随机 Marino-Tomei 系统的输出反馈鲁棒自适应跟踪[1)]

季海波 陈志福 奚宏生 王 俊

(中国科学技术大学自动化系 合肥 230027)

(E-mail: jihb@ustc. edu. cn)

摘 要 研究了一类 Marino-Tomei 非线性模型在不确定噪声干扰下的输出反馈鲁棒自适应跟踪问题. 通过滤波变换, 采用随机控制 Lyapunov 设计方法, 对于受方差未知的 Wiener 噪声干扰的 Marino-Tomei 非线性系统, 给出了参数自适应律和控制律, 使得闭环系统成为噪声——状态稳定的, 并且跟踪误差的 4 次均方值在时间平均意义下收敛到一个足够小的区域内.

关键词 随机稳定性, 扰动抑制, 自适应跟踪

中图分类号 TP13

Robust Adaptive Output-Feedback Tracking of Stochastic Marino-Tomei Systems

JI Hai-Bo[1,2] CHEN Zhi-Fu[1] XI Hong-Sheng[1] WANG Jun[1]

(*Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027)[1]

(E-mail: jihb@ustc. edu. cn)[2]

Abstract The robust adaptive output-feedback tracking problems for a class of Marino-Tomei model disturbed by uncertain noises are studied. A filtered transformation and a stochastic control Lyapunov design method are applied to Marino-Tomei systems driven by Wiener noises of unknown covariance. A parameter adaptive law and a control law are obtained to ensure that the closed-up systems are noise-to-state stable and the tracking error can converge to a small residual set around the origin in the sense of mean quartic value in average.

Key words Stochastic stability, disturbance attenuation, adaptive tracking

1 引言

近年来关于非线性系统的构造性控制设计取得了相当多的成果. 随机非线性系统的控

1) 安徽省自然科学基金(03042302)资助

Supported by Natural Science Foundation of Anhui Province (03042302)

收稿日期 2002-12-02 收修改稿日期 2003-12-31

Received December 2, 2002; in revised form December 31, 2003

制问题也逐渐引起了一些学者的注意[1~4]. 在这些随机控制的研究中假定了外界干扰噪声是 Wiener 过程，系统对象以 Itô 随机微分方程描述. 相比于传统的假定外界扰动为有界扰动或理想化的白噪声，Wiener 噪声更接近于现实，因此研究这样的随机非线性系统具有实际意义. 与确定性系统的 Lyapunov 分析不同的是，随机系统的 Itô 微分除了一阶梯度项外还出现了二阶 Hessian 函数矩阵项，这常常是研究 Wiener 随机控制系统的一个主要难点. Florchinger[2]对随机控制 Lyapunov 函数作了一般讨论，并给出了 Sontag 一般镇定公式的随机形式. Pan 和 Basar[4]讨论了具有风险敏感指标的最优控制问题，文中采用了函数加权 2 次型的控制 Lyapunov 函数，研究了一类严格反馈形式的随机非线性系统的依概率渐近镇定问题. Krstić 和 Deng[1,3]采用了 4 次型的控制 Lyapunov 函数和 backstepping 设计途径，研究了随机严格反馈系统的镇定、扰动抑制问题，并提出了随机逆优化的设计方法. 文[5]讨论了参数严格反馈系统的具有随机扰动抑制的鲁棒自适应跟踪.

在确定性非线性控制系统研究中，除了严格反馈形式的非线性模型之外，Marino 和 Tomei 提出了一类含未知参数之输出反馈规范形式的非线性模型[6]，并给出了哪些非线性系统可以变换成这种规范形式的几何条件. 该模型表达了可输出反馈全局镇定的一类非线性模型[7]. Marino 和 Tomei 首先提出滤波变换[6]的思想，并获得输出反馈自适应控制方案. Krstić[8]采用一种改进的滤波变换和参数调整函数(tuning function)方法研究了 Marino-Tomei 模型的输出反馈自适应跟踪.

本文讨论 Marino-Tomei 模型在受外部的未知方差 Wiener 噪声干扰下的自适应跟踪问题. 由于系统中存在不确定随机扰动，通常难以达到渐近跟踪的目标，取而代之这里采用扰动抑制跟踪. 我们将引入 Krstić 滤波变换和随机控制 Lyapunov 方法，采用自适应扰动抑制的控制方式，实现对任意给定有界信号的鲁棒自适应跟踪，并确保跟踪误差在概率意义下收敛到足够小的范围内.

记号：$\mathbb{R}$表示实数集，$\mathbb{R}^n$表示 n 维实向量空间. $|\cdot|$与$|\cdot|_4$ 分别表示向量或矩阵的 Euclidean 范数(2 范数)和 4 范数，$|\cdot|_P$ 表示向量关于对称正定矩阵 P 的平方加权范数. v^{T} 表示向量或矩阵的转置，$v_{i,j}$表示向量 $\boldsymbol{v}_i$ 的第 j 个分量，$M_{(i)}$ 表示矩阵 M 的第 i 行，M_j 表示矩阵 M 的第 j 列，$y^{(i)}$ 表示 y 的第 i 阶导数.

2　问题描述

考虑如下输出反馈规范形式[6,8]的随机非线性系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = A_c\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\phi}(y)\,\mathrm{d}t + \Phi(y)\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{b}\sigma(y)u\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(y)\,\mathrm{d}w \\ y = \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x} = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & & I_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \varphi_{0,1} \\ \vdots \\ \varphi_{0,n} \end{bmatrix},\quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1,n} & \cdots & \varphi_{m,n} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{C}_c=[1,0,\cdots,0]$；$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$是系统状态，$u\in\mathbb{R}$，$y\in\mathbb{R}$分别是系统的输入和输出；$\boldsymbol{a}=[a_1,\cdots,a_m]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{b}=[0,\cdots,0,b_s,\cdots,b_0]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$是有界未知常参数；函数 $\sigma(y)$，n 维向量值函数 $\phi(y)$ ，$n\times m$ 矩阵值函数 $\Phi(y)$和 $r\times n$ 矩阵值函数 $\boldsymbol{g}(y)=[g_1,\cdots,g_n]$都是光滑的；噪声干扰 w 是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的 r 维相互独立的 Wiener 过程，其中 Ω

为样本空间，$\mathcal{F}$为 σ-代数，P 为概率测度. 记增量 dw 的协方差为$\Delta\Delta^{\mathrm{T}}dt$，即均值 $E\{dw\cdot dw^{\mathrm{T}}\}=\Delta(t)\Delta(t)^{\mathrm{T}}dt$，其中函数矩阵 $\Delta(t)$是有界但不确定的.

控制目标是使得输出 y 跟踪一个给定的有界参考信号 $y_r(t)$，并保持闭环系统的其它信号都有界. 为了研究方便，需要如下假设.

假设 1. $\sigma(y)\neq 0$，$\forall\, y\in\mathbb{R}$，系统(1)的相对阶为$\rho=n-s$.

假设 2. $B(\lambda)=b_s\lambda^s+\cdots+b_1\lambda+b_0$ 是 Hurwitz 多项式，$b_s\neq 0$ 的符号 $\mathrm{sign}(b_s)$已知.

假设 3. 参考信号 $y_r(t)$及它的前ρ阶导数已知并有界，$y_r^{\rho}(t)$连续.

假设 4. 矩阵值函数 $g(y)$有界，即$|g(y)|\leqslant G$，$\forall\, y\in\mathbb{R}$，其中 G 是正常数.

为了研究系统(1)，我们先考查如下的随机微分系统[3]

$$d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x},t)dt + g(\boldsymbol{x},t)dw \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，Wiener 噪声 w 如在系统(1)所述，函数 f: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$和 g: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times r}$是光滑的.

根据 Itô 随机微分，一个 2 阶连续可微函数 $V(x,t)$沿随机系统(2)的变化率(又称 infinitesimal generator)为

$$\mathcal{L}V := \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\Delta^{\mathrm{T}}g^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}g\Delta\right\}$$

这里 Tr 表示矩阵的迹. 与确定性系统的 Lyapunov 函数微分表达式不同的是，式(3)里增加了二阶微分项，这常常给随机系统的 Lyapunov 控制设计带来一定困难.

输入——状态稳定性(ISS)是非线性系统鲁棒稳定性分析与设计的重要工具，文[3]将之推广到随机系统，并引入了噪声——状态稳定性(NSS). 下面将利用噪声——状态稳定性进行鲁棒控制设计.

3 输出反馈设计

先对随机系统(1)做如下滤波变换[8]，其中选择常向量 $\boldsymbol{K}=[k_1,\cdots,k_n]^{\mathrm{T}}$，使得矩阵 $A=A_c-KC_c$ 为 Hurwitz 矩阵.

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{e}_n\sigma(y)u, & \xi\in\mathbb{R}^n\\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = A\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{K}y + \phi(y), & \eta\in\mathbb{R}^n\\ \dot{\Xi} = A\Xi + \Phi(y), & \Xi\in\mathbb{R}^{n\times m}\end{cases}$$

式中 e_k 表示单位矩阵 I_n 的第 k 个列向量.

定义

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_j = A^j\boldsymbol{\xi}, \quad j=0,1,\cdots,s\\ &\boldsymbol{\theta} = [b_s,\cdots,b_0,a_1,\cdots,a_m]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F} = [v_s,\cdots,v_0,\Xi]\\ &\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{F\theta}.\end{aligned}$$

可以看出 $v_{s,i}=v_{s,i}(\xi_1,\cdots,\xi_{s+i})$. 将上式代入到系统方程(1)和滤波变换方程(4)中，并考虑到 $A^j\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_{n-j}$，$1\leqslant j\leqslant n$，且 $\boldsymbol{\theta}$ 是常参数向量，可得

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{v}}_j = A\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{e}_{n-j}\sigma(y)u, \quad j=0,1,\cdots,s\\ &d\boldsymbol{\varepsilon} = A\boldsymbol{\varepsilon}dt + \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}dw.\end{aligned}$$

我们采用 backstepping 递归设计思想，来设计随机系统(1)的扰动抑制自适应控制方案. 以下对$\rho>1$ 来讨论. 因 $b_s\neq 0$，记 $\zeta=1/b_s$，记参数 θ,ζ 的估计值分别为 $\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\zeta}}$，作坐标变换

$$z_1 = y - y_r$$

$$z_i = v_{s,i} - \alpha_{i-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant \rho.$$

以后可看到 $\alpha_{i-1}=\alpha_{i-1}(y,\xi_1,\cdots,\xi_{s+i-1},\eta,\Xi,\hat{\theta},\hat{\zeta},y_r,\dot{y}_r,\cdots,y_r^{(i-1)})$.

记参数估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\tilde{\zeta}=\zeta-\hat{\zeta}$, 设计状态 4 次型和参数误差 2 次型的控制 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\rho} z_i^4 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{|b_s|}{2\gamma}\tilde{\zeta}^2 \tag{6}$$

其中矩阵 Q 为满足 $A^{\mathrm{T}}Q+QA=-I_n$ 的正定对称矩阵.

利用 Itô 随机微分公式，可计算 V 沿随机系统(1)的时间变化率. 根据 Young 不等式[3]、向量和矩阵范数不等式，经过一系列推导，我们得到控制律与参数自适应律

$$\alpha_1 = -\hat{\zeta}\chi - \frac{3}{4}\mathrm{sign}(b_s)\delta_2^{\frac{4}{3}} z_1 \tag{7}$$

$$\alpha_i = -c_i z_i + \pi_i + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}}\Gamma\tau_i - \sum_{j=2}^{i-1} z_j^3 \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}}\Gamma\omega\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} + \gamma\mathrm{sign}(b_s)\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\zeta}}\chi z_1^3$$
$$- e_{i,2}\hat{b}_s\frac{\mathrm{sign}(b_s)}{4\delta_2^4} z_2, \; i=2,\cdots,\rho \tag{8}$$

$$u = \frac{1}{\sigma(y)}(\alpha_\rho - v_{s,\rho+1}) \tag{9}$$

$$\dot{\hat{\zeta}} = \gamma\mathrm{sign}(b_s)\chi z_1^3 \tag{10}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \Gamma\tau_\rho \tag{11}$$

$$\chi = c_1 z_1 + \omega_0 + \boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \dot{y}_r + \frac{3}{4}\delta_1^{\frac{4}{3}} z_1 + \frac{3}{4}\delta_6^2 z_1 (g_1^{\mathrm{T}} g_1)^2$$

$$\pi_i = k_i v_{s,1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}(\omega_0 + \omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta}) - \left(\frac{3}{4}\delta_{3,i}^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4\delta_{3,i-1}^4}\right) z_i - \frac{3}{4}\delta_{4,i}^{\frac{4}{3}} z_i\left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$- \frac{1}{4} z_i^3 \delta_{5,i}^2\left(\frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial y^2}\right)^2 (g_1^{\mathrm{T}} g_1)^2 - \frac{3}{4}\delta_{7,i}^2 z_i\left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^4 (g_1^{\mathrm{T}} g_1)^2 + \beta_{i-1}$$

$$\omega_0 = \eta_2 + \phi_1, \; \boldsymbol{\omega} = [v_{s,2},\cdots,v_{0,2},\Xi_{(2)} + \Phi_{(1)}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\varpi} = [0, v_{s-1,2},\cdots,v_{0,2},\Xi_{(2)} + \Phi_{(1)}]^{\mathrm{T}}, \quad \chi = \omega_0 + \boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta} + b_s(z_2 + \alpha_1) + \varepsilon_2$$

$$\beta_{i-1} = \sum_{j=1}^{s+i-1}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \xi_j}(\xi_{j+1} - k_j\xi_1) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta}(A\eta + Ky + \phi) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \Xi}(A\Xi + \Phi)$$
$$+ \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} y_r^{(j)}, \; 2 \leqslant i \leqslant \rho.$$

式中 $\delta_{3,1}=\infty$, $\delta_{3,\rho}=0$, 其余的 $\delta_{i,j}>0$, $c_i>0$, 它们均为控制设计中可选择的参数. 参数调整函数(tuning function)为

$$\tau_1 = \boldsymbol{\omega} z_1^3, \; \tau_2 = \tau_1 + \frac{\mathrm{sign}(b_s)}{4\delta_2^4} z_2^4 e_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} z_2^3 \boldsymbol{\omega}$$

$$\tau_i = \tau_{i-1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y} z_i^3 \boldsymbol{\omega}, \quad i = 3,\cdots,\rho.$$

如果参数估计偏差有界

$$|\tilde{\theta}|_4 \leqslant M, \quad |\tilde{\zeta}|_4 \leqslant N \tag{12}$$

式中 $M>0, N>0$，则有如下定理.

定理 1. 随机非线性系统(1)在滤波变换(4)，控制律(7)～(9)和参数自适应律(11)、(10)的作用下，如果参数估计偏差是有界的，那么闭环系统获得具有扰动抑制的自适应跟踪，并且跟踪误差的 4 次均方值在时间平均意义下可以充分小.

证明. 略

我们可以利用参数投影关系[5,8]确保参数估计的有界性，使得定理 1 的条件(12)可以满足.

4 结论

本文针对一类输出反馈规范形式的随机 Marino-Tomei 系统，在含有未知参数及不确定方差的 Wiener 噪声干扰的情况下，通过引入滤波变换，设计 4 次随机控制 Lyapunov 函数，利用递归设计方法获得了对任意给定有界信号的依概率噪声——状态稳定的自适应跟踪. 控制方案有效地抑制了不确定噪声的影响，使得跟踪误差的 4 次均方值在时间平均意义下收敛到一个可调整的小范围内.

References

1 Deng H, Krstić M, Williams R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(8):1237～1253

2 Florchinger P. A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 1993, **11**(2):155～162

3 Krstić M, Deng H. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London: Springer-Verlag, 1998

4 Pan Z, Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion. In: Proceedings of 1997 American Control Conference, Albuquerque: NM, 1278～1282

5 Ji Hai-Bo, Xi Hong-Sheng, Chen Zhi-Fu, Wang Jun. Robust adaptive tracking of stochastic nonlinear systems with uncertain noises. *Control Theory & Applications*, 2003, **20**(6): 843～848 (in Chinese)

6 Marino R, Tomei P. Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(8):1239～1245

7 Mazenc F, Praly L, Dayawansa W P. Global stabilization by output feedback: Examples and counterexamples. *Systems and Control Letters*, 1994, **23**(2):119～125

8 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995

季海波 中国科技大学自动化系教授. 主要从事于非线性系统的分析、计算与控制、鲁棒自适应控制等方面的研究.

(**JI Hai-Bo** Professor in the Department of Automation at University of Science and Technology of China. His research interests include nonlinear systems and their analysis, computation and control, robust, and adaptive control.)

陈志福 中国科技大学自动化系硕士研究生.

(**CHEN Zhi-Fu** Master student in the Department of Automation at University of Science and Technology of China.)

奚宏生 中国科技大学自动化系教授. 主要从事于随机控制、鲁棒控制、离散事件系统等方面的研究.

(**XI Hong-Sheng** Professor in the Department of Automation at University of Science and Technology of China. His research interests include stochastic control, robust control, and discrete event systems.)

王 俊 中国科技大学自动化系副教授、博士研究生.

(**WANG Jun** Associate professor and Ph. D. degree candidate in the Department of Automation at University of Science and Technology of China.)