第5卷 第3期 自动化学报 Vol. 5, No. 3
1979 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1979

运载火箭的摄动预测制导*

郭孝宽 岳丕玉

摘 要

本文用预测制导的思想，具体研究运载火箭偏航通道的制导问题. 阐述了摄动预测制导的基本原理，在有导航计算和有干扰测量两种情况下，推导了摄动预测制导的基本计算公式，研究了预测制导的简化形式以及简化条件.

另外，本文还提出了预测制导的“零控无偏状态”的概念，以及向零控无偏状态导引的最优控制问题，推导了最优控制的闭合解. 这些概念和结果有待进一步研究，仅供有关同志参考.

一、问题的提出

运载火箭的任务是将所运载的星、船等空间飞行器送入预定的轨道. 预定轨道通常可用一些参数来描述，例如地球卫星的轨道可以用六个轨道根数(轨道长半轴、偏心率、轨道平面倾角、升交点赤径、近地点幅角、过近地点的时刻)或者其它轨道参数(周期、近地点高度等)来描述. 如果没有任何干扰因素作用，运载火箭将沿预定的标准弹道飞行，在标准关机时刻 $(\bar{t}_k)$ 关闭火箭发动机，就能将运载物准确送入所要求的轨道. 然而运载火箭在实际飞行条件下总要受到各种干扰因素的作用，例如风、推力偏差、重量偏差等. 干扰因素作用的结果使实际飞行弹道偏离标准弹道，如果仍在标准关机时刻关闭火箭发动机，就会因关机点参数偏差而使星、船等飞行器的实际轨道偏离要求的轨道. 因此，必须采用制导系统对运载火箭的飞行实施控制.

运载火箭制导系统的任务是在实际干扰存在的条件下，控制运载火箭的推力向量，使其达到所需要的推力终止条件，关闭运载火箭发动机，将运载物送入预定的轨道. 这个任务通常分别由纵向制导系统、偏航通道和俯仰通道的控制系统来完成. 纵向制导系统通过控制关机时间来控制某些重要的轨道参数，偏航通道和俯仰通道控制系统，通过控制运载火箭的主动段飞行弹道来控制另一些轨道参数. 我们注意到这些控制指标都是运载火箭入轨点(关机点)运动参数的函数，可分别称为纵向控制的终端广义座标 l，偏航控制的终端广义座标 h. 因为偏航通道控制系统和俯仰通道控制系统属于同一类型终端指标的控制问题，解决问题的方法类似，为简便起见，本文以偏航控制为例进行讨论.

下面以终端广义座标的形式阐述摄动预测制导的基本原理，推导基本公式.

终端广义座标 h 是关机点运动参数 $\boldsymbol{X}_k$, t_k 的函数[7]

* 本文曾在中国自动化学会1978年年会上宣读. 本文修改稿于1979年2月14日收到.

$$h = h(\boldsymbol{X}_k, t_k) \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{X}_k = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, x_{4k}, x_{5k}, x_{6k})^\tau = (v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, x_k, y_k, z_k)^\tau$$

下标 k 表示关机点的参数，τ 表示转置.

如果关机点的参数都是标准值(记为 $\bar{\boldsymbol{X}}_k, \bar{t}_k$)，对应的终端广义座标为 $h(\bar{\boldsymbol{X}}_k, \bar{t}_k)$. 终端广义座标的偏差定义为

$$\Delta h = h(\boldsymbol{X}_k, t_k) - h(\bar{\boldsymbol{X}}_k, \bar{t}_k) \tag{1.2}$$

将 $h(\boldsymbol{X}_k, t_k)$ 在标准关机点处展开，并取到台劳展式的一阶项，可得 Δh 的一阶项 $\Delta h(t_k)$ 为

$$\begin{aligned}\Delta h(t_k) = &\frac{\partial h}{\partial x_{1k}}(x_1(t_k) - \bar{x}_1(\bar{t}_k)) + \frac{\partial h}{\partial x_{2k}}(x_2(t_k) - \bar{x}_2(\bar{t}_k)) \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x_{3k}}(x_3(t_k) - \bar{x}_3(\bar{t}_k)) + \frac{\partial h}{\partial x_{4k}}(x_4(t_k) - \bar{x}_4(\bar{t}_k)) \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x_{5k}}(x_5(t_k) - \bar{x}_5(\bar{t}_k)) + \frac{\partial h}{\partial x_{6k}}(x_6(t_k) - \bar{x}_6(\bar{t}_k)) \\ &+ \frac{\partial h}{\partial t_k}\Delta t_k \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\Delta t_k = t_k - \bar{t}_k$$

式(1.3)中，各偏导数是标准关机点参数的函数，当标准弹道确定之后，它们就是常数.

因为式(1.3)中各偏差量 $x_i(t_k) - \bar{x}_i(\bar{t}_k)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 是实际弹道与标准弹道在两个不同的时刻 $(t_k, \bar{t}_k)$ 对应的运动参数之间的偏差，不便应用摄动方程，因此应将式(1.3)中所有偏差写成等时变分的形式. 首先，在 t_k 时刻将实际弹道参数相对于标准弹道作线性展开，可得

$$x_i(t_k) = \bar{x}_i(t_k) + x_i(t_k) - \bar{x}_i(t_k) \simeq \bar{x}_i(t_k) + \delta x_i(t_k) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \tag{1.4}$$

再将标准弹道上 t_k 时刻对应的运动参数相对于 $\bar{t}_k$ 时刻的参数作线性展开，得

$$\bar{x}_i(t_k) = \bar{x}_i(\bar{t}_k) + \bar{x}_i(t_k) - \bar{x}_i(\bar{t}_k) \simeq \bar{x}_i(\bar{t}_k) + \dot{\bar{x}}_i(\bar{t}_k)\Delta t_k \tag{1.5}$$

$$\Delta t_k = t_k - \bar{t}_k \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

将式(1.5)代入式(1.4)，再将式(1.4)代入式(1.3)，并用矢量形式来书写，便得到

$$\Delta h(t_k) = (a, \delta \boldsymbol{X}(t_k)) + \dot{h}_k \Delta t_k \tag{1.6}$$

式中

$$a = \left(\frac{\partial h}{\partial x_{1k}}, \frac{\partial h}{\partial x_{2k}}, \frac{\partial h}{\partial x_{3k}}, \frac{\partial h}{\partial x_{4k}}, \frac{\partial h}{\partial x_{5k}}, \frac{\partial h}{\partial x_{6k}}\right)^\tau$$

$$\delta \boldsymbol{X}(t_k) \simeq \boldsymbol{X}(t_k) - \bar{\boldsymbol{X}}(t_k)$$

$$\dot{h}_k = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial h}{\partial x_{ik}} \dot{\bar{x}}_i(\bar{t}_k) + \frac{\partial h}{\partial t_k}$$

(,)表示两个矢量的内积.

同理，纵向控制的终端广义座标偏差在标准关机点台劳展式的一阶项为

$$\Delta l(t_k) = (b, \delta \boldsymbol{X}(t_k)) + \dot{l}_k \Delta t_k \tag{1.7}$$

$$b = \left(\frac{\partial l}{\partial x_{1k}}, \frac{\partial l}{\partial x_{2k}}, \frac{\partial l}{\partial x_{3k}}, \frac{\partial l}{\partial x_{4k}}, \frac{\partial l}{\partial x_{5k}}, \frac{\partial l}{\partial x_{6k}}\right)^\tau$$

$$\dot{l}_k = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial l}{\partial x_{ik}} \dot{\bar{x}}_i(\bar{t}_k) + \frac{\partial l}{\partial t_k}$$

如果按 $\Delta l(t_k) = 0$ 控制关机，则有

$$\Delta t_k = \frac{-1}{\dot{l}_k}(b, \delta \boldsymbol{X}(t_k)) \tag{1.8}$$

将式 (1.8) 代入式 (1.6)，可得

$$\Delta h(t_k) = \left((a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b), \delta \boldsymbol{X}(t_k)\right) \tag{1.9}$$

式 (1.9) 中，a, b 是由标准弹道标准关机点决定的常向量，$\dot{h}_k$, $\dot{l}_k$ 是由标准弹道标准关机点决定的常数. 式 (1.9) 是运载火箭终端广义座标偏差的基本公式.

注意到式 (1.9) 是终端广义座标偏差在标准关机点台劳展式的一阶项，只有在关机点邻域内才能表示终端的广义座标偏差. 但是，如果接近关机点才接入由 $\Delta h(t_k)$ 表示的导引信号，那么在主动段飞行过程中积累的偏差就应在关机前短暂的时间内消除，控制系统提供不了足够的控制能力，就会造成制导误差，或者降低制导精度. 因此，必须在主动段飞行过程中求出合理的导引信号，及时控制火箭的飞行弹道，不断消除干扰的影响，使其在关机点处满足终端广义座标偏差 $\Delta h(t_k) = 0$ 的要求.

下面用预测制导的思想，根据飞行中任意时刻的运动参数偏差 $\delta \boldsymbol{X}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$，计算终端广义座标偏差 $\Delta h(t_k)$，并在此基础上运用极大值原理综合出最优控制规律.

二、偏航通道的摄动预测制导

运载火箭主动段运动方程

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, t) \\ \boldsymbol{X}(t_0) &= \boldsymbol{X}_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

式中，

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^\tau = (v_x, v_y, v_z, x, y, z)^\tau$$

$$\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^\tau \text{ 为驱动项}$$

$$\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\tau$$

飞行过程中由于控制系统的作用，实际弹道与标准弹道之间的偏差属于小偏差范围. 因此可将式 (2.1) 沿标准弹道线性展开，得到偏差量 $\delta \boldsymbol{X}(t)$ 的线性方程：

$$\delta \dot{\boldsymbol{X}}(t) = F_x(t) \delta \boldsymbol{X}(t) + F_y(t) \delta \boldsymbol{Y}(t) \tag{2.2}$$

式中

$$F_x(t) = (F_{xij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{Y}}(t)}$$

$$F_y(t) = (F_{yij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{\bar{\boldsymbol{X}}(t), \bar{\boldsymbol{Y}}(t)} \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$\delta \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \bar{\boldsymbol{X}}(t)$$

$$\delta \boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{Y}(t) - \bar{\boldsymbol{Y}}(t)$$

驱动项的偏差 $\delta \boldsymbol{Y}(t)$ 表示飞行过程中作用于火箭上的干扰加速度.

运载火箭在主动段飞行中，由于各种干扰作用，使实际飞行弹道偏离标准弹道，t 时刻之前所有干扰作用的效果，直接反映在 t 时刻的弹道参数偏差 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 上. 本文所指的“预测制导”就是从 t 时刻运载火箭的弹道参数偏差 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 出发，按标准条件外推到关机点，找出相对应的终端广义座标偏差，也就是找出 t 时刻以前干扰作用与终端广义座标偏差的关系. 因此用 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 计算的终端广义座标偏差也是飞行时间 t 的函数，记为 $\Delta h(t_k; t)$. 如果用 $\Delta h(t_k; t)$ 形成 t 时刻的导引信号，通过控制作用，就能消除 t 时刻以前干扰因素造成的制导误差. 而 t 时刻以后可能出现的干扰无法确知，所以在计算 $\Delta h(t_k; t)$ 时不予考虑，即是说从 t 到 t_k 的外推是按标准条件进行的，因而有

$$F_y(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau) = 0 \quad \forall\tau\in[t, t_k] \tag{2.3}$$

偏差量 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 的线性方程 (2.2) 变为齐次方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{X}}(\tau) = F_x(\tau)\delta\boldsymbol{X}(\tau) \quad \tau\in[t, t_k] \tag{2.4}$$

注意到我们的目的是求 $\Delta h(t_k; t)$，而不是求 $\delta\boldsymbol{X}(t_k)$，又由 (1.9) 式知 $\Delta h(t_k; t)$ 是终端运动参数偏差 $\delta\boldsymbol{X}(t_k)$ 各分量的线性组合，因而用 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 计算 $\Delta h(t_k; t)$ 的问题可以用伴随函数的方法来解决. 式 (2.4) 的伴随方程为:

$$-\dot{\lambda} = F_x^{\tau}(\tau)\lambda \tag{2.5}$$

由布利斯 (Bliss) 公式

$$(\lambda(t_k), \delta\boldsymbol{X}(t_k)) = (\lambda(t), \delta\boldsymbol{X}(t)) \tag{2.6}$$

为了使式 (2.6) 的左端与式 (1.9) 的右端相同，只需令方程 (2.5) 的终端条件为:

$$\tau = t_k \quad \lambda(t_k) = \left(a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b\right) \tag{2.7}$$

解方程(2.5)，得出的伴随向量记为 $\lambda(t_k; \tau)$，$\tau\in[t_0, t_k]$，将其代入式 (2.6) 得:

$$\left(\left(a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b\right), \delta\boldsymbol{X}(t_k)\right) = (\lambda(t_k; t), \delta\boldsymbol{X}(t)) \tag{2.8}$$

将式 (2.8) 代入式 (1.9)，并记 $\Delta h(t_k)$ 为 $\Delta h(t_k; t)$，得

$$\Delta h(t_k; t) = (\lambda(t_k; t), \delta\boldsymbol{X}(t)) \tag{2.9}$$

$\Delta h(t_k; t)$ 表示由 t 时刻的运动参数偏差 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 预测的终端广义座标偏差，或者 t 时刻以前的干扰引起的 $\Delta h(t_k)$. 当 $t = t_k$ 时，$\Delta h(t_k; t_k) = \left((a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b), \delta\boldsymbol{X}(t_k)\right)$ 表示 $\delta\boldsymbol{X}(t_k)$ 引起的 $\Delta h(t_k)$，即主动段 $[t_0, t_k]$ 区间内所有干扰作用引起的 $\Delta h(t_k)$. 当 $t < t_k$ 时，式 (2.9) 中的 $\lambda(t_k; t) \neq \left(a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b\right)$，$\lambda(t_k; t)$ 是随时间 t 而变化的. 因而式 (2.9) 不同于式 (1.9)，它的物理意义在于将 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 按标准条件外推到关机点，然后求相应的 $\Delta h(t_k)$. 这种外推是通过伴随函数方法来实现的，依赖于标准弹道及相应的小偏差方程，因此称为摄动预测制导.

因为 $\lambda(t_k; t)$ 可以事先算出，$\delta\boldsymbol{X}(t)$ 可由制导系统的导航计算实时给出，利用公式 (2.9) 可实时计算 $\Delta h(t_k; t)$，用 $\Delta h(t_k; t)$ 作为导引偏差信号，控制 $\Delta h(t_k; t) \to 0$，就可及时消除 t 时刻以前干扰作用的影响，从而解决了一、中提出的问题.

三、有干扰测量装置时的预测制导

仅仅为了进行偏航和俯仰控制以及控制推力截止时间，复杂的导航计算并不是必须的．当火箭上不作导航计算，但制导系统的测量装置能够测出作用于火箭上的干扰时，不便直接用(2.9)式来计算 $\Delta h(t_k;\dot{t})$．我们可以用参考文献[1]中提出的巧妙方法来设计这种预测制导系统，推导出用干扰测量值表示的 $\Delta h(t_k; t)$ 计算公式．

运载火箭运动参数偏差量的线性微分方程

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{X}}(t) &= F_x(t)\delta\boldsymbol{X}(t) + F_y(t)\delta\boldsymbol{Y}(t)\\ \delta\boldsymbol{X}(t_0) &= \delta\boldsymbol{X}_0\end{aligned} \tag{3.1}$$

作用于火箭上的干扰 $F_y(t)\delta\boldsymbol{Y}(t)$ 可由制导系统的测量装置给出．这些装置可以是惯性的、无线电的或基于其它原理的，依实际问题而定．现在需要找出 $[t_0, t]$ 区间内干扰作用 $F_y(t)\delta\boldsymbol{Y}(t)$ 与终端广义座标偏差 $\Delta h(t_k; t)$ 之间的关系．因为 $\Delta h(t_k; t)$ 是 $\delta\boldsymbol{X}(t_k)$ 各分量的线性组合，我们仍用伴随函数的方法来解决．式(3.1)的伴随方程为

$$-\dot{\lambda} = F_x^{\tau}(t)\lambda \tag{3.2}$$

由布利斯公式，

$$(\lambda, \delta\boldsymbol{X})\Big|_{t_0}^{t_k} = \int_{t_0}^{t_k}(\lambda(\tau), F(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau))d\tau \tag{3.3}$$

假设不考虑初始条件的偏差，即 $\delta\boldsymbol{X}(t_0) = 0$，则有

$$\Big(\lambda(t_k), \delta\boldsymbol{X}(t_k)\Big) = \int_{t_0}^{t_k}\Big(\lambda(\tau), F(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau)\Big)d\tau \tag{3.4}$$

为了使式(3.4)的左端与式(1.9)的右端相同，只需以 $\lambda(t_k) = \left(a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b\right)$ 为终端条件，解伴随方程(3.2)，得出的伴随矢量记为 $\lambda(t_k; t)$，$t \in [t_0, t_k]$．由式(1.9)及式(3.4)可得

$$\Delta h(t_k) = \int_{t_0}^{t_k}\Big(\lambda(t_k;\tau), F_y(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau)\Big)p\tau \tag{3.5}$$

注意到由 t 到 t_k 的预测是按标准条件进行的，故 $[t, t_k]$ 区间内的干扰作用为零，即

$$F_y(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau) = 0 \quad \forall\tau \in [t, t_k] \tag{3.6}$$

所以式(3.5)变为

$$\Delta h(t_k; t) = \int_{t_0}^{t}(\lambda(t_k;\tau), F_y(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau))d\tau \tag{3.7}$$

这就是用测量的干扰信息 $F_y(\tau)\delta\boldsymbol{Y}(\tau)$ 计算 $\Delta h(t_k; t)$ 的基本公式．

四、预测制导的简化形式

公式(2.9)，(3.7)是比较准确的计算终端广义座标偏差的公式．式中伴随矢量 $\lambda(t_k; t)$ 是随时间 t 变化的，实现起来比较复杂，在某些情况下可采用简化计算公式．例如，在(1.9)中令

$$\delta\boldsymbol{X}(t_k) \simeq \delta\boldsymbol{X}(t) \tag{4.1}$$

得到最简单的预测制导公式

$$\Delta h(t_k;\,t)=\left(\left(a-\frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k}b\right),\,\delta\boldsymbol{X}(t)\right) \tag{4.2}$$

这种简化的物理意义是认为 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 中各分量互不相关地、一比一地外推到关机点，得到 $\delta\boldsymbol{X}(t_k)$. 当 t 趋近于 t_k 时，(4.2) 式逐渐逼近式 (1.9). 在飞行过程中制导系统不断消除用式 (4.2) 计算的偏差，当 $t=t_k$ 时若能保证 $\Delta h(t_k;\,t_k)=0$，也就实现了所需要的终端条件.

由于 $\left(a-\frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k}b\right)$ 是常向量，以式 (4.2) 作为导引信号使制导计算变得十分简单，因而类似的简化公式曾得到广泛应用[6]. 值得注意的是以上简化是有条件的，通常的条件为

1) $\frac{\partial h}{\partial x_{1k}}\gg\frac{\partial h}{\partial x_{4k}}$, $\frac{\partial h}{\partial x_{2k}}\gg\frac{\partial h}{\partial x_{5k}}$, $\frac{\partial h}{\partial x_{3k}}\gg\frac{\partial h}{\partial x_{6k}}$

2) (t_k-t) 较小. t_k 为关机时间，t 为进行制导的时间.

由条件 1) 可知，在 $\Delta h(t_k)$ 中 $\frac{\partial h}{\partial x_{ik}}\delta x_i(t_k)$, $i=1,\,2,\,3$, 是主要项，

$$\frac{\partial h}{\partial x_{ik}}\delta x_i(t_k),\quad i=4,\,5,\,6$$

是次要项，再加上条件 2)，即可忽略 t 时刻的速度偏差 $\delta x_i(t)$, $i=1,\,2,\,3$, 对 t_k 时刻的位置偏差 $\delta x_i(t_k)$ ($i=4,\,5,\,6$) 的影响. 通常在小偏差条件下，t 时刻的位置偏差对关机时刻速度偏差的影响也是可以忽略的.

当上述简化条件不成立时，应适当注意由 $\delta\boldsymbol{X}(t)$ 外推 $\delta\boldsymbol{X}(t_k)$ 时运动参数相互间的影响，实际上式 (2.9), (3.7) 就是较好地考虑了这些影响的预测制导公式. 根据具体问题还可以对式 (2.9), (3.7) 作其它形式的简化，使其既保证制导精度，又便于实现.

五、预测制导的零控无偏状态及向零控无偏状态导引的最优控制

运载火箭制导系统按预测制导基本公式 (2.9), (3.7) 或 (4.2) 式计算出 $\Delta h(t_k;\,t)$ 后，通过控制系统产生不同形式的控制加速度，改变火箭的质心运动以消除终端广义座标偏差 $\Delta h(t_k;\,t)$. 对这一消除 $\Delta h(t_k;\,t)$ 的控制过程，可以用极大值原理综合出最优控制的闭合解.

值得注意的是，我们在此研究的最优控制的目标集，不是主动段终端满足条件

$$\Delta h(t_k;\,t_k)=0$$

的状态，而是主动段飞行过程中满足条件

$$\Delta h(t_k;\,T)=(\lambda(t_k;\,T),\,\delta\boldsymbol{X}(T))=0\quad T\in[t,\,t_k] \tag{5.1}$$

的状态. 以下我们称这种状态为零控无偏状态. 由基本公式 (2.9) 知，

$$(\lambda(t_k;\,t),\,\delta\boldsymbol{X}(t))=(\lambda(t_k;\,t_k),\,\delta\boldsymbol{X}(t_k)) \tag{5.2}$$

如果在 $t=T$ 时刻运动参数的偏差 $\delta\boldsymbol{X}(T)$ 满足条件

$$\Delta h(t_k;\,T)=0$$

只要 $\tau\geqslant T$ 时间范围内不出现新的干扰，必定有

$$\Delta h(t_k;\,\tau)=0\quad\forall\tau\in[T,\,t_k] \tag{5.3}$$

因此，在 $\tau \geqslant T$ 时间范围内，制导系统的反馈控制信号恒为零，火箭在不受干扰的情况下将按标准状态飞行，并在预计关机时刻 t_k 保证 $\Delta h(t_k;t_k)=0$. 所以我们称主动段飞行过程中制导反馈控制信号为零的状态 $\delta\boldsymbol{X}(T)$ 为"零控无偏状态". 由式 (5.1) 定义的零控无偏状态，是六维状态空间中的五维流型，因此也可称为"零控无偏流型". 按早期弹道式火箭制导系统中习用的语言来说，也可称零控无偏流型为"广义活动射面". 只要运载火箭的运动参数达到这个"射面"，预计的终端广义座标偏差就为零，如果没有新的干扰出现，火箭将沿广义活动射面飞行，不再需要标准状态之外的制导反馈控制. 如果出现新的干扰，火箭又会偏离"射面"，偏航控制系统将控制火箭，消除偏差以达到新时刻所建立的广义活动射面.

对于具有标准弹道并按摄动理论设计的运载火箭制导系统来说，零控无偏状态代表了控制过程中的标准状态，显然控制系统应尽量保持这种状态. 尤其在关机点附近，应尽量减少弹道的扰动. 使系统尽早达到标准状态并稳定地保持这种状态，对提高制导精度是有益的. 对于某些运载火箭，若能尽早处于零控无偏状态，还将节省控制能量，这对某些用途而言是十分重要的.

向零控无偏状态导引的最优控制指标，可以根据需要选定. 下面以最速控制指标为例，综合出向零控无偏状态导引的最优控制的闭合解.

运载火箭的偏差方程 (3.1) 在一定条件下可改写为

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{v}=A(t)\delta r+u\\
&\delta\dot{r}=\delta v\\
&\delta v=(\delta v_x,\delta v_y,\delta v_z)^\tau,\\
&\delta r=(\delta x,\delta y,\delta z)^\tau\\
&\delta\boldsymbol{X}(t)=(\delta v(t),\delta r(t))^\tau,\\
&\delta\boldsymbol{X}(t_0)=\delta\boldsymbol{X}_0
\end{aligned}\tag{5.4}$$

控制加速度

$$u(t)=f(t)\cdot\eta(t)\tag{5.5}$$

$\eta(t)$ 为单位向量，用来表示控制加速度的方向，$f(t)$ 表示控制加速度的大小. 控制约束为

$$\begin{aligned}
&0\leqslant f\leqslant F\ (\text{常数})\\
&|\eta(t)|=1\ (\text{方向任意})
\end{aligned}\tag{5.6}$$

初始状态对应的终端广义座标偏差

$$\Delta h(t_k;t_0)=(\lambda(t_k;t_0),\delta\boldsymbol{X}(t_0))\neq 0\tag{5.7}$$

控制性能指标

$$J=\int_{t_0}^{T}1\,dt\tag{5.8}$$

目标集

$$\Delta h(t_k;T)=(\lambda(t_k;T),\delta\boldsymbol{X}(T))=0\tag{5.9}$$

求满足方程 (5.4) 及约束条件 (5.6), (5.9) 使性能指标 (5.8) 达到极小的最优控制 $\hat{u}(t)$. 系统的哈密尔顿 (Hamilton) 函数为

$$H=(\psi_1, A(t)\delta r)+(\psi_1, f\cdot\eta)+(\psi_2, \delta v)-1 \tag{5.10}$$

伴随方程

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1&=-\frac{\partial H}{\partial\delta v}=-\psi_2\\ \dot{\psi}_2&=-\frac{\partial H}{\partial\delta r}=-A^{\tau}(t)\psi_1\end{aligned} \tag{5.11}$$

横截条件

$$\begin{aligned}\psi_1(T)&=\frac{\mu\partial(\lambda(t_k;T),\delta \boldsymbol{X}(T))}{\partial\delta v(T)}\\ \psi_2(T)&=\frac{\mu\partial(\lambda(t_k;T),\delta \boldsymbol{X}(T))}{\partial\delta r(T)}\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 μ 为待定常数. $\lambda(t_k;T)$ 为 (5.4) 的伴随方程以

$$\lambda(t_k;t_k)=\left(a-\frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k}b\right)$$

为终端条件解出的伴随向量,记

$$\lambda(t_k;T)=(\lambda^v(t_k;T),\lambda^r(t_k;T))^{\tau} \tag{5.13}$$

$$\lambda^v(t_k;T)=(\lambda_1(t_k;T),\lambda_2(t_k;T),\lambda_3(t_k;T))^{\tau} \tag{5.14}$$

$$\lambda^r(t_k;T)=(\lambda_4(t_k;T),\lambda_5(t_k;T),\lambda_6(t_k;T))^{\tau} \tag{5.15}$$

则

$$(\lambda(t_k;T),\delta\boldsymbol{X}(T))=(\lambda^v(t_k;T),\delta v(T))+(\lambda^r(t_k;T),\delta r(T))=0 \tag{5.16}$$

由横截条件 (5.12) 式得

$$\begin{aligned}\psi_1(T)&=\mu\lambda^v(t_k;T)\\ \psi_2(T)&=\mu\lambda^r(t_k;T)\end{aligned} \tag{5.17}$$

式 (5.17) 为伴随方程 (5.11) 的终端条件,解出的伴随矢量为:

$$\begin{aligned}\psi_1(t)&=\mu\lambda^v(t_k;t)\\ \psi_2(t)&=\mu\lambda^r(t_k;t)\end{aligned} \tag{5.18}$$

由极大值原理,使 J 取极小的最优控制为

$$\mathring{u}(t)=F\frac{\psi_1(t)}{|\psi_1(t)|}=\frac{\mu\lambda^v(t_k;t)}{|\mu|\cdot|\lambda^v(t_k;t)|}F \tag{5.19}$$

为求闭合解,将 $\mathring{u}(t)$ 的表达式 (5.19) 代入原方程 (5.4), 得

$$\begin{aligned}\delta\dot{v}&=A(t)\delta r+\mathring{u}\\ \delta\dot{r}&=\delta v\end{aligned} \tag{5.20}$$

设 (5.20) 的基本解阵为

$$\Phi(t,s)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t,s) & \Phi_{12}(t,s)\\ \Phi_{21}(t,s) & \Phi_{22}(t,s)\end{pmatrix}$$

则方程 (5.20) 的解为

$$\begin{pmatrix}\delta v(t)\\ \delta r(t)\end{pmatrix}=\Phi(t,t_0)\begin{pmatrix}\delta v(t_0)\\ \delta r(t_0)\end{pmatrix}+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)\begin{pmatrix}\mathring{u}(s)\\ 0\end{pmatrix}dS \tag{5.21}$$

所以

$$\begin{pmatrix}\delta v(T)\\ \delta r(T)\end{pmatrix}=\Phi(T,t_0)\begin{pmatrix}\delta v(t_0)\\ \delta r(t_0)\end{pmatrix}+\frac{\mu}{|\mu|}\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{T}\Phi_{11}(T,S)\frac{F\lambda^v(t_k;S)}{|\lambda^v(t_k;S)|}dS\\ \int_{t_0}^{T}\Phi_{21}(T,S)\frac{F\lambda^v(t_k;S)}{|\lambda^v(t_k;S)|}dS\end{pmatrix}\tag{5.22}$$

将 (5.22) 代入式 (5.16)，并令

$$\Delta h^u(t_k;T)=\left(\lambda(t_k;T),\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{T}\Phi_{11}(T,S)\frac{F\lambda^v(t_k;S)}{|\lambda^v(t_k;S)|}dS\\ \int_{t_0}^{T}\Phi_{21}(T,S)\frac{F\lambda^v(t_k;S)}{|\lambda^v(t_k;S)|}dS\end{pmatrix}\right)\tag{5.23}$$

可得出：

$$(\lambda(t_k;T),\delta\boldsymbol{X}(T))=(\lambda(t_k;T),\Phi(T,t_0)\delta\boldsymbol{X}(t_0))+\frac{\mu}{|\mu|}\Delta h^u(t_k;T)=0\tag{5.24}$$

利用性质

$$(\boldsymbol{X},A\boldsymbol{Y})=(A^*\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\tag{5.25}$$

式中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为 n 阶矢量，A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵．可将式 (5.24) 右边第一项化为

$$\begin{aligned}&(\lambda(t_k;T),\Phi(T,t_0)\delta\boldsymbol{X}(t_0))=(\Phi^*(T,t_0)\lambda(t_k;T),\delta\boldsymbol{X}(t_0))\\&=(\Phi^\tau(T,t_0)\lambda(t_k;T),\delta\boldsymbol{X}(t_0))=(\lambda(t_k;t_0),\delta\boldsymbol{X}(t_0))=\Delta h(t_k;t_0)\end{aligned}\tag{5.26}$$

将 (5.26) 式代入式 (5.24)

$$\Delta h(t_k;T)=(\lambda(t_k;T),\delta\boldsymbol{X}(T))=\Delta h(t_k;t_0)+\frac{\mu}{|\mu|}\Delta h^u(t_k;T)=0\tag{5.27}$$

由 $\Delta h^u(t_k;T)$ 的定义式 (5.23) 可知，由于在 $[t_0,T]$ 区间内控制加速度

$$u=F\frac{\lambda^v(t_k;S)}{|\lambda^v(t_k;S)|}$$

起作用，引起运动参数变化，相应的 T 时刻预计终端广义座标偏差的变化量为 $\Delta h^u(t_k;T)$．式 (5.27) 表明，初态 $\delta\boldsymbol{X}(t_0)$ 对应的预计偏差 $\Delta h(t_k;t_0)$ 经 $[t_0,T]$ 区间内的控制作用 $\mathring{u}(t)$ 消除掉了．由式 (5.27) 得

$$|\Delta h^u(t_k;T)|=|\Delta h(t_k;t_0)|\tag{5.28}$$

由 (5.28) 式求出 T，并由式 (5.23) 求出 $\Delta h^u(t_k;T)$，再由式 (5.27) 得到

$$\frac{\mu}{|\mu|}=-\frac{\Delta h(t_k;t_0)}{\Delta h^u(t_k;T)}\tag{5.29}$$

如果以控制过程中任意时刻 t 作为初始时刻，

$$\frac{\mu}{|\mu|}=-\frac{\Delta h(t_k;t)}{\Delta h^u(t_k;T)}\tag{5.30}$$

将式 (5.30) 代入式 (5.19)，得到最优控制的闭合解

$$\mathring{u}(t)=-\frac{\Delta h(t_k;t)}{\Delta h^u(t_k;T)}\cdot\frac{\lambda^v(t_k;t)}{|\lambda^v(t_k;t)|}F\tag{5.31}$$

式 (5.31) 表明，向零控无偏状态导引的最优控制加速度必须加在矢量 $\lambda^v(t_k;t)$ 的正方向或负方向．当 $\Delta h(t_k;t)/\Delta h^u(t_k;T)<0$ 时，取正方向；当 $\Delta h(t_k;t)/\Delta h^u(t_k;T)>0$ 时，取负方向．最优控制加速度的大小取允许的最大值，即 $|\mathring{u}(t)|=F$．伴随矢量 $\lambda(t_k;$

t) 可由系统的伴随方程和终端条件 $\lambda(t_k; t_k) = \left(a - \frac{\dot{h}_k}{\dot{l}_k} b\right)$ 事先解出，因而控制加速度的最优方向是已知的. 当制导系统实时计算出 $\Delta h(t_k; t)$, $\Delta h^u(t_k; T)$ 后，按 $\Delta h(t_k; t)/\Delta h^u(t_k; T)$ 的符号即可最后决定 $\dot{u}(t)$ 的方向. 用 $\dot{u}(t)$ 控制火箭，就可最速地消除偏差，达到零控无偏状态.

由式 (5.28), (5.23) 决定时间 T，要想找到 T 的解析表达式往往是不可能的. 但式 (5.23) 中除 T 以外其它各量都是已知的函数，因而可以寻求近似方法或用试凑方法决定 T. 此外，由式 (5.31) 可以看出，最优控制加速度大小为 F，方向与矢量 $\lambda^v(t_k; t)$ 平行. 在制导过程中实时计算偏差 $\Delta h(t_k; t)$，只要有偏差存在，就应加控制作用，对实时控制来说，并不直接利用达到零控无偏流型的时间 T 来决定何时截止控制加速度，因而要紧的是确定 $\Delta h^u(t_k; T)$ 的正负号，根据具体问题应寻求判定 $\Delta h^u(t_k; T)$ 的符号的方法. 这些问题有待进一步研究.

参　考　文　献

[1] 钱学森，工程控制论，科学出版社，1958.
[2] 秦化淑、王朝珠，大气层外拦截交会的导引问题，国防工业出版社，(1977).
[3] 韩京清，拦截问题中的导引律，国防工业出版社，(1977).
[4] G. R. Pitman, Inertial Guidance, New York, Wiley, (1962).
[5] D. M. Salman, Multipoint Guidance——an Efficient Implementation of Predictive Guidance, *AIAA J.* 11 (1973), No. 12.
[6] А. Ю. Ишлинский, Инерциальное управление баллистическими ракетами, Наука, Москва, (1968).
[7] Р. Ф. Аппазов, С. С. Лавров, В. П. Мишин, баллистика управляемых ракет дельнего действия, Москва, (1966).

THE PERTURBATIVE AND PREDICTIVE GUIDANCE OF THE LAUNCH VEHICLE

GUO XIAO-KUAN　　YUE PI-YU

ABSTRACT

This paper deals with the yaw channel guidance of the launch vehicle in detail by means of the idea of predictive guidance. The basic principle of perturbative and predictive guidance are described. Under the conditions of both navigation computation and perturbative measurement the basic calculative formula of the perturbative and predictive guidance is derived and the simplified form of the predictive guidance and its requirements for the simplification are discussed.

Besides, we also suggest the concept of "zero control and unbias states" and the problem of optimal control guiding to the zero control and unbias states. A closeloop solution of optimal control was derived. The concept and results are to be researched further.