第 30 卷 第 5 期
2004 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 5
Sept., 2004

广义区间动力系统的能控性[1)]

何希勤[1] 张大庆[1] 张庆灵[2]

[1](鞍山科技大学应用数学研究所 鞍山 114002)

[2](东北大学理学院 沈阳 110006)

(E-mail: xiqinhe@hotmail.com)

摘 要 讨论了广义区间动力系统正则性、I-能控与 C-能控问题. 由于上述问题等价于判别某个区间矩阵为列满秩,首先得到判别区间矩阵为列满秩的充分条件与充分必要条件,进一步得到了判别广义区间系统为正则的充分必要条件、I-能控的充分条件与 C-能控的充分必要条件. 通过数值实例说明所得到的结果相对于已有结果更具有一般性及有效性. 由对偶原理,得到相应的能观性的判据.

关键词 广义区间系统,正则性,能控性,区间矩阵

中图分类号 O231.1

Controllability of Descriptor Interval Systems

HE Xi-Qin[1] ZHANG Da-Qing[1] ZHANG Qing-Ling[2]

[1](*Research Institute of Applied Mathematics, Anshan University of Science and Technology, Anshan* 114002)

[2](*Faculty of Science, Northeastern University, Shenyang* 110006)

(E-mail: xiqinhe@hotmail.com)

Abstract The regularity, I-controllability and C-controllability of descriptor interval systems are discussed. Necessary and sufficient conditions or sufficient conditions for a descriptor interval system to be regular, I-controllable and C-controllable are given base on the criterions yielded on an interval matrix of full column rank. Numerical example shows that the results are more common and valid than some exiting results. The corresponding results for the dual observability problems are straightforward extensions.

Key words Descriptor interval systems, regularity, controllability, interval matrices

1 引言

在实际的应用中,由于测量误差或计算时的舍入误差等原因,动力系统中的系统矩阵有

1) 辽宁省自然科学基金(20010100)资助

Supported by Natural Science Foundation of Liaoning Province (20010100)

收稿日期 2003-03-10 收修改稿日期 2003-09-01

Received March 10, 2003; in revised form September 1, 2003

时并不能够被准确地知道,但却可以知道系统矩阵中元素的变化范围.在这种情况下将系统矩阵视为区间矩阵是一种处理扰动和不确定性的有效方法[1~4].关于普通状态空间意义下的动力系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)$($A$,$B$ 为适维矩阵)当系统矩阵 A 为区间矩阵时,文献[2]利用区间矩阵的分解的方法得到判别上述系统稳定的充分必要条件;文献[5]同样利用区间矩阵分解的方法得到在输入矩阵 B 为普通常数矩阵时单数入系统的能控性的判据.由于考虑广义系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)$($E$,$A$,$B$ 为适维矩阵)的稳定性、能控能观性等性质的同时还须注意到系统的正则性与脉冲膜的存在性,因此讨论广义区间动力系统的某些性子时要比普通系统中相应的问题要复杂得多.特别当广义系统的系统矩阵 E 为区间矩阵时,由于矩阵 E 中元素的微小变化可能会导致 E 的秩的改变,从而使广义系统的有限特征值的个数发生改变,使相应的问题变得十分复杂,难于处理.该文讨论了当广义系统的系统矩阵 E,A 为区间矩阵时的稳定性问题,其结论是建立在系统矩阵 E 的秩不变的假设上,但却没有给出如何判别一个区间矩阵中所有矩阵都具有相同的秩的判据;文献[6]利用区间矩阵完全分解的方法讨论了广义系统中系统矩阵 A 为区间矩阵,E 为普通常数矩阵时系统的能控性,但文献[6]中用来判别广义区间系统 R-能控的判据是不可用的.

以(E,A,B,C)来表示广义系统,称此系统是正则的,如果对于矩阵对(E,A)存在 $s\in C$,使 $\det(sE-A)\neq 0$.称其为无脉冲膜的,如果对于 $s\in C$,$\deg\det(sE-A)=\mathrm{rank}(E)$.称系统是完全能控的($C$-能控)如果对于任意的 $t_1>0$,$\boldsymbol{x}(0)\in R^n$ 和 $\boldsymbol{w}\in R^n$,存在控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 使得 $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{w}$.很明显 C-能控是普通动力系统的能控性的自然推广.称系统是 R-能控,如果系统在可达集内能控.称系统是脉冲能控(I-能控),如果存在状态反馈 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}(t)$ 使得闭环系统(E,$A+BK$)是无脉冲膜的;称系统是强能控(S-能控),如果系统是 R-能控和 I-能控.

本文讨论了广义系统(E,A,B,C)在系统矩阵 E,A 为区间矩阵时系统为正则,系统矩阵 A,B 为区间矩阵时系统的 I-能控性和系统矩阵 E,A,B 为区间矩阵时,系统的 C-能控性问题.文中第二部分为所要讨论的系统的描述与引理,第三部分为本文主要结果.

2 系统描述与引理

称

$$\mathcal{A}=[\underline{A},\overline{A}]=\{(a_{ij})\mid \underline{a}_{ij}\leqslant a_{ij}\leqslant \overline{a}_{ij},i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\} \tag{1}$$

为区间矩阵,其中 $\underline{A}=(\underline{a}_{ij})$,$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})\in R^{m\times n}$.令 $A_0=\frac{\underline{A}+\overline{A}}{2}$,$\Delta A=\frac{\overline{A}-\underline{A}}{2}$,则 $\mathcal{A}=[A_0-\Delta A,A_0+\Delta A]$.

本文中讨论的系统如下广义区间动力系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$,$\boldsymbol{u}(t)\in R^p$ 分别为系统的状态向量、输入和输出向量;系统矩阵 $\mathcal{E}=[\underline{E},\overline{E}]$,$\mathcal{A}=[\underline{A},\overline{A}]$ 为区间矩阵,$\underline{E}$,$\overline{E}$,$\underline{A}$,$\overline{A}\in R^{n\times n}$;系统矩阵 $B=[\underline{B},\overline{B}]$ 为区间矩阵,$\underline{B}$,$\overline{B}\in R^{n\times p}$.

引理 1[7]. 系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ 是正则的,当且仅当 $\mathrm{rank}[E_n,E_d]=n^2$,其中 $E,A\in R^{n\times n}$ $E_n\in R^{n^2\times n}$,$E_d\in R^{n^2\times n^2}$

$$E_n = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_d = \begin{bmatrix} A & & & & \\ E & A & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & A & \\ & & & E & A \end{bmatrix} \tag{3}$$

引理 2[6]. 设矩阵对(E,A)是正则的，则系统(E,A,B)为 I-能控的，当且仅当

$$\mathrm{rank}[AS_E \quad E \quad B] = n \tag{4}$$

其中 $S_E \in R^{n\times(n-\mathrm{rank}(E))}$为矩阵 E 的最大右零化矩阵.

引理 3. 设矩阵对(E,A)是正则的，则广义系统(E,A,B)是 C-能控的当且仅当

$$\mathrm{rank}[E_d, E_b] = n^2 \tag{5}$$

其中

$$E_d = \begin{bmatrix} A & & & \\ E & A & & \\ & E & \ddots & \\ & & \ddots & A \\ & & & E \end{bmatrix}_{n^2\times n(n-1)}, \quad E_b = \begin{bmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{bmatrix}_{n^2\times np}$$

由上述引理可以看到，判别广义系统的正则性与能控性分别等价于判别某个矩阵为行满秩，因此在下面的主要结论中先讨论了区间矩阵为列(行)满秩的判据，之后得到判别系统(2)为正则、I-能控、C-能控的判据.

3　主要结论

3.1　区间矩阵列满秩的充分必要条件

设 $A\in R^{m\times n}$，记 $\sigma(A)$为 A 的奇异值集合，即

$$\sigma(A) = \{\sigma \mid \det(\sigma I - A^{\mathrm{T}}A) = 0\} \tag{6}$$

其中 I 为 n 阶单位阵. 则 $\forall \sigma\in\sigma(A)$，$\sigma\geqslant 0$. 又记

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\sigma \mid \sigma \in \sigma(A), A \in \mathcal{A}\} \tag{7}$$

为由式(1)定义的区间矩阵$\mathcal{A}$的奇异值集合.

定义 1. 称区间矩阵$\mathcal{A}=[\underline{A},\overline{A}]$，$\underline{A},\overline{A}\in R^{m\times n}$，为列满秩的，如果 $\forall A\in\mathcal{A}$，$\mathrm{rank}(A)=n$.

定理 1. 设 A 为如式(1)所定义的区间矩阵，若 $\|\Delta A\|_2<\min\{\sigma(A_0)\}$，则区间矩阵$\mathcal{A}$是列满秩的，即 $\forall A\in\mathcal{A}$，$\mathrm{rank}(A)=n$.

为证明定理 1，需要下列引理.

引理 4[8]. 若 $A,B\in R^{m\times n}$，分别具有奇异值

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0, \quad \tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n \geqslant 0$$

则有

$$|\lambda_i - \tau_i| \leqslant \|A - B\|_2$$

我们称 $A\leqslant B$，如果 $a_{ij}\leqslant b_{ij}$，其中 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$A,B\in R^{m\times n}$.

引理 5. 若 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，记 $B=(|a_{ij}|)\triangleq|A|$为 A 的绝对值矩阵，则$\|A\|_2\leqslant\|B\|_2$.

证明. 设 $A,B\in R^{m\times n}$，分别具有奇异值 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_n\geqslant 0$. 则 $\|A\|_2^2=\lambda_1=\max\limits_{\|u\|_2=1} u^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Au$，其中 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$. 由假设 $B=|A|=(|a_{ij}|)$，则 $A\leqslant B$，且

$$-B|u|=-\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|u_i|\right)\leqslant Au=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|u_i|=B|u|$$

$$u^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Au\leqslant|u|^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B|u|$$

其中 $a_i,i=1,2,\cdots,n$，为 A 的列向量.

设 $x\in R^n,\|x\|_2=1$，使 $\lambda_1=\max\limits_{\|u\|_2=1} u^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Au=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax$，则有

$$\lambda_1=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax\leqslant|x|^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B|x|\leqslant\max_{\substack{v\in R^n,\\ \|v\|_2=1}} v^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Bv=\tau_1$$

因此 $\|A\|_2^2\leqslant\|B\|_2^2$，所以 $\|A\|_2\leqslant\|B\|_2$. 证毕.

引理 6. 若 0(矩阵)$\leqslant A\leqslant B$，则有 $\rho(A)\leqslant\rho(B)$. 其中 $A,B\in R^{n\times n}$，$\rho(A)$ 为 A 的谱半径.

引理 7. 假设 $0\leqslant A\leqslant B$，则 $\|A\|_2\leqslant\|B\|_2$. 其中 $A,B\in R^{m\times n}$.

证明. 设 $A,B\in R^{m\times n}$，分别具有奇异值 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_n\geqslant 0$. 则 $\|A\|_2^2=\lambda_1=\rho(A^{\mathrm{T}}A)$，$\|B\|_2^2=\tau_1=\rho(B^{\mathrm{T}}B)$. 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$，由假设 $0\leqslant A\leqslant B$，有 $0\leqslant a_{ij}\leqslant b_{ij}$，因此 $0\leqslant a_{ki}a_{kj}\leqslant b_{ki}b_{kj}$ 和 $0\leqslant A^{\mathrm{T}}A=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}\right)\leqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ki}b_{kj}\right)=B^{\mathrm{T}}B$ 由引理 6，有 $\rho(A^{\mathrm{T}}A)\leqslant\rho(B^{\mathrm{T}}B)$，所以 $\|A\|_2\leqslant\|B\|_2$. 证毕.

下面是定理 1 的证明.

证明. $\forall B\in\mathcal{A}$，设 A_0 与 B 的奇异值分别为 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_n\geqslant 0$. 由引理 4

$$|\lambda_n-\tau_n|\leqslant\|B-A_0\|_2 \tag{8}$$

因为 $|B-A_0|\leqslant\Delta A$，再由引理 5，及引理 7 有

$$\|B-A_0\|_2\leqslant\|abs(B-A_0)\|_2\leqslant\|\Delta A\|_2 \tag{9}$$

其中 $abs(B-A_0)=|B-A_0|$. 由假设和式(8)，(9)，有 $|\lambda_n-\tau_n|\leqslant\|\Delta A\|_2<\min\{\sigma(A_0)\}=\lambda_n$，因此 $0<\tau_n<2\lambda_n$. 所以 $\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_n>0$，所以 $\mathrm{rank}(B)=n$，即区间矩阵$\mathcal{A}$是列满秩的.

证毕.

定理 2. 区间矩阵设$\mathcal{A}$为如式(1)所定义的区间矩阵，则$\mathcal{A}$为列满秩的充分必要条件是

$$0<\sigma_{\inf}=\inf(\sigma(\mathcal{A})) \tag{10}$$

其中 $\sigma(\mathcal{A})$是由式(7)所定义的区间矩阵$\mathcal{A}$的谱半径的集合.

证明.（必要性）.

$\forall\sigma\in\sigma(\mathcal{A}),\sigma\geqslant 0$，因此 $\sigma(\mathcal{A})$有下界，则 $\sigma(\mathcal{A})$必有下确界，记为

$$\sigma_{\inf}=\inf(\sigma(\mathcal{A})) \tag{11}$$

下面来说明 $\sigma(\mathcal{A})$为闭集. 设 $\forall A\in\mathcal{A}$，记函数

$$\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\\\vdots\\\tau_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(A)\\f_2(A)\\\vdots\\f_n(A)\end{pmatrix} \tag{12}$$

其中$(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)^{\mathrm{T}}$为 A 的奇异值所构成的向量，且$\tau_1\geqslant\tau_2\geqslant\cdots\geqslant\tau_n\geqslant 0$. 又记集合

$$\sigma_i(\mathcal{A})=\{\sigma \mid \sigma\in\sigma(\mathcal{A}),A\in\mathcal{A},\sigma \text{ 为 } A \text{ 的第 } i \text{ 个奇异值}\},i=1,\cdots,n \tag{13}$$

即$\sigma_i(\mathcal{A})$为$\mathcal{A}$中元素 A 奇异值按由大到小排列中的第 i 个奇异值所组成的集合. 则

$$\sigma(\mathcal{A})=\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i(\mathcal{A}) \tag{14}$$

并且$\sigma_i(\mathcal{A})$为由式(12)所确定的函数 $f(A)$，$A\in\mathcal{A}$的值域. 由式(13)，$\forall\tau,\lambda\in\sigma_i(\mathcal{A})$，$\exists A,B\in\mathcal{A}$使得 τ,λ 分别为 A,B 的第 i 个奇异值. 由引理 4，对于$\forall\varepsilon>0$，令$\delta=\varepsilon$，当$\|A-B\|_2<\delta$时，有$|\lambda_i-\tau_i|\leqslant\|A-B\|_2<\varepsilon$，因此函数 $f_i(A)$在$\mathcal{A}$上连续. 又由$\mathcal{A}$的定义，$\mathcal{A}$为一有界闭集，所以$\sigma_i(\mathcal{A})$为有界闭集，再由式(14)知$\sigma(\mathcal{A})$为一有界闭集.

所以$\sigma_{\inf}\in\sigma(\mathcal{A})$即$\exists A\in\mathcal{A}$，使$\sigma_{\inf}\in\sigma(A)$，并且$\sigma_{\inf}$为 A 的最小奇异值. 由假设$\mathcal{A}$为列满秩，则$\forall\sigma\in\sigma(\mathcal{A})$，$\sigma>0$，所以$\sigma_{inf}>0$.

(充分性)显然.　　证毕.

由定理 2 我们可以看到，若要判断某个区间矩阵是列满秩的，只须判别这个区间矩阵的奇异值集合的下确界严格大于零即可，但如何寻找这个下确界却是一个难题. 如果没有有效的方法来确定区间矩阵奇异值的下确界，那么定理 2 就只能用于理论上的分析，却无法应用到实际问题中去. 是否存在一个有效的方法来确定区间矩阵奇异值的下确界，还有待进一步的讨论.

不过，由有限覆盖定理我们能够想到，因为如式(1)所定义的区间矩阵是一个有界闭集，我们可以试着通过区间矩阵的有限个子区间矩阵列满秩性子来判别整个区间矩阵是列满秩的. 由此，我们得到一个在实际问题中较为实用，判别区间矩阵列满秩的充分必要条件.

定理 3. 设$\mathcal{A}$为如式(1)所定义的区间矩阵，则$\mathcal{A}$为列满秩的充分必要条件是存在$\mathcal{A}$的一个完全分解$\mathcal{A}=[\underline{A},\overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{l}[\underline{A}_i,\overline{A}_i]$，使得$\|\Delta A_i\|_2<\min\{\sigma(A_{i0})\}$，其中$A_{i0}=\dfrac{\underline{A}_i+\overline{A}_i}{2}$，$\Delta A_i=\dfrac{\overline{A}_i-\underline{A}_i}{2}$，$i=1,2,\cdots,l$.

证明. (必要性)若 A 为列满秩，则根据定理 2，$\sigma_{\inf}>0$，$\sigma_{\inf}$由式(10)确定. 由于$\left\|\dfrac{1}{k}\Delta A\right\|_2=\sqrt{\max\left\{\sigma\left(\dfrac{1}{k}\Delta A\right)\right\}}$，而$\det\left(\tau I-\dfrac{1}{k^2}\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A\right)=\dfrac{1}{k^{2n}}\det(k^2\tau I-\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A)$，所以$\left\|\dfrac{1}{k}\Delta A\right\|_2=\dfrac{1}{k}\|\Delta A\|_2$. 因此对于$\sigma_{\inf}>0$，存在$k\in N$，使$\dfrac{1}{k}\|\Delta A\|_2<\sigma_{\inf}$. 则存在区间矩阵$\mathcal{A}$的一个完全分解$\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{l}[\underline{A}_i,\overline{A}_i]$，且$\forall\|\Delta A_i\|_2=\dfrac{1}{k}\|\Delta A\|_2<\sigma_{\inf}\leqslant\min(\sigma(A_{i0}))$，$i=1,2,\cdots,n$.

(充分性)设存在$\mathcal{A}$的一个完全分解$\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{l}[\underline{A}_i,\overline{A}_i]$，则$\forall A\in[\underline{A},\overline{A}]$，必$\exists i_0\in[1,\cdots,l]$，使得$A\in[\underline{A}_{i_0},\overline{A}_{i_0}]$. 由假设$\|\Delta A_{i0}\|_2<\min\{\sigma(A_{i0})\}$，根据定理 1，$\mathcal{A}_i=[\underline{A}_{i0},\overline{A}_{i0}]$是列满秩的，$\mathrm{rank}(A)=n$，再由 A 的任意性，$\mathcal{A}$是列满秩的.　　证毕.

3.2 广义区间动力系统正则的充分必要条件

令

$$\mathcal{G}=[\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_d]=\begin{bmatrix}\mathcal{E} & \mathcal{A} & & & \\ & \mathcal{E} & \mathcal{A} & & \\ & & \mathcal{E} & \ddots & \\ & & & \ddots & \mathcal{A} \\ & & & \mathcal{E} & \mathcal{A}\end{bmatrix}=[\underline{G},\bar{G}] \tag{15}$$

定理 4. 广义区间动力系统(2)是正则的，如果$\|\Delta G^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(G_0^{\mathrm{T}})\}$，其中，$G_0=\dfrac{\underline{G}+\bar{G}}{2}$，$\Delta G=\dfrac{\bar{G}-\underline{G}}{2}$，矩阵$\underline{G},\bar{G}$由式(15)确定.

证明. 由假设及定理 1，广义区间动力系统(2)中由式(15)确定的区间矩阵$\mathcal{G}$是行满秩的，再由引理 1，此系统是正则的. 证毕.

定理 5. 广义区间动力系统(2)是正则的，当且仅当存在区间矩阵$\mathcal{G}$的一个完全分解$\mathcal{G}=[\underline{G},\bar{G}]=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[\underline{G}_i,\bar{G}_i]$，使得$\|\Delta G_i^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(G_{i0}^{\mathrm{T}})\}$，$i=1,\cdots,k$，其中$\mathcal{G}$由式(15)确定，$G_{i0}=\dfrac{\underline{G}_i+\bar{G}_i}{2}$，$\Delta G_i=\dfrac{\bar{G}_i-\underline{G}_i}{2}$.

证明. 由定理 3 及引理 1 结论显然. 证毕.

3.3 广义区间动力系统的 *I*-能控性

设$\mathcal{A}=[\underline{A},\bar{A}]$为区间矩阵，$\mathcal{S}$为阶数相容的列满秩实矩阵. 记集合

$$T(\mathcal{A},\mathcal{S})=\left\{(c_{ij})\mid c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}s_{kj},A=(a_{ik})\in\mathcal{A},\mathcal{S}=(s_{kj})\right\} \tag{16}$$

$$Z(\mathcal{A},\mathcal{S})=[\underline{Z},\bar{Z}] \tag{17}$$

其中$\underline{Z}=(\underline{z}_{ij})$，$\underline{z}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\min\{\underline{a}_{ik}s_{kj},\bar{a}_{ik}s_{kj}\}$，$\bar{Z}=(\bar{z}_{ij})$，$\bar{z}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}\max\{\underline{a}_{ik}s_{kj},\bar{a}_{ik}s_{kj}\}$. 则有

引理 8. $T(\mathcal{A},\mathcal{S})\subseteq Z(\mathcal{A},\mathcal{S})$.

证明. 由区间数的加法与乘法定义，此结论显然.

定理 6. 设系统(2)是正则的，则其为 *I*-能控的，如果

$$\|\Delta H^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(H_0^{\mathrm{T}})\} \tag{18}$$

其中

$$\mathcal{H}=[Z(\mathcal{A},\mathcal{S}_E)\quad E\quad B]=[\underline{H},\bar{H}] \tag{19}$$

$H_0=\dfrac{\underline{H}+\bar{H}}{2}$，$\Delta H=\dfrac{\bar{H}-\underline{H}}{2}$，$S_E\in R^{n\times(n-\mathrm{rank}(E))}$为矩阵 E 的最大右零化矩阵，$Z(\mathcal{A},\mathcal{S})=[\underline{Z},\bar{Z}]$由式(17)确定.

证明. 由假设$\|\Delta H^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(H_0^{\mathrm{T}})\}$，则根据定理 1 区间矩阵$\mathcal{H}$是行满秩的. 又由引理 8，$\forall A\in\mathcal{A}$，$\forall B\in\mathcal{B}$，$\mathrm{rank}[AS_E\quad E\quad B]=n$，则通过引理 2 可知，系统(2)是 *I*-能控的.

例 1. 若系统(2)中

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}=\begin{bmatrix}3\pm0.2&2\pm0.1&1\pm0.1\\1\pm0.1&2\pm0.1&1\pm0.1\\1\pm0.1&2\pm0.1&4\pm0.1\end{bmatrix},\quad \mathcal{B}=\begin{bmatrix}1\pm0.1\\1\pm0.1\\0\end{bmatrix},\text{则}$$

$$S_E=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad Z(\mathcal{A},\mathcal{S}_E)=\begin{bmatrix}2\pm0.1&1\pm0.1\\2\pm0.1&1\pm0.1\\2\pm0.1&4\pm0.1\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}=[Z(\mathcal{A},\mathcal{S}_E)\quad E\quad \mathcal{B}]=\begin{bmatrix}2\pm0.1&1\pm0.1&1&0&0&1\pm0.1\\2\pm0.1&1\pm0.1&0&0&0&1\pm0.1\\2\pm0.1&4\pm0.1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

通过计算由式(15)确定的区间矩阵$\mathcal{G}$中$\|\Delta G^{\mathrm{T}}\|_2=0.3414<\min(\sigma(G_0^{\mathrm{T}}))=0.5121$
根据定理 4 系统(2)是正则的；再有$\|\Delta H^{\mathrm{T}}\|_2=0.2732<\min(\sigma(H_0^{\mathrm{T}}))=0.4545$
由定理 6，此系统是 I-能控的.

注 1. 当区间矩阵$\mathcal{H}$不满足定理 6 中条件时，可采用类似于定理 5 中方法对区间矩阵$\mathcal{H}$进行分解.

注 2. 通过应用判别区间矩阵为行满秩的方法，本文无法得到区间系统(2)为 I-能控的充分必要条件，原因文中判别广义系统 I-能控时要用到区间矩阵的乘法，而区间数的四则运算一般只具有包含单调性，这使引理 8 成立，而其逆一般不成立.

3.4 广义区间动力系统的 C-能控性

令

$$\mathcal{F}=[\mathcal{E}_d,\mathcal{E}_b]=\begin{bmatrix}\mathcal{A}&&&\mathcal{B}&&\\\mathcal{E}&\ddots&&&\mathcal{B}&\\&\ddots&\mathcal{A}&&&\ddots\\&&\mathcal{E}&&&&\mathcal{B}\end{bmatrix}_{n^2\times[(n-1)n+np]}=[\underline{F},\overline{F}]\tag{20}$$

记 $F_0=\dfrac{\underline{F}+\overline{F}}{2},\Delta F=\dfrac{\overline{F}-\underline{F}}{2}$.

定理 7. 假设广义区间动力系统(2)是正则的，则其是 C-能控的，若

$$\|\Delta F^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(F_0^{\mathrm{T}})\}\tag{21}$$

其中 $\Delta F,F_0$由式(20)确定，$\sigma(F_0)$由式(6)确定为矩阵 F_0的奇异值集合.

证明. 若$\|\Delta F^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(F_0^{\mathrm{T}})\}$，由定理 1 区间矩阵$\mathcal{F}$是行满秩的，即$\forall F\in\mathcal{F}$，$\mathrm{rank}(F)=n^2$，由此$\forall E\in\mathcal{E},A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}$，$\mathrm{rank}[E_d,E_b]=n^2$，根据引理 3 系统(2)是 C-能控的.　证毕.

定理 8. 假设广义区间动力系统(2)正则的，则其是 C-能控的，当且仅当存在区间矩阵$\mathcal{F}$的一个完全分解$\mathcal{F}=[\underline{F},\overline{F}]=\bigcup_{i=1}^{k}[\underline{F}_i,\overline{F}_i]$，使得$\|\Delta F_i^{\mathrm{T}}\|_2<\min\{\sigma(F_{i0}^{\mathrm{T}})\}$，$i=1,\cdots,k$，其中$\mathcal{F}$由式(20)确定，$F_{i0}=\dfrac{\underline{F}_i+\overline{F}_i}{2},\Delta F_i=\dfrac{\overline{F}_i-\underline{F}_i}{2}$.

证明. 由定理 3 及定理 3 结论显然.　证毕.

例 2. 假设在系统(2)中

$$\mathcal{E}=\begin{bmatrix}4\pm0.05 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\pm0.05 & 0\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}=\begin{bmatrix}1\pm0.1 & 2\pm0.05 & 3\pm0.05\\ 2\pm0.05 & 3\pm0.05 & 1\pm0.05\\ 4\pm0.05 & 2\pm0.05 & 0\pm0.05\end{bmatrix},\quad \mathcal{B}=\begin{bmatrix}1\pm0.02\\ 1\pm0.03\\ 0\end{bmatrix}$$

则由式(15)确定的区间矩阵$\mathcal{G}$中$\|\Delta G\|_2=0.2013<\min\{\sigma(G_0)\}=0.4423$. 根据定理 4,系统在正则的. 再由式(20)确定的区间矩阵$\mathcal{F}$中通过计算得到$\|\Delta F\|_2=1.1967$, $\min\{\sigma(F_0)\}=1.1937$,不能判断系统的 C-能控的. 将区间矩阵$\mathcal{A}$进行分解$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$,其中

$$\mathcal{A}_1=\begin{bmatrix}1.1\pm0.05 & 2\pm0.05 & 3\pm0.05\\ 2\pm0.05 & 3\pm0.05 & 1\pm0.05\\ 4\pm0.05 & 2\pm0.05 & 0\pm0.05\end{bmatrix},\quad \mathcal{A}_2=\begin{bmatrix}0.9\pm0.05 & 2\pm0.05 & 3\pm0.05\\ 2\pm0.05 & 3\pm0.05 & 1\pm0.05\\ 4\pm0.05 & 2\pm0.05 & 0\pm0.05\end{bmatrix}$$

从而得到区间矩阵$\mathcal{F}$的一个完全分解$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$,其中

$$\mathcal{F}_1=\begin{bmatrix}\mathcal{A}_1 & & \mathcal{B} & & \\ \mathcal{E} & \ddots & & \mathcal{B} & \\ & \ddots & \mathcal{A}_1 & & \ddots \\ & & \mathcal{E} & & \mathcal{B}\end{bmatrix},\quad \mathcal{F}_2=\begin{bmatrix}\mathcal{A}_2 & & \mathcal{B} & & \\ \mathcal{E} & \ddots & & \mathcal{B} & \\ & \ddots & \mathcal{A}_2 & & \ddots \\ & & \mathcal{E} & & \mathcal{B}\end{bmatrix}$$

计算得知$\|\Delta F_1\|=0.1720$, $\min\{\sigma(F_{10})\}=0.1946$, $\|\Delta F_2\|=0.1743$, $\min\{\sigma(F_{20})\}=0.1927$. 由此可以通过定理 8 判定系统(2)是 C-能控的.

4 结束语

本文建立了判别区间矩阵为列满秩的充分条件与充分必要条件,并在此基础上得到判别广义区间动力系统(E,A,B,C)在系统矩阵 E,A 均为区间矩阵时系统为正则的判据,以及判别系统为 I-能控、C-能控的充分条件与充分必要条件,并通过数值实例说明了结论的有效性. 类似文献[2,5,6,8],本文中结论要用到将区间矩阵完全分解这一方法,此方法的计算量是很大的. 文献[2]讨论了如何将区间矩阵进行分解的方法. 但在本文中,若能找到有效方法找到式(11)中 $\sigma_{\inf}$,则会使上诉问题得到更好地解决,此问题还有待进一步讨论. 由于广义系统的 R-能控性没有等价于判别某一矩阵为行满秩的结果,因此文中没能讨论广义区间动力系统的 R-能控性以及 S-能控问题,此问题还有待进一步讨论.

References

1 Polis M P, Olbrot A W, Fu M. An overview of recent results on the parametric approach to robust stability. In: IEEE, Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control. Tempa, Florida: IEEE, 1989. 23～29

2 Liao X X, Luo Q, Mei Z G, Hu W X. Notes on necessary and sufficient conditions of stability, observability and controllability for interval matrices. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(6): 829～833(in Chinese)

3 Wang K, Michel Any N, Liu Derong. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(6): 1251～1255

4 Wu Q-H. Robust stability analysis of control systems with interval plants. *International Journal of Control*, 2001, **74**(9): 921～937

5 Wang Kaining, Michel Anthong N. Necessary and sufficient conditions for the controllability and observability of a class of linear time-invarint systems with interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(9): 1443～1447

6 Lin C, Wang J, Soh C-B. Necessary and sufficient conditions for the controllability of linear interval descriptor systems. *Automatica*, 1998, **34**(3): 363～367

7 Yip E L, Sincovec R F. Sovability, controllability, and observability of continous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **32**(3): 702～707

8 Sun Jiguang. Matrices Perturbing Analysis. Beijing: Science Press, 1987, 120～136(in Chinese)

9 Lin Chong, Wang Jianliang, Soh C-B. Robust stability of linear interval descriptor systems. In: IEEE Conference on Decision and Control. San Diego: 1997. 3822～3823

何希勤　1987 年于东北大学数学系应用数学专业获得理学学士学位；1996 年于东北大学自动化中心获得工学硕士学位；2000 年于东北大学信息与工程学院获得工学博士学位．现任鞍山科技大学应用数学研究所所长、教授．研究领域为区间动力系统、非线性系统控制．

(**HE Xi-Qin**　Received his Ph. D. degree from the Faculty of Information and Engineering of Northeastern University, P. R. China, in 2000. He is a professor and director of Institute of Applied Mathematics of Anshan University of Science and Technology. His research interests include interval dynamitic systems and nonlinear systems control.)

张大庆　1997 年于武汉大学计算数学及其应用软件专业获得理学学士学位；2003 年于东北大学应用数学专业获得理学硕士学位；东北大学 2003 级博士研究生．研究领域为区间数学与区间动力系统．

(**ZHANG Da-Qing**　Ph. D. candidate at the Northeastern University, P. R. China. Received his bachelor degree from the Northeastern University, P. R. China, in 2003. His research interests are interval mathematics and interval dynamitic systems.)

张庆灵　1982 年于东北大学应用数学专业获得理学学士学位；1986 年于东北大学应用数学专业获得理学硕士学位；1995 年于东北大学自动控制及其应用专业获得工学博士学位．现任东北大学理学院院长、教授、博士生导师．研究领域为分散控制与鲁棒控制．

(**ZHANG Qing-Ling**　Received his Ph. D. degree in Automatic Control and Its Applications from the Northeastern University, P. R. China, in 1995. He is a professor and dean of Faculty of Science of Northeastern University. His main research interests are decentralized control and robust control.)