第5卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 5, No. 1
1979年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1979

对偶关系与不确定系统的状态估计*

韩 京 清
（中国科学院数学所）

摘 要

本文讨论如下系统的状态估计问题，

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B_1(t)\mathbf{u}(t) + B_2(t)\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D_1(t)\mathbf{u}(t) + D_2(t)\mathbf{w} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{u}(t)$ 为已知输人向量，$\mathbf{w}$ 为不确定向量. 假定 $\mathbf{w}$ 为时间 t 的函数，对它只知道其可能的变化范围，不知道其具体实现. 问题是根据量测 $\mathbf{y}(t)$，$0\leqslant t\leqslant T$，如何去估计状态变量 $\mathbf{x}(T)$? 我们用[1]中所建立的对偶关系式解决了状态的 min-max 估计问题. 在二次型限制之下的 min-max 状态估计与卡尔曼滤波完全一致. 这里所用的方法比起 [4] 中的方法简单得多.

通常，我们对一个物理过程的认识是近似的，总带有误差. 如果用线性模型描述一个动态过程，最好加上一个误差项或“不确定项”. 于是，用线性模型描述的动态过程可写成

$$\Sigma:\ \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B_1(t)\mathbf{u}(t) + B_2(t)\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D_1(t)\mathbf{u}(t) + D_2(t)\mathbf{w}(t) \end{cases}$$

其中，$\mathbf{w}(t)$ 表示不确定因素. 假定 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ 都是列向量，其维数分别为 n, r, p, q. 所谓不确定是指对变量 $\mathbf{w}$，除其变化范围之外，其它什么都不知道（如，不知道其统计特性）. 我们假定 $\mathbf{u}(t)$ 是已知函数. 这里产生如下问题：对 $\mathbf{w}(t)$ 只知道其可能的变化范围，不知道其具体实现的情况下，根据量测量 $\mathbf{y}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 和已知函数 $\mathbf{u}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 如何估计系统 Σ 的状态变量 $\mathbf{x}(T)$?

我们将用 [1] 中建立的对偶关系式解决上述问题. 对偶关系式给出了状态估计误差的明显表达式，因而不确定系统的 min-max 状态估计（见[3,4]）显得更自然. 应用对偶关系式的处理方法比起 Куржанский 和 Пищулина 的处理方法[3,4]简单得多.

系统 Σ 的对偶系统为

$$\Sigma^*:\ \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi}A(t) - \boldsymbol{\eta}C(t), \\ \boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\psi}B_1(t) + \boldsymbol{\eta}D_1(t), \\ \boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\psi}B_2(t) + \boldsymbol{\eta}D_2(t) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\eta}$ 为行向量，其维数分别为 n, p, q, r. 系统 Σ 和 Σ^* 之间有对偶关系式[1]

$$\boldsymbol{\psi}(T)\mathbf{x}(T) - \boldsymbol{\psi}(0)\mathbf{x}(0) = \int_0^T (\boldsymbol{\varphi}_1(\tau)\mathbf{u}(\tau) + \boldsymbol{\varphi}_2(\tau)\mathbf{w}(\tau) - \boldsymbol{\eta}(\tau)\mathbf{y}(\tau))d\tau.$$

从这式得

* 本文曾在中国自动化学会 1978 年年会上宣读

$$\boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(T)-\int_0^T(\boldsymbol{\varphi}_1(\tau)\mathbf{u}(\tau)-\boldsymbol{\eta}(\tau)\mathbf{y}(\tau))d\tau$$
$$=\boldsymbol{\phi}(0)\mathbf{x}(0)+\int_0^T\boldsymbol{\varphi}_2(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau. \tag{1}$$

这里 $\mathbf{u}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 是已知函数. 如果给定了 $\boldsymbol{\phi}(T)$ 和 $\boldsymbol{\eta}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 则 $\boldsymbol{\phi}(0)$, $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 是由系统 Σ^* 来完全确定(注意: 系统 Σ^* 是确定系统). 于是,如果用

$$\int_0^T(\boldsymbol{\varphi}_1(\tau)\mathbf{u}(\tau)-\boldsymbol{\eta}(\tau)\mathbf{y}(\tau))d\tau \tag{2}$$

做为量 $\boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(T)$ 的估计,则其估计误差为(由(1)式)

$$\boldsymbol{\phi}(0)\mathbf{x}(0)+\int_0^T\boldsymbol{\varphi}_2(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau. \tag{3}$$

我们假定, $\mathbf{x}(0)$ 也是事先不知道其确切位置的不确定因素. 这时, 估计 (2) 所给出的最大可能误差为

$$\max_{\mathbf{x}(0),\mathbf{w}(\cdot)}\left(\boldsymbol{\phi}(0)\mathbf{x}(0)+\int_0^T\boldsymbol{\varphi}_2(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau\right). \tag{4}$$

对给定的 $\boldsymbol{\phi}(T)$, 这个最大可能误差依赖于函数 $\boldsymbol{\eta}(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$ 的选择. 由于, 我们事先不知道 $\mathbf{x}(0),\mathbf{w}(t)$ 的具体实现,因此, 使最大可能误差(4)最小的 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 来进行 $\boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(T)$ 的估计(利用公式(2))是比较合适的. 这就是所谓 min-max 估计,是最坏情况下的最好估计.

下面假定, $\mathbf{w}(t)$ 为平方可积函数, 即 $\mathbf{w}(t)\in L^2[0,T]$. 进一步假定, 不确定因素 $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{w}(t)$的可能的变化范围为

$$\mathbf{x}^\tau(0)S^{-1}\mathbf{x}(0)+\int_0^T\mathbf{w}^\tau(\tau)M^{-1}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau\leqslant a^2(T), \tag{5}$$

其中 S 和 $M(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, 为正定对称阵,而 $a(T)>0$ 为给定数.

用拉格朗乘子法求约束条件(5)之下的极值(4)(见[5]). 令泛函

$$\boldsymbol{\phi}(0)\mathbf{x}(0)+\int_0^T\boldsymbol{\varphi}_2(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau-\lambda\left(\mathbf{x}^\tau(0)S^{-1}\mathbf{x}(0)+\int_0^T\mathbf{w}^\tau(\tau)M^{-1}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau\right)$$

对 $\mathbf{x}(0)$ 和 $\mathbf{w}(\cdot)$ 的变分等于 0, 得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\phi}(0)-2\lambda\mathbf{x}^\tau(0)S^{-1}=0\\ \boldsymbol{\varphi}_2(t)-2\lambda\mathbf{w}^\tau(t)M^{-1}(t)=0.\end{cases} \tag{6}$$

解出 $\mathbf{x}^\tau(0)$, $\mathbf{w}^\tau(t)$, 得

$$\begin{cases}\mathbf{x}^\tau(0)=\boldsymbol{\phi}(0)S/2\lambda,\\ \mathbf{w}^\tau(t)=\boldsymbol{\varphi}_2(t)M(t)/2\lambda.\end{cases} \tag{7}$$

把(7)式代到(5)式中,得

$$\frac{1}{4\lambda^2}\left(\boldsymbol{\phi}(0)S\boldsymbol{\phi}(0)+\int_0^T\boldsymbol{\varphi}_2(\tau)M(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2^\tau(\tau)d\tau\right)=a^2(T)$$

(由于,求的是线性泛函(3)在二次泛函约束(5)之下的极值, 因此, 极值是在约束条件(5)的边界上达到). 由此

$$2\lambda=\frac{1}{a(T)}\left(\boldsymbol{\phi}(0)S\boldsymbol{\phi}^\tau(0)+\int_0^T\boldsymbol{\varphi}_2(\tau)M(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2^\tau(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

而最大可能的误差为

$$a(T)\left(\boldsymbol{\phi}(0)S\boldsymbol{\phi}^{\tau}(0)+\int_0^T \boldsymbol{\varphi}_2(\tau)M(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2^{\tau}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

这个最大可能的误差依赖于 $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ 的选择，因此(9)式可简记为

$$\Delta_{\max}(\boldsymbol{\eta}(\cdot)).$$

所谓 min-max 估计是选择 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$，使下式成立：

$$\Delta_{\max}(\boldsymbol{\eta}^*(\cdot))=\min_{\boldsymbol{\eta}(\cdot)}(\Delta_{\max}(\boldsymbol{\eta}(\cdot))) \tag{10}$$

根据表达式(9)，满足(10)式的 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$，是对偶系统 Σ^* 的，对给定的 $\boldsymbol{\phi}(T)$，使性能指标

$$J_1=a(T)\left(\boldsymbol{\phi}(0)S\boldsymbol{\phi}^{\tau}(0)+\int_0^T \boldsymbol{\varphi}_2(\tau)M(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2^{\tau}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

达到最小的最优控制．由于性能指标(11)和二次性能指标

$$J=\boldsymbol{\phi}(0)S\boldsymbol{\phi}^{\tau}(0)+\int_0^T \boldsymbol{\varphi}_2(\tau)M(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2^{\tau}(\tau)d\tau$$

等价，而

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\boldsymbol{\phi}(t)B_2(t)+\boldsymbol{\eta}(t)D_2(t),$$

故 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$，实际上是对偶系统 Σ^* 的，对给定的 $\boldsymbol{\phi}(T)$，使二次指标

$$J=\boldsymbol{\phi}(0)S\boldsymbol{\phi}^{\tau}(0)+\int_0^T (\boldsymbol{\phi}(\tau)B_2(\tau)+\boldsymbol{\eta}(\tau)D_2(\tau))M(\tau)(\boldsymbol{\phi}(\tau)B_2(\tau)+\boldsymbol{\eta}(\tau)D_2(\tau))^{\tau}d\tau \tag{12}$$

达到最小的最优控制．

今设 $D_2(t)M(t)D_2^{\tau}(t)>0$．这时，上述最优控制 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ 是状态 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 的线性反馈：

$$\boldsymbol{\eta}^*(t)=-\boldsymbol{\phi}(t)K(t) \tag{13}$$

其中

$$K(t)=(B_2(t)M(t)D_2^{\tau}(t)-P(t)C^{\tau}(t))(D_2(t)M(t)D_2^{\tau}(t))^{-1} \tag{14}$$

而 $P(t)$ 满足如下黎卡提方程：

$$\begin{cases}\dot{P}=A(t)P+PA^{\tau}(t)-B_2(t)M(t)B_2^{\tau}(t)\\ \qquad +(B_2(t)M(t)D_2^{\tau}(t)-PC^{\tau}(t))(D_2(t)M(t)D_2^{\tau}(t))^{-1}(D_2(t)M(t)B_2^{\tau}(t)-C(t)P),\\ P(0)=S.\end{cases} \tag{15}$$

记 $\Phi_K(T,t)$ 为方程

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}=-\boldsymbol{\phi}(A(t)-K(t)C(t))$$

的状态转移阵．这时，最优控制 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ 为

$$\boldsymbol{\eta}^*(t)=-\boldsymbol{\phi}(T)\Phi_K(T,t)K(t),$$

而对应的 Σ^* 的输出

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{\phi}(T)\Phi_K(T,t)(B_1(t)-K(t)D_1(t)).$$

于是，根据(2)式，量 $\boldsymbol{\phi}(T)\mathbf{x}(T)$ 的 min-max 估计为

$$\boldsymbol{\phi}(T)\int_0^T \Phi_K(T,\tau)(K(\tau)\mathbf{y}(\tau)+B_1(\tau)\mathbf{u}(\tau)-K(\tau)D_1(\tau)\mathbf{u}(\tau))d\tau. \tag{16}$$

今取 $\boldsymbol{\psi}_i(T)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 为 n 个单位坐标向量. 这时,对应的最优控制为

$$\boldsymbol{\eta}_i^*(t) = -\boldsymbol{\psi}_i(T)\Phi_K(T, t)K(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

而 $\boldsymbol{\psi}_i(T)\mathbf{x}(T)$ 的 min-max 估计分别为(由(16)式)

$$\boldsymbol{\psi}_i(T)\int_0^T \Phi_K(T, \tau)(K(\tau)\mathbf{y}(\tau) + B_1(\tau)\mathbf{u}(\tau) - K(\tau)D_1(\tau)\mathbf{u}(\tau))d\tau.$$

由于

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1(T) \\ \boldsymbol{\psi}_2(T) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_n(T) \end{bmatrix} = I$$

是单位矩阵,故状态 $\mathbf{x}(T)$ 的 min-max 估计为

$$\hat{\mathbf{x}}(T) = \int_0^T \Phi_K(T,\tau)(K(\tau)\mathbf{y}(\tau) + B_1(\tau)\mathbf{u}(\tau) - K(\tau)D_1(\tau)\mathbf{u}(\tau))d\tau. \tag{17}$$

这是方程组

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + K(t)(\mathbf{y}(t) - C(t)\hat{\mathbf{x}}) + (B_1(t) - K(t)D_1(t))\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

的解在 $t=T$ 时刻的值. 方程组(18)是卡尔曼估计器形式的方程.

这就是说,在约束条件(5)之下,不确定系统 Σ 的状态 $\mathbf{x}(T)$ 的 min max 估计,是卡尔曼估计形式(17)(或(18)). 其中,增益阵 $K(t)$ 是由(14)式和(15)式来决定.

如果假定,关于初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 事先什么都不知道,那么为了估计 $\boldsymbol{\psi}(T)\mathbf{x}(T)$,我们还要加上限制条件 $\boldsymbol{\psi}(0)=0$. 于是,(1)式变为

$$\boldsymbol{\psi}(T)\mathbf{x}(T) - \int_0^T (\boldsymbol{\varphi}_1(\tau)\mathbf{u}(\tau) - \boldsymbol{\eta}(\tau)\mathbf{y}(\tau))d\tau = \int_0^T \boldsymbol{\varphi}_2(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau$$

其中 $\boldsymbol{\eta}(\tau)$ 是把 $\boldsymbol{\psi}(0)=0$ 引到给定终点 $\boldsymbol{\psi}(T)$ 的控制. 假定 $\mathbf{w}(\cdot)$ 满足约束条件

$$\int_0^T \mathbf{w}^\tau(\tau)M^{-1}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau \leqslant a^2(T),$$

则 $\mathbf{x}(T)$ 的 min max 估计问题变为:对给定的 $\boldsymbol{\psi}(0)=0$ 和 $\boldsymbol{\psi}(T)$,求使二次指标

$$J = \int_0^T (\boldsymbol{\psi}(\tau)B_2(\tau) + \boldsymbol{\eta}(\tau)D_2(\tau))M(\tau)(\boldsymbol{\psi}(\tau)B_2(\tau) + \boldsymbol{\eta}(\tau)D_2(\tau))^\tau d\tau, \tag{19}$$

达到最小的最优控制 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ 的问题. 求解这种 $\boldsymbol{\eta}^*(t)$,就得解微分方程的两点边值问题,或弗列德荷姆第二类积分方程(见[2, 4]). 这就是所谓缺初值的估计问题.

前面,我们假定了 S, $M(t)$, $D_2(t)M(t)D_2^\tau(t)$ 为正定对称阵. 实际上,条件 $S>0$, $M(t)>0$ 只是在求解方程组(6)时才用到. 如果在方程组(6)中把 S^{-1},$M^{-1}(t)$ 分别换成 S, $M(t)$ 的伪逆阵 S^+, $M^+(t)$,也可以得到解(7). 因此,上面的讨论对 $S \geqslant 0$, $M(t) \geqslant 0$, $D_2(t)M(t)D_2^\tau(t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 的情形也成立. 不过,这时条件(5)要换成如下条件:

$$\mathbf{x}^\tau(0)S^+\mathbf{x}(0) + \int_0^T \mathbf{w}^\tau(\tau)M^+(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau \leqslant a^2(T). \tag{20}$$

如果 $\mathbf{x}(0)$ 是均值为 0,协方差阵为 S 的随机向量,而 $\mathbf{w}(t)$ 为均值为 0,协方差阵为 $M(t)\delta(t-\tau)$ 的高斯白噪声过程,那么,对应的卡尔曼估计相当于约束条件(5)或(20)之下的不确定系统 Σ 的 min-max 状态估计.

参 考 文 献

[1] 韩京清，线性控制系统的对偶性，应用数学学报(待发表).
[2] 韩京清，"线性控制系统的对偶性质"，现代控制系统理论讨论班材料，74:6，中国科学院数学研究所(1974).
[3] Куржанский А. Б., К теории позиционного наблюдения. общие соотношения. *Изв. АНСССР. Техническая кибернетика*, №5, (1973).
[4] Куржанский А. Б, Пищулина И. Я., Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях, *Дифференц. уравнения*, **12**, №8, 9, 12, (1976).
[5] Люстерник Л. А., Соболев В. И, "Элементы функционалъного анализа", *Изд. Наука*, (1965).

DUALITY RELATION AND STATE ESTIMATION IN SYSTEMS WITH UNCERTAINTY

HAN KYENG-CHENG
(Instieute of mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The present paper discusses the problem of state estimation for the following system

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B_1(t)\mathbf{u}(t) + B_2(t)\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D_1(t)\mathbf{u}(t) + D_2(t)\mathbf{w} \end{cases}$$

where $\mathbf{u}(t)$ is the known input vector and W the uncertain vector. Assume that W is a function of t, for which we know its range of variation only, but we do not know its concrete realization. The problem is that how to estimate the state variables $\mathbf{x}(T)$ on the base of observation values $\mathbf{y}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. The duality relation establised in [1] is used to solve the problem of the min-max estimation. The min-max state estimation under the limitation of quadratic constraints coincides exactly with the Kalman filter. The method used here is much simples than that of [4].