第 30 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 30, No. 5
2004 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 2004

非线性奇异系统的能控性子分布[1)]

王文涛[1,2] 刘晓平[1] 赵 军[1]
[1](东北大学信息科学与工程学院控制科学研究所 沈阳 110006)
[2](沈阳工业大学理学院 沈阳 110023)
(E-mail: wwtlxy@163.com)

摘 要 研究非线性奇异控制系统的能控性子分布问题.提出了非线性奇异系统的能控性子分布的概念;研究了非线性奇异系统能控性子分布的反馈不变性质;给出了非线性奇异系统能控性子分布的算法,并讨论这个算法的一些性质;证明了在一定条件下,该算法给出的分布确为包含在某给定分布中的非线性奇异系统的最大能控性子分布.

关键词 非线性系统,奇异系统,能控不变分布,能控性子分布
中图分类号 TP271

Controllability Distributions of Nonlinear Singular Systems

WANG Wen-Tao[1,2] LIU Xiao-Ping[1] ZHAO Jun[1]
[1](*College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110004)
[2](*College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang* 110023)
(E-mail: wwtlxy@163.com)

Abstract The controllability distribution problem of nonlinear singular control systems is studied. The concept of controllability distribution is introduced for nonlinear singular control systems, and the feedback invariant properties of this controllability distribution are discussed. The algorithm of controllability distribution of nonlinear singular systems is developed, and the properties of this algorithm are discussed. Under certain conditions, the controllability distributions developed by this algorithm are exactly the maximal controllability distribution of nonlinear singular systems contained in the given distribution.

Key words Nonlinear systems, singular systems, controlled invariant distributions, controllability distributions

1 引言

自 20 世纪 70 年代以来,奇异系统(广义系统、微分代数系统)的研究受到众多学者的关

1) 国家自然科学基金(69974007,60274009)资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(69974007,60274009)
收稿日期 2002-07-15 收修改稿日期 2003-03-28
Received July 15, 2002; in revised form March 28, 2003

注. 人们已经发现许多实际系统，如经济系统、机器人系统、受限机械系统、化工过程和电力系统等都是奇异系统[1~4]，而且，围绕线性定常奇异系统，已形成了与线性系统理论相平行的理论体系，包括可解性、稳定性、能控性、能观性、观测器设计、解耦控制等[5,6]. 对于线性时变奇异系统也取得了相当的成就[7]. 但是，非线性奇异系统的研究进展缓慢，只是在系统的可解性及数值解等方面作些工作. 近十年，受非线性系统微分几何理论的推动，非线性奇异系统的研究取得一些进展. 主要包括完全线性化、输入输出解耦、干扰解耦、输出跟踪、反馈稳定化等[8~10]. 但是，非线性系统微分几何理论的核心一分布的理论在非线性奇异系统研究中的作用并不明显，其应用受到一定的限制. 本文在这方面作些探讨.

在线性系统理论中我们知道，能控性子空间的理论在线性系统的能控性分解过程中起着重要的作用. 在非线性系统微分几何理论中，能控性子分布的理论在系统的能控性分解过程中起着同样的作用[11]. 本文将能控性子分布概念和理论推广到非线性奇异系统.

2　问题描述

对于仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \tag{1}$$

设(α,β)为反馈律，β为可逆C^∞函数矩阵，记

$$\begin{cases} \tilde{f} = f + g\alpha \\ (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m) = (g_1, g_2, \cdots, g_m)\beta \end{cases} \tag{2}$$

设Λ为$\{1,2,\cdots,m\}$的一个子集，记

$$\tilde{g}^{\Lambda} = \{\tilde{g}_i \mid i \in \Lambda\}$$

系统(1)的能控性子分布定义为

$$R = \langle \tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m \mid \tilde{g}^{\Lambda} \rangle$$

即，R为包含$\tilde{g}^{\Lambda}$且对$\tilde{f}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \cdots, \tilde{g}_m$不变的最小分布.

考虑非线性仿射奇异系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + p_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + g_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + p_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + g_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in R^n$为可微分变量，$\boldsymbol{z} \in R^s$为代数变量，$\boldsymbol{u} \in R^m$为输入变量，$f_1(\boldsymbol{x})$与$f_2(\boldsymbol{x})$分别为n维和s维光滑的向量函数，$p_i(\boldsymbol{x})$和$g_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,2$，为有适当维数的矩阵值函数.

考虑状态反馈

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + \beta(x)\boldsymbol{v} + \gamma(x)\boldsymbol{z} \tag{4}$$

其中，$\beta(x)$为邻域U内的非奇异矩阵. 对系统(3)施加反馈(4)，得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + g_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + [p_1(\boldsymbol{x}) + g_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{z} + g_1(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + g_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) + [p_2(\boldsymbol{x}) + g_2(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{z} + g_2(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{5}$$

记

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + g_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{p}_1(\boldsymbol{x}) = p_1(\boldsymbol{x}) + g_1(\boldsymbol{x})\gamma(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{g}_1(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

定义 1. 如果存在反馈律(α,β,γ)及子集$\Lambda\subset(1,2,\cdots,m)$，使得

$$R=\langle\tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}\mid\tilde{g}_1^{\Lambda}\rangle$$

即，R为包含$\tilde{g}_1^{\Lambda}$且对$\tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}$不变的最小分布，则称$R$为非线性奇异系统(3)的一个能控性子分布. 如果反馈律(α,β,γ)只定义于点x^0的某邻域U内，则称R为该系统在U上的一个局部能控性子分布.

由定义及文献[12]可知道，如果R是系统(3)的能控性子分布，则R也是系统(3)的能控不变分布. 再由文献[11]的引理 2.30 知道，如果R是系统(3)的能控性子分布，并且R在某一点$x^0\in U$非奇异，则R在x^0点对合.

3 能控性子分布算法

在这一节我们将给出非线性系统(3)的能控性子分布的算法. 在控制问题中，一般要讨论包含在某一分布Δ里的最大的能控性子分布. 设分布Δ给定，我们给出以下算法：

$$\begin{cases}\Delta_0=\Delta\cap G_1\\ \Delta_k=\Delta\cap\left([f_1,\Delta_{k-1}]+\sum_{i=1}^{s}[p_{1i},\Delta_{k-1}]+\sum_{j=1}^{m}[g_{1j},\Delta_{k-1}]+G_1\right)\quad k\geqslant 1\end{cases}\tag{7}$$

由算法(7)可得.

引理 1. Δ_i是一个单调增加的分布序列. 如果存在整数k^*，使得$\Delta_{k^*+1}=\Delta_{k^*}$，则对于一切$k\geqslant k^*$，有$\Delta_k=\Delta_{k^*}$.

证明. 需要证明$\Delta_k\supset\Delta_{k-1}$. 显然，$k=1$时成立，设对某整数$k$，有$\Delta_k\supset\Delta_{k-1}$，则

$$\left([f_1,\Delta_k]+\sum_{i=1}^{s}[p_{1i},\Delta_k]+\sum_{j=1}^{m}[g_{1j},\Delta_k]\right)\supset\left([f_1,\Delta_{k-1}]+\sum_{i=1}^{s}[p_{1i},\Delta_{k-1}]+\sum_{j=1}^{m}[g_{1j},\Delta_{k-1}]\right)$$

因此，得$\Delta_{k+1}\supset\Delta_k$. 证毕.

下面的引理指出算法(7)给出的分布序列具有反馈不变性.

引理 2. 算法(7)所产生的分布序列与反馈无关，即，设$\tilde{f}_1,\tilde{p}_{1i},\tilde{g}_{1j}$，$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,m$由任意一组反馈$(\alpha,\beta,\gamma)$依式(7)给出，令

$$\begin{cases}\tilde{\Delta}_0=\Delta\cap G_1\\ \tilde{\Delta}_k=\Delta\cap\left([\tilde{f}_1,\tilde{\Delta}_{k-1}]+\sum_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i},\tilde{\Delta}_{k-1}]+\sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j},\tilde{\Delta}_{k-1}]+G_1\right)\quad k\geqslant 1\end{cases}$$

则$\tilde{\Delta}_k=\Delta_k$，$k=0,1,2,\cdots$.

证明. 先证明$\tilde{\Delta}_k\subset\Delta_k$，$k=0,1,2,\cdots$. 当$k=0$时，显然成立. 设$\tilde{\Delta}_k\subset\Delta_k$，于是

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{k+1}=&\Delta\cap\left([\tilde{f}_1,\tilde{\Delta}_k]+\sum_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i},\tilde{\Delta}_k]+\sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j},\tilde{\Delta}_1]+G_1\right)\subset\\ &\Delta\cap\left([\tilde{f}_1,\Delta_k]+\sum_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i},\Delta_k]+\sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j},\Delta_1]+G_1\right)=\\ &\Delta\cap\left([f_1+g_1\alpha,\Delta_k]+\sum_{i=1}^{s}[(p_1+g_1\gamma)_i,\Delta_k]+\sum_{j=1}^{m}[(g_1\beta)_j,\Delta_1]+G_1\right)\end{aligned}$$

现设$\tau\in\Delta_k$为Δ_k中的任一向量场，有

$$[f_1+g_1\alpha,\tau]=[f_1,\tau]+\sum_{j=1}^{m}([g_{1j},\tau]\alpha_j-(L_\tau\alpha_j)g_{1j})$$

$$[(p_1+g_1\gamma)_i,\tau]=[p_{1i},\tau]+\sum_{l=1}^{m}([g_{1l},\tau]\gamma_{li}-(L_\tau\gamma_{li})g_{1l})$$

$$[(g_1\beta)_j,\tau]=\sum_{l=1}^{m}([g_{1l},\tau]\beta_{lj}-(L_\tau\beta_{lj})g_{1l})$$

因此，得

$$\tilde{\Delta}_{k+1}\subset\Delta\cap([f_1+g_1\alpha,\Delta_k]+\sum_{i=1}^{s}[(p_1+g_1\gamma)_i,\Delta_k]+\sum_{j=1}^{m}[(g_1\beta)_j,\Delta_1]+G_1)\subset$$

$$\Delta\cap([f_1,\Delta_k]+\sum_{i=1}^{s}[p_{1i},\Delta_k]+\sum_{j=1}^{m}[g_{1j},\Delta\ ]+G_1)=\Delta_{k+1}$$

又由于 β 可逆，可得 $f_1=\tilde{f}_1-\tilde{g}_1\beta^{-1}\alpha$，$p_1=\tilde{p}_1-\tilde{g}_1\beta^{-1}\gamma$ 和 $g_1=\tilde{g}_1\beta^{-1}$，由此可证明反包含关系 $\tilde{\Delta}_k\supset\Delta_k$，因此，$\tilde{\Delta}_k=\Delta_k$. 证毕.

4 最大能控性子分布

下面证明，在一定的条件下，由算法(7)所得到的 Δ_{k^*} 就是包含在 Δ 中的最大的局部能控性子分布. 为此，需要建立

$$S(\Delta)=(\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_n+\cdots)$$

如果存在整数 k^* 使得 $\Delta_{k^*+1}=\Delta_{k^*}$，则称 $S(\Delta)$ 是可有限生成的. 如果 $S(\Delta)$ 是可有限生成的，则 $S(\Delta)=\Delta_{k^*}$.

引理 3. 设 Δ 是一个对合分布，Δ 与 $\Delta\cap G_1$ 非奇异，并且 $S(\Delta)$ 可有限生成，则 Δ 为系统(3)的局部能控性子分布当且仅当

1) Δ 是系统(3)的能控性不变分布；

2) $S(\Delta)=\Delta$.

证明. 必要性. 设 Δ 是系统(3)局部能控性子分布，则 Δ 是系统(3)的能控性不变分布，因此，只需要证明 2)成立即可.

由于 Δ 是局部能控性子分布，故存在反馈(α,β,γ)，使得

$$\Delta=\langle\tilde{f}_1,\tilde{p}_{11},\tilde{p}_{12},\cdots,\tilde{p}_{1s},\tilde{g}_{11},\tilde{g}_{12},\cdots,\tilde{g}_{1m}\mid\tilde{g}_1^{\Delta}\rangle \tag{8}$$

现构造一个新的分布

$$\begin{cases}\bar{\Delta}_0=\Delta\cap G_1\\ \bar{\Delta}_k=[\tilde{f}_1,\bar{\Delta}_{k-1}]+\sum_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i},\bar{\Delta}_{k-1}]+\sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j},\bar{\Delta}_{k-1}]+\Delta_{k-1},\quad k\geqslant 1\end{cases} \tag{9}$$

下面证明

$$\bar{\Delta}_k\subset\Delta,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$k=0$ 时显然成立，设 $\bar{\Delta}_k\subset\Delta$，由式(8)可知，$\Delta$ 是$\tilde{f}_1$，$\tilde{p}_{1i}$，$\tilde{g}_{1j}$的不变分布，因此

$$[\tilde{f}_1,\bar{\Delta}_k]\subset[\tilde{f}_1,\Delta_k]\subset\Delta,[\tilde{p}_{1i},\bar{\Delta}_k]\subset[\tilde{p}_{1i},\Delta_k]\subset\Delta\ ,[\tilde{g}_{1j},\bar{\Delta}_k]\subset[\tilde{g}_{1j},\Delta_k]\subset\Delta$$

由(9)得

$$\bar{\Delta}_{k+1} \subset \Delta$$

由引理 2 知道，算法(7)与反馈无关，故可利用上述反馈(α,β,γ)构造算法(7)，即

$$\begin{cases}\Delta_0 = \Delta \cap G_1 \\ \Delta_k = \Delta \cap \left([\tilde{f}_1, \Delta_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i}, \Delta_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j}, \Delta_{k-1}] + \Delta_{k-1}\right), \quad k \geqslant 1\end{cases}$$

因此，得

$$\bar{\Delta}_k = \Delta \cap \bar{\Delta}_k = \Delta_k$$

再由引理 1 可得，存在整数 k^*，使得

$$\bar{\Delta}_{k^*+1} \subset \bar{\Delta}_{k^*}$$

这样，由定义式(9)，得

$$[\tilde{f}_1, \bar{\Delta}_{k^*}] \subset \bar{\Delta}_{k^*+1} = \bar{\Delta}_{k^*}, [\tilde{p}_{1i}, \bar{\Delta}_{k^*}] \subset \bar{\Delta}_{k^*+1} = \bar{\Delta}_{k^*}, [\tilde{g}_{1j}, \bar{\Delta}_{k^*}] \subset \bar{\Delta}_{k^*+1} = \bar{\Delta}_{k^*}$$

因此，

$$\bar{\Delta}_{k^*} \supset \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} | \Delta \cap G_1 \rangle$$

但由定义明显有

$$\bar{\Delta}_k \subset \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} | \Delta \cap G_1 \rangle, \quad i = 0, 1, \cdots$$

因此得

$$\Delta_{k^*} = \bar{\Delta}_{k^*} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} | \Delta \cap G_1 \rangle \tag{10}$$

由于 $\tilde{g}_1^{\Delta} \subset \Delta \cap G_1$ 可得 $\Delta \subset \Delta_{k^*}$. 明显又有 $\Delta \supset \Delta_{k^*}$，因此，得

$$\Delta_{k^*} = \Delta$$

充分性. 由于 Δ 是系统(3)的能控性不变分布，故存在反馈(α,β,γ)使得 $\tilde{f}_1 = f_1 + g_1\alpha$, $\tilde{p}_1 = p_1 + g_1\gamma$, $\tilde{g}_1 = g_1\beta$ 满足

$$[\tilde{f}_1, \Delta] \subset \Delta, \quad [\tilde{p}_{1i}, \Delta] \subset \Delta, \quad [\tilde{g}_{1j}, \Delta] \subset \Delta$$

设 $\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1l}$ 为 $\Delta \cap G_1$ 的一组基，则可在 $\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m}$ 中选出 $m-l$ 个向量场，使其与 $\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1l}$ 共同组成 G_1 的一组基. 因为 $\bar{g}_{1i} \in \Delta$，所以

$$[\bar{g}_{1i}, \Delta] \subset \Delta, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

不失一般性，我们可设

$$\bar{g}_{1i} = \tilde{g}_{1i}, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

作分布序列

$$\begin{cases}\bar{\Delta}_0 = \Delta \cap G_1 \\ \bar{\Delta}_k = [\tilde{f}_1, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s}[\tilde{p}_{1i}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_{1j}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \Delta_{k-1}, \quad k \geqslant 1\end{cases}$$

与必要性中证明类似，可证明

$$\bar{\Delta}_k \subset \Delta$$

由此得

$$\bar{\Delta}_k = \Delta_k$$

因此，存在 k^*，使得 $\bar{\Delta}_{k^*+1} = \bar{\Delta}_{k^*}$，由 $\bar{\Delta}_k$ 的构造可得

$$\bar{\Delta}_{k^*} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{p}_{11}, \tilde{p}_{12}, \cdots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \cdots, \tilde{g}_{1m} | \Delta \cap G_1 \rangle$$

而且

$$\Delta_k = \Delta_{k^*} = \bar{\Delta}_{k^*}$$

证毕.

定理 1. 设 Δ 是系统(3)的一个能控不变分布且对合，Δ 与 $\Delta \cap G_1$ 非奇异，并且 $S(\Delta)$ 可有限生成，则 $S(\Delta)$ 为系统(3)包含在 Δ 中的最大能控性子分布.

证明. 类似于引理 3 中充分性的证明可知，Δ_{k^*} 是系统(3)包含在 Δ 中的一个能控性子分布. 因此，只需要证明 Δ_{k^*} 是包含在 Δ 中的最大能控性子分布即可. 设存在反馈 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ 或 $\bar{f}_1 = f_1 + g_1\alpha$，$\bar{p}_1 = p_1 + g_1\gamma$，$\bar{g}_1 = g_1\beta$，使得

$$D = \langle \bar{f}_1, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \cdots, \bar{p}_{1s}, \bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1m} \mid \bar{g}_1^{\Delta} \rangle$$

为 Δ 中的另一个能控性子分布. 由引理 3 的证明过程可知

$$D = \langle \bar{f}_1, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \cdots, \bar{p}_{1s}, \bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1m} \mid D \cap G_1 \rangle$$

构造分布序列

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_0 = D \cap G_1 \\ \bar{\Delta}_k = [\bar{f}_1, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \bar{\Delta}_0, \quad k \geqslant 1 \end{cases} \tag{11}$$

由此可得

$$\bar{\Delta}_k \subset D \subset \Delta$$

因此

$$\bar{\Delta}_k \subset \Delta \cap \left([\bar{f}_1, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \bar{\Delta}_{k-1}] + \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \bar{\Delta}_{k-1}] + G_1\right)$$

由此可以证明

$$\bar{\Delta}_k \subset \Delta_k, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{12}$$

当 $k=0$ 时，(12) 式显然成立，设 $\bar{\Delta}_k \subset \Delta_k$，可得

$$\bar{\Delta}_{k+1} \subset \Delta \cap \left([\bar{f}_1, \Delta_k] + \sum_{i=1}^{s} [\bar{p}_{1i}, \Delta_k] + \sum_{j=1}^{m} [\bar{g}_{1j}, \Delta_k] + G_1\right) = \Delta_{k+1}$$

根据式(11)及(12)可以得到

$$D = \langle \bar{f}_1, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \cdots, \bar{p}_{1s}, \bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \cdots, \bar{g}_{1m} \mid \bar{g}_1^{\Delta} \rangle =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\Delta}_k \subset \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k = \sum_{k=0}^{k^*} \Delta_k = \Delta_{k^*}$$

即 $S(\Delta)$ 为系统(3)包含在 Δ 中的最大能控性子分布.　　证毕.

5　结论

本文的工作表明，非线性系统的能控性子分布的概念和理论可推广到非线性奇异系统，而且这种推广是直接推广. 因为，当非线性奇异系统退化为非线性系统($s=0$)时，本文中关于非线性奇异系统能控性子分布的所有结论也退化为非线性系统能控性子分布的对应结论.

可以进一步研究的问题有：以能控性子分布为工具，探讨非线性奇异系统的能控性分解问题；探讨算法(7)的有限收敛性等.

References

1 Luenberger D G. Dynamics equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(3): 312～321

2 You L S, Chen B S. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic contrained mechanical systems. *International Journal of Control*, 1993, **58**(4): 587～612

3 Gani R, Cameron I T. Modelling for dynamic simulation of chemical process. *Chemistry Engineering and Society*, 1992, **47**(6): 1311～1313

4 Krishnan H, McClamroch N H. Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems. *Automatica*, 1994, **30**(12): 1885～1897

5 Dai L Y. Strong decoupling in singular systems. *Mathematical Systems Theory*, 1989, **22**(2): 275～289

6 Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations Ⅱ. London, U K: Pitman, 1982

7 Campbell S L, Nichols N, Terrell W J, Duality. Observability and controllability for linear time-varying descriptor systems. *Circuits, Systems, Signal Process*, 1991, **10**(3): 455～470

8 Liu X P, Celikovsky S. Feedback control of affine nonlinear singular control systems. *International Journal of Control*, 1997, **68**(4): 753～774

9 Liu X P. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems. *International Journal of Control*, 1998, **70**(5): 685～702

10 Liu X P. Asymptotic output tracking of nonlinear differential-algebraic control systems. *Automatica*, 1998, **34**(3): 393～397

11 Isidori A. Nonlinear Control Systems. Third Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1995

12 Wang W T, Liu X P, Zhao J. Controlled invariant distributions of nonlinear singular control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, to accept

王文涛 沈阳工业大学理学院教授. 主要研究方向为非线性奇异控制系统的几何理论.

(**WANG Wen-Tao** Professor at Shenyang University of Technology. His research interests include the geometry theory of nonlinear singular control systems.)

刘晓平 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为非线性系统的鲁棒控制, 奇异系统和过程控制.

(**LIU Xiao-Ping** Professor at Northeastern University. His research interests include nonlinear robust control, singular systems, and process control)