第 30 卷 第 6 期 自 动 化 学 报 Vol.30, No.6
2004 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 2004

一类不确定 Lurie 时滞奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[1)]

鲁仁全[1,2] 黄文君[1] 苏宏业[1] 褚 健[1]
[1](浙江大学工业控制技术国家重点实验室先进控制研究所 杭州 310027)
[2](杭州电子工业学院自动化分院 杭州 310037)
(E-mail: rqlu@iipc.zju.edu.cn)

摘 要 研究一类具有不确定性的 Lurie 时滞奇异系统的鲁棒稳定性分析和 H_∞ 状态反馈控制器设计方法. 针对一类具有参数不确定性、未知时滞的奇异系统, 得出了系统鲁棒稳定和鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件, 它能使得不确定 Lurie 时滞奇异系统的解在所容许的范围内是正则的、无摄动的和稳定的; 而且还得出了基于线性矩阵不等式 (LMI) 的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法, 使得闭环系统具有鲁棒稳定性和 H_∞ 性能.

关键词 奇异系统, Lurie 系统, 鲁棒控制, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

Robust H_∞ Control for A Class of Uncertain Lurie Singular Systems with Time-Delays

LU Ren-Quan[1,2] HUANG Wen-Jun[1] SU Hong-Ye[1] CHU Jian[1]
[1](*National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
[2](*School of Automation, Hangzhou Institute of Electronics Engineering, Hangzhou* 310037)
(E-mail: rqlu@iipc.zju.edu.cn)

Abstract Analysis of the robust stability and design of robust H_∞ state feedback controllers for a class of Lurie singular systems with both time-delays and parameters uncertainties are studied. For the Lurie singular systems subject to parametric uncertainties and unknown time delays terms, sufficient conditions of robust stability are deduced such that the solution of the uncertain Lurie time-delay singular system is regular, impulse free, and stable for all admissible uncertainties. Furthermore, an LMI based robust H_∞ state feedback controller is developed to guarantee both the robust stability and the H_∞ performance for the resultant closed-loop system.

1) 国家杰出青年基金 (NSFC: 60025308), 中国高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金和国家 “十五科技攻关项目” (2001BA204B01) 资助
Supported by National Outstanding Youth Science Foundation of P. R. China (NSFC: 60025308), Teaching and Research Award Program for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of MOE P. R. China and National Key Technologies Research and Development Program in the 10^{th} Five-year Plan(2001BA204B01)
收稿日期 2003-01-02 收修改稿日期 2004-05-20
Received January 2, 2003; in revised form May 20, 2003

Key words　Singular systems, Lurie systems, robust control, linear matrix inequality (LMI)

1　引言

由于奇异系统比正则系统更能精确地描述实际的动态系统，在过去的几十年里，人们对它进行了广泛的研究．奇异系统又叫绝对系统、广义状态空间系统、微分代数系统或者不完全状态系统[1~3]．许多基于正则系统 (状态空间) 的结果已经逐步扩展到奇异系统[4~7]．近年来，此类问题的研究已取得了丰硕成果[4~10]，然而对于具有非线性执行机构的 Lurie 时滞奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制问题却鲜有涉及．

本文把非线性执行机构引入到不确定时滞奇异系统中，研究了一类具有参数不确定性的 Lurie 时滞奇异系统鲁棒稳定性和鲁棒状态反馈控制问题，得出了鲁棒 H_∞ 稳定性的充分条件，它能够使系统具有正则性、无摄动性和稳定性；而且，还得出了基于线性矩阵不等式的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器的设计方法．

2　系统描述和定义

考虑如下的具有未知时滞项和参数不确定性的连续 Lurie 奇异系统

$$\begin{aligned}E\dot{\boldsymbol{x}}(t) =&(A_0+\triangle A_0(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{x}(t)+\sum_{=1}^{k}(A_i+\triangle A_i(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{x}(t-h_i(t))+E_{10}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))+(B_{10}+\\&\triangle B_{10}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{w}(t)+(B_{20}+\triangle B_{20}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{u}(t)+\sum_{i=1}^{k}(B_{2i}+\triangle B_{2i}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{u}(t-g_i(t))\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t) =&(c_{10}+\triangle C_{10}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{k}(C_{1i}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{x}(t-h_i(t))+(D_{10}+\triangle D_{10}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{w}(t)+\\&(D_{20}+\triangle D_{20}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{u}(t)+\sum_{i=1}^{k}(D_{2i}+\triangle D_{2i}(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{u}(t-g_i(t))\end{aligned}\tag{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=C\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ \boldsymbol{w}=0,\ \boldsymbol{u}(t)=0,\ t\in[-\max(h_j(t),g_j(t)),o],\ j=0,1,\cdots k\tag{3}$$

把此被控系统记为 $\Sigma_\triangle$，这里 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 和 $z(t)\in R^q$ 分别是系统的状态、控制输入和被控输出向量；$\boldsymbol{w}(t)\in L_2^p[0,\infty)$ 为平方可积的扰动输入向量；矩阵 $E\in R^{n\times n}$ 是奇异的，假定 $rankE=r\leqslant n$. C, A_{2i}, B_{1i}, C_{2i}, E_{10}, B_{10}, $D_{10}(i=0,1,2,\cdots,k)$ 为已知的具有适当位数的矩阵．为实值连续矩阵函数，分别表示系统的实变参数的不确定性，假定不确定性可以描述成如下的形式

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\triangle A_0 & \triangle A_1 & \cdots & \triangle A_k & \triangle B_{10} & \triangle B_{20} & \triangle B_{21} & \cdots & \triangle B_{2k}\\ \triangle C_{10} & \triangle C_{11} & \cdots & \triangle C_{1k} & \triangle D_{10} & \triangle D_{20} & \triangle D_{21} & \cdots & \triangle D_{2k}\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}G_{11}\\ G_{21}\end{bmatrix}F(\boldsymbol{x}(t),t)[H_{11}\quad H_{121}\quad\cdots\quad H_{12k}\quad H_{13}\quad H_{14}\quad H_{151}\quad\cdots\quad H_{15k}]\end{aligned}\tag{4}$$

上式中 H_{11}, H_{121}, $\cdots$, H_{12k}, H_{13}, H_{14}, H_{151}, $\cdots$ H_{15k}, G_{11}, G_{21} 为已知的具有适当维数的常矩阵．$F(\boldsymbol{x}(t),t)$ 表示未知的实值时变矩阵，其元素 Lebesgue 可测且有界，满足

$$F^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t),t)F(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant I,\ \forall t\tag{5}$$

式 (1) 中的 $h_i(t)$, $g_i(t)$ 是未知有界的时滞项，满足

$$0 \leqslant h_i(t),\ g_i(t) \leqslant h,\ g \leqslant \tau,\ \dot{h}_i(t),\ \dot{g}_i(t) \leqslant h_i,\ g_i < 1 \tag{6}$$

令 $\tau = \max(h_i, g_i)$, $i = 1, 2, \cdots k$, 当 $t \in [-\tau, 0]$ 时, $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)$, $\boldsymbol{w}(t) = 0$, $\boldsymbol{u}(t) = 0$, $\boldsymbol{\phi}(t)$ 表示系统 (1) 解的初值函数，为一连续光滑的向量函数. $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) = (f(\sigma_1), f(\sigma_2), \cdots, f(\sigma_n))^{\mathrm{T}}$. 每一个非线性机构的导数范数有界且位于有限霍尔维茨角域内，即对于 $j = 1, 2, \cdots, n$

$$f_j(\cdot) \in K_j[0, k_j] = \{f_j(\sigma_j) | f_j(0) = 0,\ \| \dot{f}_j(\sigma_j) \| \leqslant \alpha,\ 0 < \sigma_j f_j(\sigma_j) \leqslant k_j \sigma_j^2 (\sigma_j \neq 0)\} \tag{7}$$

不确定 Lurie 时滞奇异系统 (1) 的标称自治系统可写成如下的形式:

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_0 \boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{k} A_i \boldsymbol{x}(t - h_i(t)) + E_{10} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \tag{8}$$

定义 1[9]. 1) 如果 $\det(sE-A) \neq 0$, 则矩阵对 (E, A) 是正则的; 2) 如果 $\deg(\det(sE-A)) = rankE$, 则矩阵对 (E, A) 无摄动.

定义 2[9]. 1) 奇异系统 (8) 是正则的、无摄动的，即奇异系统 (8) 的解在 $[0, \infty)$ 是唯一的、无摄动的，如果矩阵对 (E, A) 是正则的、无摄动的; 2) 奇异系统 (8) 是稳定的，如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, 对于任意的平滑初始条件 $\boldsymbol{\phi}(t)$, 当 $\sup_{-\tau \leqslant t \leqslant 0} \| \boldsymbol{\phi}(t) \| \leqslant \delta(\varepsilon)$ 时，系统 (8) 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\boldsymbol{x}(t) \leqslant \varepsilon$, $\forall t \geqslant 0$, 且 $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$.

定义 3. 不确定 Lurie 时滞奇异系统 $\Sigma_\triangle$ 是鲁棒稳定的, 如果当 $\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{u}(t - g_i(t)) \equiv 0$ 且 $\boldsymbol{w}(t) \in L_2^p[0, \infty)$ 时，对所有容许的不确定性，不确定 Lurie 时滞奇异系统是稳定的、正则的、无摄动的.

定义 4. 对于不确定 Lurie 时滞奇异系统 $\Sigma_\triangle$, 设计一个状态反馈控制器 $\Upsilon : \boldsymbol{u}(t) = \Lambda \boldsymbol{x}(t)$, $\Lambda \in R^{m \times n}$, 当 $\boldsymbol{w}(t) \in L_2^p[0, \infty)$ 时，闭环系统是定义 3 所定义的鲁棒稳定的，且对于给定的标量 $\gamma > 0$, 对所有容许的不确定性，满足

$$\sup_{0 \neq w \in L_2[0, \infty)} \left(\frac{\| \boldsymbol{z}(t) \|_2}{\| \boldsymbol{w}(t) \|_2} \right) < \gamma \tag{9}$$

则称系统 $\Sigma_\triangle$ 具有鲁棒 H_∞ 性能，控制器 Υ 称为控制 H_∞ 器.

3 鲁棒稳定性分析

在得出主要结论之前，先看以下的引理.

引理 1[2]. 奇异系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) \tag{10}$$

是鲁棒稳定的，即是稳定的、正则的、无摄动的，当且仅当存在矩阵 P 满足

$$EP^{\mathrm{T}} = PE^{\mathrm{T}} \geqslant 0, AR^{\mathrm{T}} + PA^{\mathrm{T}} < 0 \tag{11}$$

引理 2[9]. 如果函数 $\dot{\varphi}$ 在 $[0, \infty)$ 内有界，即存在一个标量 $\alpha > 0$, 对所有 $t \in [0, \infty)$, 有 $|\dot{\varphi}(t)| \leqslant \alpha$, 则函数 $\varphi(t)$ 在 $[0, \infty)$ 内是一致连续的.

引理 3[11]. 如果存在对称正定阵 $P>0$ 和矩阵 A, 满足 $A^{\mathrm T}PA-P<0$, 当且仅当存在对称矩阵 G 使不等式 $\begin{bmatrix} P & A^{\mathrm T}G^{\mathrm T} \\ GA & G+G^{\mathrm T}-P \end{bmatrix}>0$ 成立.

引理 4[12]. 考虑函数 $\varphi: R^{+}\to R$, 如果函数 $\varphi(t)$ 在 $[0,\infty)$ 内是一致连续的, 并且 $\int_0^{\infty}\varphi(s)\mathrm ds<\infty$, 则 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$.

如下的定理给出了奇异系统 (8) 鲁棒稳定的充分条件.

定理 1. 奇异系统 (8) 是鲁棒稳定的, 如果存在对称正定阵 $Q_i>0(i=1\cdots k)$ 和矩阵 P, 以及标量 $\varepsilon>0$ 满足

$$\Omega=\begin{bmatrix} A_0P^{\mathrm T}+PA_0^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^{k}Q_i & \Omega_{12} & E_{10} & PC^{\mathrm T}K^{\mathrm T} \\ \Omega_{12}^{\mathrm T} & \Omega_{22} & 0 & 0 \\ E_{10}^{\mathrm T} & 0 & -\varepsilon^{-1}I & 0 \\ KCP^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

$$EP^{\mathrm T}=PE^{\mathrm T}\geqslant 0 \tag{13}$$

其中 $K=\mathrm{diag}\{k_1,\cdots,k_n\}$, $\Omega_{12}=[A_1P^{\mathrm T}\cdots A_kP^{\mathrm T}]$, $\Omega_{22}=-\mathrm{diag}\{(1-h_1)Q_1,\cdots,(1-h_k)Q_k\}$.

证明. 由 Schur 补引理知, 不等式 (12) 等价于 $A_0P^{\mathrm T}+PA_0^{\mathrm T}<0$; 由引理 1 知, 矩阵对 (E,A) 是正则的、无摄动的; 由定义 2 知, 系统 (8) 是正则的、无摄动的. 如果我们能证明系统 (8) 是稳定的, 则定理 1 得证.

Dai[1] 指出, 如果矩阵对 (E,A) 是正则的、无摄动的, 则必存在两个可逆矩阵 $L_1,L_2\in R^{n\times n}$, 使得

$$\bar E:=L_1EL_2=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \bar A:=L_1A_0L_2=\begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中 $I_r\in R^{r\times r}$, $I_{n-r}\in R^{(n-r)\times(n-r)}$, $A_r\in R^{r\times r}$. 根据式 (14) 作如下变换

$$\begin{aligned} &\bar A_i:L_1A_iL_2=\begin{bmatrix} \bar A_{i11} & \bar A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix},\ \bar C:=L_2^{-1}CL_2,\ \bar K:=KL_2,\ \bar E_{10}:=L_1E_{10}=\begin{bmatrix} \bar E_1 \\ \bar E_2 \end{bmatrix}, \\ &\bar P:=L_1EL_2^{-\mathrm T}=\begin{bmatrix} \bar P_{11} & \bar P_{12} \\ \bar P_{21} & \bar P_{22} \end{bmatrix},\ \bar Q_i:=L_1Q_iL_1^{\mathrm T}=\begin{bmatrix} \bar Q_{i11}\,\bar Q_{i12} & \\ \bar Q_{21} & \bar Q_{i22} \end{bmatrix},\ i=1,\cdots,k, \end{aligned} \tag{15}$$

把式 (12) 左乘 $\mathrm{diag}\{L_1,\mathrm{diag}\{L_1\cdots L_1\},I,I\}$, 右乘 $\mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm T},\mathrm{diag}\{L_1^{\mathrm T}\cdots L_1^{\mathrm T}\},I,I\}$, 则有

$$\bar E\bar P^{\mathrm T}=\bar P\bar E^{\mathrm T}\geqslant 0 \tag{16}$$

$$\bar\Omega=\begin{bmatrix} \bar A\bar P^{\mathrm T}+\bar P\bar A^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^{k}\bar Q_i & \bar Q_{12} & \bar E_{10} & \bar P\bar C\bar K^{\mathrm T} \\ \bar Q_{12}^{\mathrm T} & \bar\Omega_{22} & 0 & 0 \\ \bar E_{10}^{\mathrm T} & 0 & -\varepsilon^{-1}I & 0 \\ \bar K\bar C\bar P^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

其中 $\bar Q_{12}=[\bar A_1\bar P^{\mathrm T}\cdots\bar A_k\bar P^{\mathrm T}]$, $\bar\Omega_{22}=-\mathrm{diag}\{(1-h_1)\bar Q,\cdots,(1-h_k)\bar Q_k\}$.

把式 (14) 中的 $\bar E$ 和式 (15) 中的 $\bar P$ 代入式 (16) 中, 得出 $\bar P_{11}=\bar P_{11}^{\mathrm T}\geqslant 0,\bar P_{21}=0$, 即

$$\bar P=\begin{bmatrix} \bar P_{11} & \bar P_{12} \\ 0 & \bar P_{22} \end{bmatrix} \tag{18}$$

类似于文献 [9] 定理 1 的证明及引理 3 可知, 如下的条件满足

$$\bar P_{11}>0,\ \rho(\bar A_{i22})<1,\ i=1,\cdots,k \tag{19}$$

对时滞奇异系统 (8) 中的状态做线性变换，令

$$\boldsymbol{\xi}(t)=L_2^{-1}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1(t)\\ \boldsymbol{\xi}_2(t)\end{bmatrix} \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1(t)\in R^r$, $\boldsymbol{\xi}_2(t)\in R^{n-r}$. 把式 (14), (15) 和 (20) 带入奇异系统 (8) 中，得

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}}_1(t)=A_r\boldsymbol{\xi}_1(t)+\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{A}_{i11}\boldsymbol{\xi}_1(t-h_i(t))+\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{A}_{i12}\boldsymbol{\xi}_2(t-h_i(t))+\bar{E}_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}(t))\\ 0=\boldsymbol{\xi}_2(t)+\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{A}_{i21}\boldsymbol{\xi}_1(t-h_i(t))+\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{A}_{i22}\boldsymbol{\xi}_2(t-h_i(t))+\bar{E}_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}(r))\end{cases} \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}(t)=\bar{C}\boldsymbol{\xi}(t)$. 定义 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\xi}(t))=&\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}_{11}^{-1}\boldsymbol{\xi}_1(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_i\bar{P}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(s)\mathrm{d}s=\\ &\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{E}\boldsymbol{\xi}(t)+\sum_{i=1}^{k}\int_{t-h_i(t)}^{t}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}_i\bar{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{22}$$

式 (7) 中的霍尔维茨角域等价表示成 $\sigma_j f_j(\sigma_j)(\sigma_j f_j(\sigma_j)-k_j\sigma_j^2)\leqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)\Rightarrow f_j^2(\sigma_j)\leqslant k_j^2\sigma_j^2\Rightarrow\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\|^2\leqslant\|KC\boldsymbol{x}(t)\|^2$ 即

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{K}\bar{C}\boldsymbol{\xi}(t) \tag{23}$$

由式 (21), 式 (22) 及不等式 (23) 可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{\xi}(t))\leqslant&[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)),\cdots,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h_k(t))]\bar{P}^{-1}\bar{\Omega}'\bar{P}^{-\mathrm{T}}\times\\ &[\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)),\cdots,\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t-h_k(t))]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\bar{\Omega}'=\begin{bmatrix}\bar{A}\bar{P}^{\mathrm{T}}+\bar{P}\bar{A}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}\bar{Q}_i+\varepsilon\bar{E}_{10}\bar{E}_{10}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\bar{P}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{K}\bar{C}\bar{P}^{\mathrm{T}} & \bar{\Omega}_{12}\\ \bar{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{\Omega}_{22}\end{bmatrix}$.

根据 Schur 补引理 $\bar{\Omega}<0$ 等价于 $\bar{\Omega}'<0$, 即 $\dot{V}(\boldsymbol{\xi}(t))<0$, 并且

$$\lambda_1\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|^2-V(\boldsymbol{\xi}_0)\leqslant-\lambda_2\int_0^t\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant-\lambda_2\int_0^t\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|^2\,\mathrm{d}t<0 \tag{25}$$

其中 $\lambda_1=\lambda_{\min}(\bar{P}_{11}^{-1})>0,\lambda_2=-\lambda_{\max}[\bar{P}^{-1}\bar{\Omega}'\bar{P}^{-\mathrm{T}}]>0$. 由不等式 (25) 可得

$$\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}V(\boldsymbol{\xi}_0)>0,\int_0^t\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\lambda_2}V(\boldsymbol{\xi}_0)>0 \tag{26}$$

从式 (23) 可以看出

$$\|\bar{E}_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})\|^2\leqslant\|\bar{E}_2\bar{K}\bar{C}\boldsymbol{\xi}(t)\|^2\Rightarrow\|\bar{E}_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta})\|\leqslant\sqrt{\lambda_3}(\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|+\|\boldsymbol{\xi}_2(t)\|) \tag{27}$$

其中 $\lambda_3=\lambda_{\max}[\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{K}^{\mathrm{T}}\bar{E}_2^{\mathrm{T}}\bar{E}_2\bar{K}\bar{C}]\geqslant 0$. 而由式 (21) 第二式可得

$$\|\boldsymbol{\xi}_2(t)\|-\|\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i22}\boldsymbol{\xi}_2(t-h_i(t))\|-\|\sum_{i=1}^{k}\bar{A}_{i21}\boldsymbol{\xi}_1(t-h_i(t))\|-\|\bar{E}_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}(t))\|\leqslant 0 \tag{28}$$

把式 (27) 带入不等式 (28) 中，并考虑式 (19) 与不等式 (26), 则可以得出 $\|\boldsymbol{\xi}_2(t)\|$ 有界；同样，考虑式 (21) 第一式和式 (27) 可以得出 $\|\dot{\boldsymbol{\xi}}_1(t)\|$ 有界；由引理 2 可得 $\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|^2$ 是一致连续的，而由式 (26) 可知 $\int_0^t \|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|^2 \mathrm{d}t$ 有界；由引理 4, 即得 $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{\xi}_1(t)\|=0$. 同理可证 $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{\xi}_2(t)\|=0$. 由定义 2 可知，系统 (21) 是稳定的.　　证毕.

4 鲁棒控制设计

如果 $\boldsymbol{w}(t)$ 的维数 $p<n$, 用 $\hat{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\underbrace{0\cdots0}_{n-p}]$ 代替 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)$. 这样 $\boldsymbol{w}(t)\in R^n$, 相应的系数矩阵进行同样的扩维运算，使得 B_{10}, D_{10}, $\triangle B_{10}$, $\triangle D_{10}\in R^{n\times n}$. 通过这样的变换之后, 对于不确定 Lurie 时滞奇异系统 $\Sigma_\triangle$, 在线性状态反馈控制律 $\Upsilon:\boldsymbol{u}(t)=\Lambda\boldsymbol{x}(t), \Lambda\in R^{m\times n}$ 的作用下，闭环系统写成如下的形式：

$$
\begin{aligned}
E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=&(A_{0\triangle}+B_{20\triangle}\Lambda)\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{k}A_{i\triangle}\boldsymbol{x}(t-h_i(t))+\\
&\sum_{i=1}^{k}B_{2i\triangle}\Lambda\boldsymbol{x}(t-g_i(t))+E_{10}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(t))+B_{10\triangle}\boldsymbol{w}(t)
\end{aligned}\tag{29}
$$

$$
\boldsymbol{z}(t)=(C_{10\triangle}+D_{20\triangle}\Lambda)\boldsymbol{x}(t)\sum_{i=1}^{k}C_{1i\triangle}\boldsymbol{x}(t-h_i(t))+D_{10\triangle}\boldsymbol{w}(t)+\sum_{i=1}^{k}D_{2i\triangle}\Lambda\boldsymbol{x}(t-g_i(t))\tag{30}
$$

定理 2. 闭环系统 (29) 和 (30) 是鲁棒稳定的，且在零初值条件下 ($\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)=0$, $t\in[-\tau,0]$), 闭环系统输出满足鲁棒 H_∞ 范数约束条件 (9), 如果对于给定的 $\delta>0$, 存在对称正定阵 $Q_{1i}>0$, $Q_{2i}>0(i=1\cdots k)$ 和矩阵 P, 以及标量 $\varepsilon>0,\theta>0$ 满足 $EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,

$$
\Omega''=\left[\begin{array}{c|c|c}
\left[\begin{array}{cccccc}
\Omega_{11}' & \Omega_{12} & \Omega_{13} & B_{10}P^{\mathrm{T}} & \Omega_{15} & PC^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\\
\Omega_{12}^{\mathrm{T}} & \Omega_{22}' & 0 & 0 & \Omega_{25} & 0\\
\Omega_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & \Omega_{33} & \Omega_{35} & 0 & \\
PB_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \Omega_{45} & 0\\
\Omega_{15}^{\mathrm{T}} & \Omega_{25}^{\mathrm{T}} & \Omega_{35}^{\mathrm{T}} & \Omega_{45}^{\mathrm{T}} & -I & 0\\
KCP^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I
\end{array}\right] & \Omega_1 & \Omega_2^{\mathrm{T}}\\
\hline
\Omega_{13}^{\mathrm{T}} & -\theta^{-1}I & \\
\hline
\Omega_2 & & -\theta I
\end{array}\right]<0\tag{31}
$$

其中 $\Omega_{11}'=(A_0+B_{20}\Lambda)P^{\mathrm{T}}+P(A_0+B_{20}\Lambda)^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}Q_{1i}+\sum_{i=1}^{k}Q_{2i}+\varepsilon E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}}$,

$\Omega_{12}=[A_1P^{\mathrm{T}}\cdots A_kP^{\mathrm{T}}]$, $\Omega_{13}=[B_{21}\Lambda P^{\mathrm{T}}\cdots B_{2k}\Lambda P^{\mathrm{T}}]$,

$\Omega_{22}=-\mathrm{diag}\{(1-h_1)Q_{11},(1-h_2)Q_{12},\cdots,(1-h_k)Q_{1k}\}$,

$\Omega_{33}=-\mathrm{diag}\{(1-g_1)Q_{21},(1-g_2)Q_{22},\cdots,(1-g_k)Q_{2k}\}$,

$\Omega_{15}^{\mathrm{T}}=(C_{10}+D_{20}\Lambda)P^{\mathrm{T}}$, $\Omega_{25}^{\mathrm{T}}=[C_{11}P^{\mathrm{T}}\quad C_{12}P^{\mathrm{T}}\cdots C_{1k}P^{\mathrm{T}}]$,

$$\Omega_{35}^{\mathrm{T}}=[D_{21}\Lambda P^{\mathrm{T}}\quad D_{22}\Lambda P^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad D_{2k}\Lambda P^{\mathrm{T}}],\ \Omega_{45}^{\mathrm{T}}=D_{10}P^{\mathrm{T}},$$

$$\Omega_{1}^{\mathrm{T}}=[G_{11}^{\mathrm{T}}\quad \underbrace{0\cdots0}_{2k}\quad 0\quad G_{21}^{\mathrm{T}}\quad 0],\ \Omega_{2}=[(H_{11}+H_{14}\Lambda)P^{\mathrm{T}}\quad H_{121}P^{\mathrm{T}}\quad\cdots$$

$$H_{12k}P^{\mathrm{T}}\quad H_{151}\Lambda P^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad H_{15k}\Lambda P^{\mathrm{T}}\quad H_{13}P^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad 0]$$

证明. 类似于定理 1 的证明，并参考文献 [13] 和 [14] 中的 H_∞ 控制问题的证明.

从定理 1 的证明可知，存在两个可逆矩阵 L_1,L_2，使得 $\bar{P}=L_1PL_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ 0 & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}$，其中 $\bar{P}_{11}=\bar{P}_{11}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, $\bar{P}_{12}\in R^{r\times(n-r)}$, $\bar{P}_{22}\in R^{(n-r)\times(n-r)}$. 另一方面，为简化起见，引入矩阵 $\Phi\in R^{n\times(n-r)}$，满足 $E\Phi=0$, $rank\Phi=n-r$，则存在一个可逆矩阵 $\Gamma\in R^{(n-r)\times(n-r)}$ 使得 $\Phi=L_2\begin{bmatrix}0\\ I_{n-r}\end{bmatrix}\Gamma$. 因此，我们有 $P=L_1^{-1}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ 0 & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}L_2^{\mathrm{T}}=(L_1^{-1}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}L_2^{-1})(L_2\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}L_2^{\mathrm{T}})+(L_1^{-1}\begin{bmatrix}\bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{22}\end{bmatrix}\Gamma^{-\mathrm{T}})(\Gamma^{\mathrm{T}}[0\quad I_{n-r}]L_2^{\mathrm{T}})=EX+Y\Phi^{\mathrm{T}}$. 其中 $X=L_2\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}L_2^{\mathrm{T}}>0, Y=L_1^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{22}\end{bmatrix}\Gamma^{-\mathrm{T}}$，且 $EP^{\mathrm{T}}=E(EX+Y\Phi^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=EXE^{\mathrm{T}}=(EX+Y\Phi^{\mathrm{T}})E^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0$.

定义 $\Psi=\Lambda(EX+Y\Phi^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\triangleq\Lambda Z^{\mathrm{T}}(X,Y)$. 不失一般性，假定 $Z(X,y)=EX+Y\Phi^{\mathrm{T}}$ 是可逆的，这时 $\boldsymbol{u}(t)=\Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)\boldsymbol{x}(t)$. 把不等式 (31) 中的矩阵 P 用 $Z(X,Y)$ 代替，ΛP^{T} 用 Ψ 代替. 从上面的分析及定理 2, 不难得出如下的定理，它解决了用 LMI 技术求解 H_∞ 状态反馈控制器的问题.

定理 3. 闭环系统 (29) 和 (30) 是鲁棒稳定的，且在零初值条件下 ($\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)=0$, $t\in[-\tau,0]$), 闭环系统输出满足鲁棒 H_∞ 范数约束条件 (9), 如果对于给定的 $\gamma>0$, 存在对称正定阵 $Q_{1i}>0$, $Q_{2i}>0(i=1\cdots k)$ 和对称正定阵 $X>0$, 矩阵 Y, Ψ, 以及标量 $\varepsilon>0$, $\theta>0$ 满足

$$\begin{bmatrix}
\Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & B_{10}Z^{\mathrm{T}} & \Theta_{15} & ZK^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & G_{11} & \Theta_{18}\\
\Theta_{12}^{\mathrm{T}} & \Theta_{22} & 0 & 0 & \Theta_{25} & 0 & 0 & \Theta_{28}\\
\Theta_{13}^{\mathrm{T}} & 0 & \Theta_{33} & 0 & \Theta_{35} & 0 & 0 & \Theta_{38}\\
ZB_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I & ZD_{10}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & ZH_{13}^{\mathrm{T}}\\
\Theta_{15}^{\mathrm{T}} & \Theta_{25}^{\mathrm{T}} & \Theta_{25}^{\mathrm{T}} & D_{10}Z^{\mathrm{T}} & -I & 0 & G_{21} & 0\\
CKZ^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0\\
G_{11}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & G_{21}^{\mathrm{T}} & 0 & -\theta^{-1} & 0\\
\Theta_{18}^{\mathrm{T}} & \Theta_{28}^{\mathrm{T}} & \Theta_{38}^{\mathrm{T}} & H_{13}Z^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\theta I
\end{bmatrix}<0 \tag{32}$$

其中 $Z=Z(X,Y)=EX+Y\Theta^{\mathrm{T}}$, 且

$$\Theta_{11}=A_0Z^{\mathrm{T}}+ZA_0^{\mathrm{T}}+B_{20}\Psi^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}Q_{1i}+\sum_{i=1}^{k}Q_{2i}+\varepsilon E_{10}E_{10}^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_{12}=[A_1Z^{\mathrm{T}}\cdots A_kZ^{\mathrm{T}}],\ \Theta_{13}=[B_{21}\Psi\cdots B_{2k}\Psi],\ \Theta_{15}=ZC_{10}^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}B_{20}^{\mathrm{T}},$$

$$\Theta_{18}=ZH_{11}^{\mathrm{T}}+\Psi^{\mathrm{T}}H_{14}^{\mathrm{T}},\ \Theta_{22}=-\mathrm{diag}\{(1-h_1)Q_{11},\cdots,(1-h_k)Q_{1k}\},$$

$$\Theta_{33}=-\mathrm{diag}\{(1-g_1)Q_{21},\cdots,(1-g_k)Q_{2k}\},\ \Theta_{25}^{\mathrm{T}}=[C_{11}Z^{\mathrm{T}}\cdots C_{1k}Z^{\mathrm{T}}],$$

$$\Theta_{35}^{\mathrm{T}}=[D_{21}\Psi\cdots D_{2k}\Psi],\ \Theta_{28}^{\mathrm{T}}=[H_{121}Z^{\mathrm{T}}\cdots H_{12k}Z^{\mathrm{T}}],\ \Theta_{38}^{\mathrm{T}}=[H_{151}\Psi\cdots H_{15}\Psi]$$

此时鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器为 $\Upsilon:\boldsymbol{u}(t)=\Psi Z^{-\mathrm{T}}(X,Y)\boldsymbol{x}(t)$.

注 1. 时滞上界 $h_1,\cdots,h_k,g_1,\cdots,g_k$ 可通过折半搜索不断地迭代计算得到，即按照折半原则，反复寻找线性矩阵不等式 (32) 的可行解存在的时滞区间，可使 $h_1,\cdots,h_k$，$g_1,\cdots,g_k$ 按任意精度收敛到时滞上界.

References

1 Dai L. Singular Control Systems. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989

2 Masubuchi I, Y Kamitane. H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. *Aotomatica*, 1997, **33**(2): 669~673

3 Newcomb R, Dziurla B. Some circuits and systems applications of semistate theory. *J. Circuits Systems Signal Process*, 1989, **8**(9): 253~259

4 Shi P, Dragan V. Asymptotic control of singular perturbed systems with parametric uncertainties. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, **44**(9): 1738~1742

5 Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J. Master-slave synchronization of Lur'e systems with time-delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, **11**(7): 1707~1722

6 Fang C H, Lee L, Chang F R. Robust control analysis and design for discrete-time Singular Systems. *Automatica*, 1994, **30**(7) 1741~1750

7 Xu S, Lam J, Zhang L. Robust D-stability analysis for uncertain discrete singular systems with state delay. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 2002, **49**(3): 551~555

8 Xu S, Lam J, Yang C. Robust control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty. *Dyna. Continuous, Discrete, Impul. Syst*, 2002, **11**(3): 497~506

9 Xu S, Dooren P V, Lam J. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2002, **47**(6): 1122~1128

10 Shi P, Boukas E, Agarwal R K. Robust control of singular continuous-time systems with delays and uncertainties. *IEE Proc. Decision and Control*, **21**(8): 1515~1520

11 Kulkarni V V, Safonov M G. Incremental positivity nonpreservation by stability multipliers. *IEEE Trans. Autom. Control*, **47**(1) 173~177

12 Cgaoui B S, Feron E E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: SIAM, Apr., 1994. 225~236

13 Su H Y, Wang J C, Chu J. Memoryless robust stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems. Acta Automatica Sinica, 1998, **24**(4): 497~502 (in Chinese)

14 Wang J C, Su H Y, Chu J. Robust controller design for uncertain linear systems with delayed state and control. Acta Automatica Sinica, 1998, **24**(4): 566~570 (in Chinese)

鲁仁全　浙江大学先进控制研究所博士生. 研究领域为鲁棒控制、奇异系统的控制等

(**LU Ren-Quan** Ph.D candidate in institute of advanced process control, Zhejiang university. His research interests include robust control and singular system control.)

苏宏业　1995 年获浙江大学工学博士，现为浙大先进控制研究所教授，博士生导师. 研究领域为时滞系统的控制、鲁棒控制、非线性控制等.

(**SU Hong-Ye** Received his Ph.D. degree from Zhejiang university in 1995, and is now a professor and director in institute of advanced process control, Zhejiang university. His research interests include time-delay system control, robust control and nonlinear control.)

褚　健　1989 年获日本京都大学工学博士，现为浙大先进控制研究所教授，博士生导师，所长. 主要研究方向为时滞系统的控制、CIPS、先进过程控制等.

(**CHU Jian** Received his Ph. D. degree from JingDou university of Japan, in 1995, and is now a professor, director and head of institute of advanced process control, Zhejiang university. His research interests include time-delay system control, CIPS and advanced process control.)