

共享合成 Petri 网的性质分析¹⁾

庞善臣^{1,2} 蒋昌俊^{1,2} 孙萍¹ 周长红²

¹⁾(同济大学计算机科学与工程系 上海 200092)

²⁾(山东科技大学信息科学与工程学院 泰安 271019)

(Email: shanchenpang@sohu.com)

摘要 组合 Petri 网的性质不变性对大型合成系统分析有着重要意义, 从分析共享合成 Petri 网的结构性质入手, 分析了它的活性性质, 给出了它的一个较为简单的活性判定的充要条件. 在此基础上, 研究了共享合成 Petri 网的活性与行为不变性和状态不变性的关系, 为系统合成的活性和一致性的关系提供了分析依据.

关键词 Petri 网, 共享合成, 活性, 行为不变性, 状态不变性

中图分类号 TP301

Property Analysis of Shared Composition Petri Nets

PANG Shan-Chen^{1,2} JIANG Chang-Jun^{1,2} SUN Ping¹ ZHOU Chang-Hong²

¹⁾(Department of Computer Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092)

²⁾(College of Information Science and Engineering, Shandong University
of Science and Technology, Taian 271019)

(Email:shanchenpang@sohu.com)

Abstract The liveness properties are analyzed from the structural properties of the shared composition Petri nets, and then a necessary and sufficient condition to decide the liveness of shared composition Petri nets is obtained. Based on this, the relationships between the liveness of shared composition Petri nets and the behavior constancy and the state constancy are discussed, and judgment to analyze the relationship between the liveness property and the constancy property of system composition is provided.

Key words Petri nets, shared composition, liveness, behavior constancy, state constancy

1 引言

组合 Petri 网的性质不变性对大型合成系统分析有着重要意义. 近年来, 组合网研究已取得很大的进展^[1], 文献 [2,3] 首次提出了 Petri 网的加法、笛卡儿积、广义笛卡儿积的

1) 国家杰出青年科学基金 (60125205)、"863" 计划 (2001AA413020)、"973" 计划 (2003CB316902)、国家自然科学基金 (90412013) 和上海市重点基金项目 (02DJ14064) 资助

Supported by National Science Foundation for Prominent Youth of P.R. China(60125205), the national Hi-tech R & D Plan of P.R. China(2001AA413020) "973" Project of P.R. China (2003CB316902), National Natural Science Foundation of P.R. China (90412013), and the Grand Fundamental Foundation of Shanghai Sci-Tech R & D Project of P.R. China(02DJ14064)

收稿日期 2003-03-19 收修改稿日期 2003-07-28

Received March 19, 2003; in revised form July 28, 2003

网组合运算, 得到了一系列的重要性质; 文献 [4~6] 也对组合 Petri 进行了深入的研究; 文献 [7] 研究了 Petri 网同步合成和共享合成两种组合网的动态不变性, 即状态和行为不变性, 但没有讨论合成网活性与动态不变性的关系, 不利于分析复杂大系统由简单小系统合成后的原子性质不变与原子功能不变性的关系. 本文给出了活性与状态不变性和行为不变性的关系, 较好地解决了这个问题; 从分析共享合成 Petri 网的结构性质入手, 分析了共享合成 Petri 网的活性性质, 并给出了一种新的活性判定方法, 得到了较好的结果. 本文结果对实际系统设计中有效利用资源有重要指导意义.

2 基本概念

定义 1. 设 $PN = (P, T; F)$ 是 Petri 网, 其中 P, T, F , 分别是库所、变迁和流关系.

1) $\forall t_1, t_2 \in T$, 若 $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset \rightarrow |\bullet t_1| = |\bullet t_2| = 1$, 则称 PN 为一个自由选择网; 称 $S = \bullet t_1 \cap \bullet t_2$ 具有选择结构; $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset \rightarrow \bullet t_1 = \bullet t_2$, 则 PN 称为一个扩充的自由选择网.

2) $P' \subseteq P$ 是 PN 的一个非空死锁 (陷阱) 当且仅当 $P' \neq \emptyset; \bullet P' \subseteq P' \bullet (P' \bullet \subseteq \bullet P')$; P' 是 PN 的极小死锁 (陷阱) 当且仅当 P' 真子集都不是 PN 的死锁 (陷阱).

定义 2. 设 Petri 网 $PN_i = (P_i, T_i; F_i, M_{0i}), i = 1, 2$, 令 $PN = (P, T; F, M_0)$.

若 ① $P = P_1 \cup P_2, P_0 = P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, 设 $|P_0| = h, |P| = m$; ② $T = T_1 \cup T_2, T_1 \cap T_2 = \emptyset$;
③ $F = F_1 \cup F_2$; ④ $M_0(P) = \begin{cases} \text{Max}\{M_{01}(P), M_{02}(P)\}, & \text{若 } P \in P_1 \cap P_2, \\ M_{0i}(P), & \text{若 } P \in P_i - (P_1 \cap P_2), \end{cases} i = 1, 2$, 称

PN 为 PN_1 与 PN_2 的共享合成 Petri 网 (简称 P 组合网).

定义 3. 设 Petri 网 $PN_i = (P_i, T_i; F_i, M_{0i}), i = 1, 2$; PN 为 PN_1 与 PN_2 的共享合成 Petri 网.

1) $\forall M \in R(M_0), \exists M_i \in R(M_{0i})$, 使得 $\Gamma_{P \rightarrow (P_i - (P_1 \cap P_2))}(M_i), i = 1, 2$, 则称 PN 满足状态不变性; 若对 $\forall M \in R(M_0)$, 都有 $\Gamma_{P \rightarrow P_i}(M) \in R(M_{0i})$, 则称 PN 满足完全状态不变性, 其中 $\Gamma_{x \rightarrow y}(Z)$ 表示取 Z 在 X 的子集 Y 上的投影部分;

2) $\forall \sigma \in L(PN)$, 都有 $\Gamma_{T \rightarrow T_i}(\sigma) \in L(PN_i), i = 1, 2$, 则称 PN 满足行为不变性, 其中 $L(PN)$ 表示变迁序列的语言集合. 文中未定义的术语和记号见文献 [8,9].

3 P 组合网的性质分析

设 y_i 为 m_i 维向量, $i = 1, 2, y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \end{pmatrix}$, 其中 y_{i1} 为 h 维向量.

引理 1^[10]. 设 A 为网 PN 的关联矩阵, 则 PN 为结构有界网的充要条件是, 存在 m 维正整数向量 y 使得 $Ay \leq 0$.

定理 1. 设 PN 为 PN_1 和 PN_2 的 P 组合网, 若存在整数向量 $y_i, A_i y_i \leq 0 (i=1, 2)$, 且 y_{11} 与 y_{21} 线性相关, 则 PN 是结构有界网.

证明. 由 $A_i y_i \leq 0$ 可得 $A_{11} y_{11} + A_{12} y_{12} \leq 0, A_{21} y_{21} + A_{22} y_{22} \leq 0$, 因为 y_{11} 与 y_{21} 线性相关, 不妨设 $y_{11} = k y_{21}$. 构造 m 维正整数向量 $y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ k y_{22} \end{pmatrix}$, 易证 $Ay \leq 0$, 由引理 1

知, PN 是结构有界网.

同理可证下面的定理 2 成立.

定理 2. 设 PN 为 PN_1 和 PN_2 的 P 组合网, 若存在正整数向量 $y_i, A_i y_i = 0 (i = 1, 2)$, 且 y_{11} 与 y_{21} 线性相关, 则 PN 是守恒网.

定理 3. 设 PN 为 PN_1 和 PN_2 的 P 组合网, 若 PN_1 和 PN_2 是可重复网, 则 PN 是可重复网.

证明. PN_1, PN_2 为可重复网, 则存在 n_1, n_2 维正整数向量 x_1, x_2 , 且 $A_1^T x_1 \geq 0, A_2^T x_2 \geq 0$, 即 $\begin{cases} A_{11} x_{11} \geq 0 \\ A_{12} x_{11} \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} A_{21} x_{21} \geq 0 \\ A_{22} x_{21} \geq 0 \end{cases}$, 则构造 n 维正整数向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. 易证 $A^T x \geq 0$, 所以 PN 是可重复网. 同理可证下述结论成立.

定理 4. 设 PN 为 PN_1 和 PN_2 的 P 组合网, 若 PN_1 和 PN_2 都是协调网, 则 PN 是协调网.

定理 5. 设 y_i 为网 PN_i 的一个 T -不变量 ($i=1,2$), 若存在正整数 k 和 $y_{11} = ky_{21}$, 则 $y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ 是 PN 的一个 T -不变量.

定理 6. 设 x_i 为网 PN_i 的一个 S -不变量 ($i=1,2$), 则 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 是的一个 PN 的一个 S -不变量.

引理 2^[8]. 设 $PN = (P, T; F)$ 为一个 Petri 网, M 为网 PN 的一个标识, 记 $T' = \{t \in T | \neg M[t >]\}$, $P' = \{p \in P | M(p) = 0\}$, $P'' = \bullet T' \cap P'$. 如果 $\bullet P'' \subseteq T'$, 则 P'' 是网 PN 的一个死锁且 $M(P'') = 0$.

引理 3. 设两个活的 Petri 网 $PN_i = (P_i, T; F, M_{0i})$, $i = 1, 2$. PN 为 PN_1 和 PN_2 的 P 组合 Petri 网, 若 P_0 的外延子网不含非空死锁, 则 PN 是活的.

证明. (反证法)

假设 PN 不是活的, 则 $\exists M_1 \in R(M_0), \exists t \in T$, 对 $\forall M \in R(M_1) : \neg M[t >]$, 记 $T' = \{t \in T | \forall M \in R(M_1) : \neg M[t >]\}$, $P_{M_1} = \{p \in P | M_1(p) = 0\}$, $P^1 = \bullet T' \cap P_{M_1}$. 现在考察 P^1 , 若 $\bullet P^1 \not\subseteq T'$, 即 $\exists t_1 \in \bullet P^1$ 和 $M'_1 \in R(M_1) : M'_1[t_1 >]$, 显然 $t_1 \notin T'$. 设 $M'_1[t_1 > M_2, \exists p_1 \in P^1, M_2(p_1) = 1$, 然而由于 $p_1 \in P^1$, 若 $p_1 \in P_1 - P_0$, 这与 PN_1 是活的相矛盾. 同理 $p_1 \notin P_2 - P_0$, 故 $p_1 \in P_0$, 由 P 组合 Petri 网的定义和 PN_1 的活性知, p_1 具有选择结构, 所以 $p_1 \in {}^1 P$, 即 p_1 中增加的这个标志不能导致任何变迁发生, 只能“冻结”在那里. 令 $P_{M_2} = \{p \in P | M_2(p) = 0\}$, $P^2 = \bullet T' \cap P_{M_2}$, 显然 $P^2 \subset P^1$. 再分析 $\bullet P^2$, 若 $\bullet P^2 \not\subseteq T'$, 即 $\exists t_2 \in \bullet P^2$ 和 $M'_2 \in R(M_2)$, 使得 $M'_2[t_2 >]$, 则 $t_2 \notin T'$. 设 $M'_2[t_2 > M_3$, 则 $\exists p_2 \in P^2$, 使 $M_3(p_2) = 1$, 同 p_1 一样, p_2 中的标志也“冻结”在那里, 不会导致任何变迁发生. 由于 M_1 的有限性, 上述过程重复有限步之后, 必然会遇到一个 $M_k : P^k = \bullet T' \cap P_{M_k}, P_{M_k} = \{p \in P | M_k(p) = 0\}$ 使得 $\forall t \in \bullet P^k, \forall M \in R(M_k) : \neg M[t >]$. 这时便有 $\bullet P^k \subseteq T'$, 由引理 2 知, P^k 是一个死锁, 且 $P^k \neq \phi$ (否则 $\bullet T' \cap P^k = \phi \rightarrow \forall t \in T' : M_k[t >]$) 这与题设相矛盾, 命题得证.

引理 4^[8]. 设 $PN = (P, T; F)$ 为一个 Petri 网, M 为网 PN 的一个标识, D 为 PN 的一个死锁, S 为 PN 的一个陷阱, 则有 D 不被 M 标识标识 $\Rightarrow \forall M' \in R(M), D$ 不被 M' 标识; S 被 M 标识 $\Rightarrow \forall M' \in R(M), S$ 被 M' 标识.

定理 7. 两个活的 Petri 网 $PN_i = (P_i, T_i; F_i, M_{0i})$, $i = 1, 2$; PN 为 PN_1 和 PN_2 的一

个 P 组合 Petri 网, 则 PN 是活的充分必要条件: P_0 的外延子网的每个极小死锁 Q 中均包含一个含有标志的陷阱.

证明. 先证充分性.

1) Q 既是死锁也是陷阱, 这时只需证明 $M_0(Q) \neq 0$, 由于 Q 既是陷阱又是死锁, 即 $\bullet Q = Q^\bullet$, 若 $M_0(Q) = 0$, 因 Q 是死锁, 由引理 4 知 $\forall M' \in R(M_0), M'(Q) = 0$, 则 $\forall t \in Q^\bullet, \forall M' \in R(M_0): \neg M'[t >$, 这与 PN 是活的相矛盾, 故 $M_0(Q) \neq 0$ 成立.

2) Q 不是陷阱, 则一定 $\exists t \in Q^\bullet, t \notin \bullet Q$, 记 $T^1 = \bullet Q, \bar{T}^1 = \{t | t \in Q^\bullet \wedge t \notin \bullet Q\}, P^1 = \{P | p \in \bullet T^1 \cap Q\}, PN_{P^1} = (P^1, T^1; F^1, M(P^1)), F^1 = ((P^1 \times T^1) \cup (T^1 \times P^1)) \cap F$, 由 PN 的活性知, 则 PN_{P^1} 也是活的. 因 Q 是死锁, 由引理 4 知, Q 以外的标志不会进入 Q , 而 \bar{T}^1 的发生会使 Q 中的标志减少, P^1 若是陷阱, 由于 PN_{P^1} 是活的, 则 $M(P^1) \neq 0$.

若 $P^{1\bullet} \neq \bullet P^1$, 重复以上步骤, 将得到一个活网 $PN_{P^2} = (P^2, T^2; F^2, M(P^2))$, 在执行若干步之后就会出现下述情况.

① $P^k \neq \phi, P^{k\bullet} \subseteq \bullet P^k$, 且 $M(P^k) \neq 0$, 结论得证.

② $P^k = \phi$, 由 PN_{P^k} 的构造过程可知, $P^k = \bullet T_k \cap P^{k-1}, T_k = \bullet P^{k-1}, \bar{T}^k = P^{k-1\bullet} - \bullet P^{k-1}$.

因为 $P^k = \phi$, 即 $\bullet(\bullet P^{k-1}) = \phi$ 或 $P^{k-1} = \phi$, 由 $PN_{P^{k-1}}$ 的构造知 $P^{k-1} = \phi$ 不成立, 即 $\bullet P^{k-1} = \phi$ 或 $\bullet P^{k-1} \neq \phi$: 若 $\bullet P^{k-1} = \phi$, 则 P^{k-1} 内的标志经 $P^{k-1\bullet}$ 的变迁发生之后, P^{k-1} 的标志将丢失, 则 $P^{k-1\bullet}$ 将永远不再发生, 这与 $PN_{P^{k-1}}$ 是活的相矛盾, 即 $\bullet P^{k-1} \neq \phi$; 若 $\bullet P^{k-1} \neq \phi$, 即 $T^k \neq \phi$, 则 PN_{P^k} 是只含有变迁的 Petri 网, $\bullet T^k$ 中的标志可以经过 \bar{T}^k 流到 $PN_{P^{k-1}}$ 之外, 进而流到 Q 之外, 使得 T^k 中的变迁永远不能发生, 这与 PN 是活的相矛盾. 综上所述, 充分性得证.

再证必要性 (反证法).

假设 PN 不是活的, 由引理 3 的证明过程知, P_0 外延子网含有空的死锁, 而由题设知 P_0 外延子网含的极小死锁中都含有陷阱; 由引理 4 和题设知, 陷阱被 M 标识标识 $\Rightarrow \forall M' \in R(M)$, 陷阱被 M' 标识, 因此无论变迁怎样发生, 都不可能使 P_0 外延子网中的死锁为空, 这与题设相矛盾, 必要性得证. 证毕.

定理 8. 两个活的 Petri 网 $PN_i = (P_i, T_i; F_i, M_{0i}), i = 1, 2$; PN 为 PN_1 和 PN_2 的一个 P 组合 Petri 网, 若 PN 是活的且满足完全状态不变性, 则 PN 满足行为不变性.

证明(归纳法).

若 $|\sigma| \leq 1$, 显然 $\Gamma_{T \rightarrow T_i}(\sigma) \in L(PN_i)$ 成立. 记 $\exists M \in R(M_0)$ 使得 $M[\sigma > M'$, 由 PN 的活性, $\exists t \in T$, 使得 $M'[t >$, 考察 σt : 不妨设 $t \in T_1$, 记 $\Gamma_{T \rightarrow T_1}(\sigma) = \sigma_1, \Gamma_{P \rightarrow P_1}(M) = M_1$, 则 $M_1[\sigma_1 >$ 成立. $\Gamma_{T \rightarrow T_i}(\sigma t) = \Gamma_{T \rightarrow T_i}(\sigma) + \Gamma_{T \rightarrow T_i}(t)$, 所以, $\Gamma_{T \rightarrow T_2}(\sigma t) = \Gamma_{T \rightarrow T_2}(\sigma) \in L(PN_2)$ 成立. 下面证明 $\Gamma_{T \rightarrow T_1}(\sigma t) \in L(PN_1)$.

1) 若 σ 的最后一个变迁属于 T_1 , 设 $\Gamma_{P \rightarrow P_1}(M') = M'_{01}$, 由 PN 的完全状态不变性知, M'_{01}, M' 中 $\bullet t$ 有相同的标志, 所以 $M_1[\sigma_1 > M'_{01}[\bullet t >$ 成立, 即 $\sigma_1 t \in L(PN_1)$, 结论得证.

2) 若 σ 的最后一个变迁属于 T_2 , 同 1) 所证 M'_{01}, M' 中 $\bullet t$ 有相同的标志, 若 σ 中最后属于 T_2 的变迁不能使 $\bullet t$ 中的标志得到改变, 我们将这些 T_2 的变迁去掉后, 并不影响 t 的发生, 即 t 与它们处于并发状态, 由 1) 的证明方法得 $\sigma_1 t \in L(PN_1)$ 成立; 否则, 由 PN 的活性知 σ 中最后属于 T_2 的变迁使得 $\bullet t$ 中的标志恢复到了 PN_1 的 M'_{01} 状态, 此时这

些 T_2 的变迁对 PN_1 只起到了调节控制作用, 此时让 PN_2 停止活动. 由 PN_1 的活性知, $M'_{01}] > t$ 成立, 即 $\sigma_1 t \in L(PN_1)$ 成立. 命题得证. 证毕.

4 结束语

研究结果为系统合成的活性和一致性的关系提供分析依据, 对于活性与行为不变性和动态不变性的关系, 是一个复杂而有意义研究课题, 我们将在今后的研究中对它们的关系作深入地探讨.

References

- 1 Lu Wei-Ming. Alternative action properties of C/E system. *Science in China (Series A)*, 1993, **23**(3): 219~224 (in Chinese)
- 2 Jiang Chang-Jun, Wu Zhehui. Net operations. *Journal of Computer Science and Technology*, 1992, **7**(4): 333~334
- 3 Jiang Chang-Jun. Generalized Cartesian Production Operations of Petri Nets. *Acta Automatica Sinica*, 1993, **19**(6): 745~748 (in Chinese)
- 4 Li Xiao-Zhong, Du Yu-Yue. Two kinds of composition petri nets and their properties analysis. *Journal of Software*, 1998, **9**(8): 619~621 (in Chinese)
- 5 Li Xiao-Zhong, Du Yu-Yue. CCA operations and their proportions for P/T nets. *Mini-Micro Systems*, 1998, **19**(9): 50~54 (in Chinese)
- 6 Du Yu-Yue, Li Xiao-Zhong. Analysis and implementation of liveness of S-composition petri net. *Chinese Journal of Computers*, 1998, **21**(8): 747~752 (in Chinese)
- 7 Jiang Chang-Jun. Dynamic Invariance of Petri Net. *Science in China(Series E)*, 1997, **27**(6): 567~573 (in Chinese)
- 8 Murata, T. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 1989, **77**(4): 541~580
- 9 Wu Zhe-Hui. Analysis and implementation of liveness and fairness of bounded petri nets. *Chinese Journal of Computers*, 1989, **12**(4): 267~278 (in Chinese)
- 10 Du Yu-Yue, Li Xiao-Zhong, Qiao Bing-Wu. On structural property preservation by ST-composition of petri nets. *Mini-Micro Systems*, 1999, **20**(10): 789~793 (in Chinese)

庞善臣 1997年在山东科技大学信息科学与工程学院获学士学位, 现为博士研究生、讲师. 主要研究方向为算法设计与分析、Petri网理论及应用.

(**PANG Shan-Chen** Received his bachelor degree from College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology in 1997, currently he is Ph.D. Candidate and lecturer. His research interests include design and analysis of algorithms, and the theory and application of petri nets.)

蒋昌俊 1995年在中科院自动化所获博士学位. 目前为同济大学计算机系主任、教授、博士生导师. 主要研究方向为Petri网理论及应用等.

(**JIANG Chang-Jun** Received his Ph.D. degrees from Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences in 1995. Now he is professor, Ph.D. director and chairman at department of Computer Science and Engineering, Tongji University. His research interests include the theory and application of petri nets.)

孙萍 现为同济大学博士研究生, 主要研究方向为Petri网理论及应用

(**SUN Ping** Ph.D. Candidate at department of Computer Science and Engineering, Tongji University. Her research interests include the theory and application of petri nets.)

周长红 现为山东科技大学信息科学与工程学院硕士研究生, 主要研究方向为Petri网理论及应用.

(**ZHOU Zhang-Hong** Master student at the College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology. Her research interests include the theory and application of petri nets.)