi Yu Geng, Zhang Jun, Wu Wei Qi. Further Study On Properties of GPC System. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(3): 400~405 (in Chinese)
- 13 Yu Shi-Ming, Du Wei. Applications of Goal Programming in Receding Horizon Optimization and Online Identification of Predictive Control. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(6): 995~1001

**宋崇辉** 东北大学信息科学与工程学院博士生. 研究方向为模糊系统、预测控制、自适应控制等.

(**SONG Chong-Hui** Ph.D. Candidate of Information Science and Engineering College of Northeastern University. His research Areas are Fuzzy System, Predictive Control, Adaptive Control.)

**柴天佑** 中国工程院院士. 研究方向为智能控制、自适应控制、复杂工业过程的建模控制和优化.

(**CHAI Tian-You** Academician of Chinese Academy of Engineering. His research Areas are Intelligent Control, Adaptive Control and Modeling and Optimizing of Complex Industry Process.)