

一般双率随机系统状态空间模型及其辨识¹⁾

丁 锋^{1,2} 陈通文² 萧德云¹

¹(清华大学自动化系 北京 100084)

²(加拿大艾尔伯特大学电气与计算机工程系 埃德蒙顿 T6G 2V4)

(E-mail: dingf@mail. tsinghua. edu. cn, fding@ece. ualberta. ca)

摘 要 对于双率采样数据系统,本文使用提升技术,推导了双率系统的提升状态空间模型.对于系统状态可测量的双率系统,利用最小二乘原理辨识提升系统模型的参数矩阵;对于状态不可测的未知参数双率系统,利用递阶辨识原理,提出了双率系统递阶状态空间模型辨识方法,来辨识系统的状态和参数.具体做法:基于获得的状态估计和提升系统的输入输出数据递归估计系统参数,然后基于获得的参数估计,计算系统的状态.

关键词 辨识,参数估计,多率系统,递阶辨识,最小二乘,状态空间模型

中图分类号 TP273

State-Space Modeling and Identification of General Dual-Rate Stochastic Systems

DING Feng^{1,2} CHEN Tong-Wen² XIAO De-Yun¹

¹(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

²(Department of Electrical and Computer Engineering, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2V4)

(E-mail: dingf@mail. tsinghua. edu. cn, fding@ece. ualberta. ca)

Abstract State-space models for dual-rate sampled-data systems are derived using the lifting technique. Furthermore, for cases where states are measurable, lifted system parameter matrices are identified using the least squares principle; for cases where states are unmeasurable, based on the hierarchical identification principle, a hierarchical state-space identification method is presented for estimating the unknown system parameters and states using the lifted dual-rate input-output data.

Key words Identification, parameter estimation, multirate systems, hierarchical identification, least squares, state-space models

1 引言

对于采样时间系统,当控制输入的采样周期(刷新周期)与和输出的采样周期不相等时,

1) 国家自然科学基金(60074029)资助

Supported by National Natural Sciences Foundation of P. R. China(60074029)

收稿日期 2003-01-08 收修改稿日期 2004-02-12

Received January 8, 2003; in revised form February 12, 2004

我们就得到了一个双率系统(dual-rate system);双率系统是一类最简单的多率系统.近 10 余年来,多率系统不仅在石油化工过程控制方面得到了成功应用^[1~4],在理论方面也取得了一系列研究成果,例如多率系统的能控性和能观测性^[5],多率系统的最优控制^[6,7],多率系统鲁棒控制^[8~13],多率系统的自适应控制^[14~16],多率系统的预测控制^[17~21],多率系统的推理控制^[3,4]等等.

然而,我们注意到,以上文献中大多数控制算法都是假设多率系统的参数是已知的,即假设多率系统对应的连续系统参数是已知的,或多率系统对应的单率模型的参数是已知的,或多率系统的状态已知的.虽然在已出版的文献中,Li, Shah, Chen(2001)利用系统的状态和输入输出数据来估计双率系统的参数^[22].然而,实际中要事先知道系统的参数或状态几乎是不可能.就我们所知,一般双率系统状态空间模型的辨识,以及多率随机系统辨识方法的研究几乎还是空白.本文的目标之一就是:利用丁锋等 1999 年提出的递阶辨识原理^[23],基于双率输入输出数据,研制状态可测和不可测双率随机系统的辨识问题.

多率系统的研究可以追溯到上世纪 50 年代,第一个重要工作归功于 Kranc 1957 年在处理开关分解时进行的^[24].因为一个多率采样数据系统总是一个时变系统,即使对应的连续系统是时不变的.后来由 Khargonekar 等人引入提升技术^[25],可将一个周期离散时变系统化为一个时不变系统.现在,提升技术已成为处理多率系统的一个标准工具.由于系统提升,使得提升后的系统是一个具有因果约束的时不变多变量系统(即使对应的连续系统是一个单输入单输出系统也如此).与常规单率系统辨识方法不同的是:我们提出的双率随机系统的递阶辨识方法时,考虑了这一因果约束.

此外,虽然多率系统的研究很活跃,但是注意到多率系统的描述还缺乏一致性表达.本文的另一个目标就是利用提升技术,提升状态空间模型得到双率系统的一般描述模型.虽然本文的工作是针对双率系统进行的,但所使用的方法可以推广到用于一般多率多变量系统,即多变量系统的每个输入输出通道采样频率(采样周期)不相等时的情形.

2 提升技术与双率系统状态空间模型

处理多率系统的标准技术在信号领域中被称为块技术(blocking technique),在控制中称为提升技术(lifting technique).

设 $\{u(k)\}$ 是一个定义在 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 上的离散时间信号序列,它可以表示为

$$\underline{u} = \{u(0), u(1), u(2), \dots, u(k), \dots\}$$

对于整数 $q \geq 1$,定义 q 重提升算子 L_q 和 q 重提升信号序列 $\{\underline{u}(k)\}$,信号 $u(k)$ 与提升信号 $\underline{u}(k)$ 满足下列关系

$$\underline{u} = L_q u$$

式中

$$\underline{u} = \left\{ \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(q-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(q) \\ u(q+1) \\ u(q+2) \\ \vdots \\ u(2q-1) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u(kq) \\ u(kq+1) \\ u(kq+2) \\ \vdots \\ u(kq+q-1) \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

从这个定义,我们可以看到:提升运算并没有产生信息损失,提升信号 $\underline{u}(k)$ 的维数是原信号 $u(k)$ 的 q 倍.如果 $u(k)$ 的内在周期是 h ,那么提升信号 $\underline{u}(k)$ 的内在周期是 qh .我们不难发现逆算子 L_q^{-1} (映射 $\underline{u}(k)$ 到 $u(k)$)与算子 L_q 满足等式:

$$L_q^{-1}L_q = I, \quad L_qL_q^{-1} = I$$

式中, I 为适当维数的单位系统.

图 1 是一个采样数据系统,其中 P_c 是一个连续过程, $u(t)$ 是控制输入, $y(t)$ 是系统输出, $v(t)$ 是一个零均值不相关随机过程.当零阶保持器 H_{T_1} 的周期 T_1 与采样器 S_{T_2} 的周期 T_2 相等(即 $T_1 = T_2$)时,我们就得到一个传统采样数据系统,即单率系统^[26].方崇智和萧德云的《过程辨识》,以及谢新民和丁锋的《自适应控制系统》都是讨论单率系统的辨识与控制问题的^[27,28].当控制输入的刷新周期 T_1 和输出采样周期 T_2 不相等时,我们就得到了一个双率系统(dual-rate system)^[26].不失一般性,假设 $T_1 = ph, T_2 = qh, p$ 和 q 是两个互质整数, h 称为基周期(base period).否则,可以把 p 和 q 的公因子合并到 h 里.例如,如果 $T_1 = 3.09s, T_2 = 4.12s$,那么 $p=3, q=4, h=1.03s$.由于输入刷新周期与输出采样周期不相等,故从 $u(k^*)$ 到 $y(k^*)$ 是一个时变系统.然而,为了便于处理,我们把每 q 个输入和 p 个输出放到一块,构成一个提升输入向量 \underline{u} 和提升输出向量 \underline{y} (其定义见后),那么就得到周期 T 上的一个线性时不变多变量系统,这里 $T = pqh$ 称为框架周期(frame period),即 T_1 和 T_2 的最小公倍数.对于前面所描述的双率采样系统,推导其提升状态空间模型,并基于双率输入输出数据 $\{u(kT_1), y(kT_2); k=0, 1, 2, \dots\}$,应用递阶辨识原理,研制这样双率系统状态空间模型的递阶辨识方法.

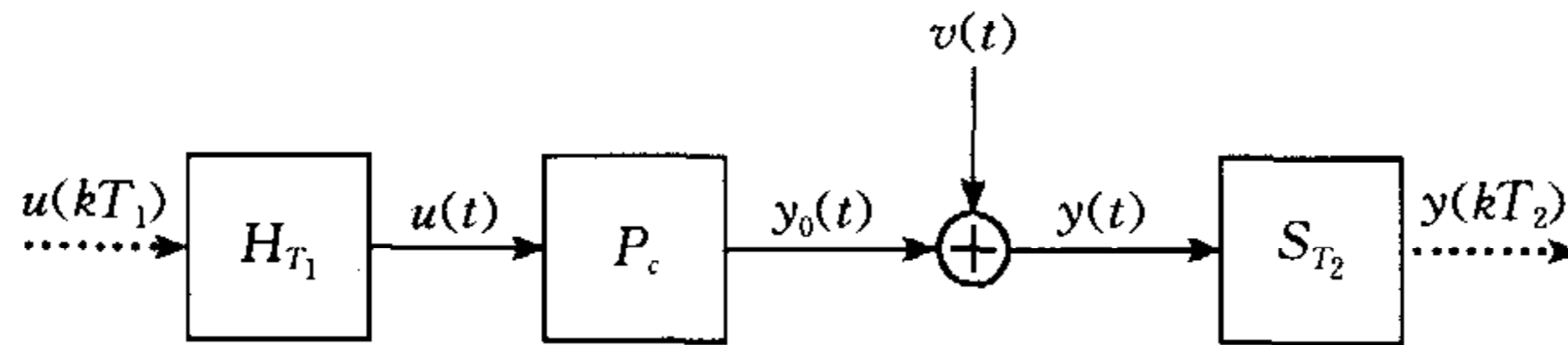


图 1 双率采样数据系统
Fig. 1 Dual-rate system

对于图 1 双率系统,令 $v(t) = 0$,用算子 L_q 提升控制输入 u ,用算子 L_p 提升输出 y ,便得到一个提升系统 P_T :

$$\underline{y} = P_T \underline{u} \tag{1}$$

其中,提升系统 P_T 映射提升输入 $\underline{u} = L_q u$ 到提升输出 $\underline{y} = L_p y$,它的定义如下:

$$P_T = L_p S_{qh} P_c H_{ph} L_q^{-1}$$

提升系统 P_T 是一个线性多变量过程.下面推导提升的状态空间表达.

假设图 1 中 P_c 是一个线性时不变连续时间过程,且具有下列状态空间模型

$$P_c: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_c \mathbf{x}(t) + B_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \tag{2}$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 是控制输入向量, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ 是系统输出向量, $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^r$ 是一个零均值随机白噪声向量, A_c, B_c, C, D 均为适当维数的矩阵.用采样周期 h 离散化系统(2)得到 $P_d := S_h P_c H_h$,这里的 P_d 是虚拟的, S_h 和 H_h 代表周期为 h 的采样器和零阶保持器.通常 P_d 具有如下形式^[26]

$$P_d: \begin{cases} \mathbf{x}(kh+h) = A\mathbf{x}(kh) + B\mathbf{u}(kh) \\ \mathbf{y}(kh) = C\mathbf{x}(kh) + D\mathbf{u}(kh) + \mathbf{v}(kh) \end{cases} \quad (3)$$

式中

$$A := e^{A_c h}, \quad B := \int_0^h e^{A_c t} dt B_c$$

定理 1. 设 h 为基周期, $T_1 = ph$ 为控制刷新周期, $T_2 = qh$ 为输出采样周期, $T = pqh = pT_2 = qT_1$ 为框架周期, 由于采用零阶保持器, 故有 $u(t) = u(kT_1) = u(kph), t \in [kph, (k+1)ph)$, $y(t)$ 在采样点 $t = kT_2 = kqh$ 的值为 $y(kT_2)$. 令

$$F(i, p) := A^i + A^{i+1} + \dots + A^{i+p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} A^{i+j}, \quad p \geq 0, i \geq 0$$

$$A^j F(i, p) = F(i+j, p), \quad j \geq 0$$

$$A_p := \exp(A_c T_1) = A^p, \quad A_q := \exp(A_c T_2) = A^q$$

$$B_p := \int_0^{T_1=ph} e^{A_c t} dt B_c = (A^{p-1} + A^{p-2} + \dots + A + I)B = F(0, p)B$$

$$\underline{\mathbf{u}}(kT) = L_q \mathbf{u}(kT) = \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + T_1) \\ \vdots \\ u(kT + (q-1)T_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(qr)} \text{ 提升输入向量}$$

$$\underline{\mathbf{y}}(kT) = L_p \mathbf{y}(kT) = \begin{bmatrix} y(kT) \\ y(kT + T_2) \\ \vdots \\ y(kT + (p-1)T_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(pm)} \text{ 提升输出向量}$$

$$\underline{\mathbf{v}}(kT) = L_p \mathbf{v}(kT) = \begin{bmatrix} v(kT) \\ v(kT + T_2) \\ \vdots \\ v(kT + (p-1)T_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(pm)} \text{ 提升噪声向量}$$

那么提升的双率系统 P_T 具有下列状态空间模型

$$P_T: \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = A_T \mathbf{x}(kT) + B_T \underline{\mathbf{u}}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = C_T \mathbf{x}(kT) + D_T \underline{\mathbf{u}}(kT) + \underline{\mathbf{v}}(kT) \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$A_T = \exp(A_c T) = \exp(A_c pqh) = A_p^q = A_q^p \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B_T = [A_p^{q-1} B_p, A_p^{q-2} B_p, \dots, A_p B_p, B_p]$$

$$= [A^{(q-1)p} F(0, p) B, A^{(q-2)p} F(0, p) B, \dots, A^p F(0, p) B, F(0, p) B]$$

$$= [F(pq-p, p) B, F(pq-2p, p) B, \dots, F(p, p) B, F(0, p) B] \mathbb{R}^{n \times (pr)} \in \mathbb{R}^{n \times (qr)}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} C \\ CA_q \\ CA_q^2 \\ \vdots \\ CA_q^{(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA^q \\ CA^{2q} \\ \vdots \\ CA^{(p-1)q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(pm) \times n}$$

$$D_T = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ D_{10} & D_{11} & \cdots & D_{1c_1} & 0 & & & \vdots \\ D_{20} & D_{21} & \cdots & \cdots & D_{2c_2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ D_{p-1,0} & D_{p-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & D_{p-1,c_{p-1}} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(pm) \times (qr)}$$

$$D_{ij} = CF(iq - jp - p, p)B, \quad D_{ic_i} = CF(0, d_i)B + D$$

对于互质的整数 p 和 q , 整数 $c_i \geq 0$ 和 $0 \leq d_i < p$ 满足 $iq = c_i p + d_i, i = 1, 2, \dots, p-1$.

证明. 对式(2)从 $t = kT$ 到 $t = (k+1)T$ 求积分可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= e^{A_c T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} B_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{A_c T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+qT_1} e^{A_c(kT+qT_1-\tau)} B_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= A^{pq} \mathbf{x}(kT) + \sum_{i=1}^q \int_{kT+(i-1)T_1}^{kT+iT_1} e^{A_c(kT+qT_1-\tau)} B_c d\tau \mathbf{u}(kT + (i-1)T_1) \\ &= A_p^q \mathbf{x}(kT) + \sum_{i=1}^q e^{A_c(q-i)T_1} \left[\int_0^{T_1} e^{A_c t} dt B_c \right] \mathbf{u}(kT + (i-1)T_1) \\ &= A_p^q \mathbf{x}(kT) + \sum_{i=1}^q A_p^{q-i} B_p \mathbf{u}(kT + (i-1)T_1) \\ &= A_T \mathbf{x}(kT) + B_T \mathbf{u}(kT) \end{aligned}$$

输出方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(kT + iT_2) &= \mathbf{y}(kT + iqh) \\ &= CA^{iq} \mathbf{x}(kT) + \sum_{j=1}^{iq} CA^{iq-j} B \mathbf{u}(kT + (j-1)h) + D \mathbf{u}(kT + iqh) + \mathbf{v}(kT + iT_2) \\ &= CA_q^i \mathbf{x}(T) + \sum_{l=0}^{c_i-1} \sum_{j=1}^p CA^{iq-lp-j} B \mathbf{u}(kT + lph + (j-1)h) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{d_i} CA^{d_i-j} B \mathbf{u}(kT + c_i ph + (j-1)h) + D \mathbf{u}(kT + iqh) + \mathbf{v}(kT + iT_2) \end{aligned}$$

由于采用零阶保持器, 故 $\mathbf{u}(t)$ 在区间 $[kT + jT_1, kT + (j+1)T_1)$ 上是常数, 即 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT + jT_1), t \in [kT + jph, kT + (j+1)ph)$, 因此

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(kT + iT_2) &= CA_q^i \mathbf{x}(kT) + \sum_{l=0}^{c_i-1} CF(iq - lp - p, p) B \mathbf{u}(kT + lph) + \\ &\quad CF(0, d_i) B \mathbf{u}(kT + c_i ph) + D \mathbf{u}(kT + c_i T_1) + \mathbf{v}(kT) + \mathbf{v}(kT + iT_2) = \\ &\quad A_q^i \mathbf{x}(kT) + \sum_{j=0}^{c_i} D_{ij} \mathbf{u}(kT + jT_1) + \mathbf{v}(kT + iT_2), i = 0, 1, 2, \dots, p-1 \end{aligned}$$

证毕.

我们已经得到了双率系统的提升状态空间模型(4), 假设采用某种辨识方法估计出提升模型的参数矩阵 $[A_T, B_T, C_T, D_T]$ (如本文第 5 节的方法), 与单率系统辨识不同的是, 对于

双率系统,除了辨识提升模型外,另一个有趣的问题是:我们能否找出采样周期分别为 $T_1 = ph, T_2 = qh$ 和 h 的单率系统参数矩阵 $[A_p, B_p, C, D]$, $[A_q, B_q, C, D]$ 和 $[A, B, C, D]$? 答案是肯定的,只要提升系统是可控的和可观测的.

3 系统矩阵的计算

1) 参数矩阵 $[A_p, B_p, C, D]$ 和 $[A_q, B_q, C, D]$ 的计算

根据 B_T, C_T 和 D_T 的定义, B_p, C 和 D 可以分别从 B_T 的最后块列(即最后 r 列)、 C_T 的第 1 块行(即前 m 行)、以及 D_T 的第(1,1)块(即前 m 行 r 列子块)读出. 余下的事情是计算矩阵 A_p, A_q 和 B_q . 利用已知的 A_T, B_T 和 C_T , 构造广义能控性矩阵

$$\Gamma_c = [B_p, A_p B_p, A_p^2 B_p, \dots, A_p^N B_p], N > n$$

$$\Gamma_c(i) = [A_p^i B_p, A_p^{i+1} B_p, \dots, A_p^{N+i} B_p], i \geq 0$$

和广义能观测性矩阵

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA_q \\ CA_q^2 \\ \vdots \\ CA_q^N \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o(i) = \begin{bmatrix} CA_q^i \\ CA_q^{i+1} \\ CA_q^{i+2} \\ \vdots \\ CA_q^{N+i} \end{bmatrix}$$

因为 Γ_c 和 Γ_o 具有所谓的移位不变结构,就很容易计算出 A_p 和 A_q . 具体做法如下:定义子矩阵 $\Gamma_c(2:N+1)$ 和 $\Gamma_c(1:N)$, 它们分别是删除 Γ_c 的第 1 块列和最后块列得到的. 可以看出 A_p 是映射 $\Gamma_c(1:N)$ 到 $\Gamma_c(2:N+1)$ 的一个变换,即

$$A_p \Gamma_c(1:N) = \Gamma_c(2:N+1)$$

能控性假设意味着 $\Gamma_c(1:N)$ 是非奇异的(行满秩),故 A_p 可以通过求解下列矩阵方程得到

$$A_p = A^p = \Gamma_c(2:N+1) \Gamma_c^T(1:N) [\Gamma_c(1:N) \Gamma_c^T(1:N)]^{-1}$$

上标 T 表示矩阵转置. 类似地,我们有

$$A_q = A^q = [\Gamma_o^T(1:N) \Gamma_o(1:N)]^{-1} \Gamma_o^T(1:N) \Gamma_o(2:N+1)$$

为了减小数值计算误差,我们可以取 K 次的平均值

$$A_p = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Gamma_c(i) \Gamma_c^T(i-1) [\Gamma_c(i-1) \Gamma_c^T(i-1)]^{-1}$$

$$A_q = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [\Gamma_o^T(i-1) \Gamma_o(i-1)]^{-1} \Gamma_o^T(i-1) \Gamma_o(i)$$

矩阵 B_q 在下一步求出矩阵 A 和 B 后可按下式计算

$$B_q := \int_0^{T_2} e^{A_c t} dt B_c = (A^{q-1} + A^{q-2} + \dots + A + I) B = F(0, q) B$$

2) 系统参数矩阵 $[A, B, C, D]$ 的计算

由 p 和 q 互质的假设,存在整数 q' 和 p' 满足 $pq' + p'q = 1$, 所以我们有

$$A = A^{pq'+p'q} = A_p^{q'} A_q^{p'}$$

用 $I - A$ 左乘 B_p 给出

$$(I-A)B_p = (I-A)(I+A+\cdots+A^{p-1})B = (I-A^p)B = (I-A_p)B$$

因此

$$B = (I-A_p)^{-1}(I-A)B_p$$

从上面的推导中,我们可能已经注意到:满足 $pq' + p'q = 1$ 的 q', p' 可能是负的,因此,要得到 A 和 B ,就要求 A_p, A_q 和 $(I-A_p)$ 是可逆的,也就是说 A 在原点和单位元上没有特征值. 如果系统没有迟延且是稳定的(稳定性假设是必要的),则 A 在原点和单位元上没有特征值. 而系统的迟延可以通过输入移位对消掉^[22],使得 A 消去原点的特征值. 消去一个迟延,系统降低一阶. 在求得了离散模型 (A, B, C, D) 后,如何获得连续系统模型 (A_c, B_c, C, D) ,可参见文献[29].

4 递阶辨识算法

为方便记 $\underline{x}(kT) =: \underline{x}(k), \underline{u}(kT) =: \underline{u}(k), \underline{y}(kT) =: \underline{y}(k), \underline{v}(kT) =: \underline{v}(k)$, 在状态中引入白噪声向量 $\underline{w}(k)$ 后,则提升系统(4)可表示为

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = A_T \underline{x}(k) + B_T \underline{u}(k) + \underline{w}(k) \\ \underline{y}(k) = C_T \underline{x}(k) + D_T \underline{u}(k) + \underline{v}(k) \end{cases} \quad (5)$$

讨论提升双率随机系统状态空间模型(5)的辨识方法,可分为状态可测和不可测两种情况.

4.1 状态已知情形

假设提升输入向量 $\underline{u}(k)$, 提升输出向量 $\underline{y}(k)$ 和系统状态向量 $\underline{x}(k)$ 都是可测的,那么式(5)就是参数矩阵 (A_T, B_T, C_T, D_T) 的线性回归模型,即

$$\underline{Z}(k) = \theta^T \boldsymbol{\varphi}_0(k) + \mathbf{E}(k) \quad (6)$$

其中

$$\underline{Z}(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{y}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+pm}, \quad \theta^T = \begin{bmatrix} A_T \\ C_T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+pm) \times (n+qr)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+qr}, \quad \mathbf{E}(k) = \begin{bmatrix} \underline{w}(k) \\ \underline{v}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+pm}$$

根据最小二乘原理,极小化下列目标函数

$$J_1 = \sum_{i=1}^k [\underline{Z}(i) - \theta^T \boldsymbol{\varphi}_0(i)]^T [\underline{Z}(i) - \theta^T \boldsymbol{\varphi}_0(i)]$$

可得估计式(6)未知参数矩阵 θ 的算法如下:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \mathbf{L}_0(k) [\underline{Z}^T(k) - \boldsymbol{\varphi}_0^T(k) \hat{\theta}(k)] \quad (7)$$

$$\mathbf{L}_0(k) = P_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0(k) = \frac{P_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_0^T(k) P_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0(k)} \quad (8)$$

$$P_0(k+1) = P_0(k) - \frac{P_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0^T(k) P_0(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_0^T(k) P_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0(k)} = [I - \mathbf{L}_0(k) \boldsymbol{\varphi}_0^T(k)] P_0(k) \quad (9)$$

式中 $\hat{\theta}(k)$ 为 θ 的估计:

$$\hat{\theta}^T(k) = \begin{bmatrix} \hat{A}_T(k) & \hat{B}_T(k) \\ \hat{C}_T(k) & \hat{D}_T(k) \end{bmatrix}$$

基于未知参数估计的 $\underline{w}(k)$ 和 $\underline{v}(k)$ 的协方差阵 R_w, R_v 和互协方差阵 R_{wv} 可以通过下式估算

$$\hat{R}_w = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L [\underline{x}(k+1) - \hat{A}_T \underline{x}(k) - \hat{B}_T \underline{u}(k)][\underline{x}(k+1) - \hat{A}_T \underline{x}(k) - \hat{B}_T \underline{u}(k)]^T \quad (10)$$

$$\hat{R}_v = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L [\underline{y}(k) - \hat{C}_T \underline{x}(k) - \hat{D}_T \underline{u}(k)][\underline{y}(k) - \hat{C}_T \underline{x}(k) - \hat{D}_T \underline{u}(k)]^T \quad (11)$$

$$\hat{R}_{wv} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L [\underline{x}(k+1) - \hat{A}_T \underline{x}(k) - \hat{B}_T \underline{u}(k)][\underline{y}(k) - \hat{C}_T \underline{x}(k) - \hat{D}_T \underline{u}(k)]^T \quad (12)$$

式中, L 为数据长度, $[\hat{A}_T, \hat{B}_T, \hat{C}_T, \hat{D}_T]$ 是数据长度为 L 时的系统参数估计.

读者可能已经注意到: 辨识模型(4)中 D_T 是一个下三角阵, 即 D_T 上三角部分元素为零, 这就是所谓的因果约束. 因为模型(4)是从连续系统推导出来的, 所以因果约束自然满足. 然而, 在我们的辨识问题, 需要处理这个约束, 因为 D_T 上三角部分零元素是不需要辨识的. 我们的目标是利用提升输入输出数据 $(\underline{u}(k), \underline{y}(k))$, 辨识提升系统未知参数和状态.

设 $C_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为 C_T 的第 i 行块, $D_i \in \mathbb{R}^{m \times l_i}$ 为 D_T 的第 i 行块中的非零元, 把 $\underline{u}(k)$ 的前 l_i 个元记为 $\underline{u}_{l_i}(k)$, 置

$$\theta_x^T = [A_T, B_T], \quad \theta_i^T = [C_i, D_i],$$

$$\boldsymbol{\varphi}_x(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_i(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}_{l_i}(k) \end{bmatrix},$$

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k) \\ \underline{y}_2(k) \\ \vdots \\ \underline{y}_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(pm)}, \quad \underline{y}_i(k) \in \mathbb{R}^m$$

考虑到因果约束时, 目标函数应该修改为

$$J_2 = \sum_{i=1}^k \left\{ [\underline{x}(i+1) - \theta_x^T \boldsymbol{\varphi}_x(i)]^T [\underline{x}(i+1) - \theta_x^T \boldsymbol{\varphi}_x(i)] + \sum_{j=1}^p [\underline{y}_j(i) - \theta_j^T \boldsymbol{\varphi}_j(i)]^T [\underline{y}_j(i) - \theta_j^T \boldsymbol{\varphi}_j(i)] \right\}$$

极小化 J_2 , 不难得到下列估计参数 θ_x 和 $\theta_i (i=1, 2, \dots, p)$ 的算法:

$$\hat{\theta}_x(k+1) = \hat{\theta}_x(k) + \mathbf{L}_x(k) [\underline{x}^T(k+1) - \boldsymbol{\varphi}_x^T(k) \hat{\theta}_x(k)] \quad (13)$$

$$\mathbf{L}_x(k) = P_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x(k) = \frac{P_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_x^T(k) P_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x(k)} \quad (14)$$

$$P_x(k+1) = P_x(k) - \frac{P_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x^T(k) P_x(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_x^T(k) P_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x(k)} = [I - \mathbf{L}_x(k) \boldsymbol{\varphi}_x^T(k)] P_x(k) \quad (15)$$

$$\hat{\theta}_i(k+1) = \hat{\theta}_i(k) + \mathbf{L}_i(k) [\underline{y}_i^T(k) - \boldsymbol{\varphi}_i^T(k) \hat{\theta}_i(k)] \quad (16)$$

$$\mathbf{L}_i(k) = P_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i(k) = \frac{P_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_i^T(k) P_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i(k)} \quad (17)$$

$$P_i(k+1) = P_i(k) - \frac{P_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i^T(k) P_i(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}_i^T(k) P_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i(k)} = [I - \mathbf{L}_i(k) \boldsymbol{\varphi}_i^T(k)] P_i(k) \quad (18)$$

式中, $\hat{\theta}_x(k)$ 为 θ_x 的估计, $\hat{\theta}_i(k)$ 为 θ_i 的估计.

4.2 状态未知情形

状态是不可测的,即状态是未知的,上述算法不能采用,因为向量 $\varphi_x(k)$ 和 $\varphi_i(k)$ 包含了系统状态.因此,必须采用递阶辨识方法来估计系统的参数^[23,30].递阶辨识亦称分解辨识或分步辨识,它的基本原理是:在估计系统的参数时,认为系统的状态是已知的,即状态用其估计值代替;而在估计系统的状态时,认为系统的参数是已知的,即参数用其估计值代替.这是一个交互估计的过程,是一个随迭代次数递增的一个递阶辨识过程.因此,递阶辨识的第1步是基于双率采样提升输入输出数据 $\{\underline{u}(k), \underline{y}(k)\}$ 和状态估计 $\hat{x}(k)$ (在第2步计算的),并将 $\varphi_x(k)$ 和 $\varphi_i(k)$ 包含的系统未知状态 $x(k)$ 用其估计值 $\hat{x}(k)$ 代替,这时 $\varphi_x(k)$ 和 $\varphi_i(k)$ 分别记作 $\hat{\varphi}_x(k)$ 和 $\hat{\varphi}_i(k)$,来估计参数 θ_x 和 θ_i ,算法类似于(13)~(18);因为在第1步计算出系统的参数估计,第2步是用这个参数估计代替状态方程(5)中的未知参数,然后利用类似于卡尔曼滤波方法来估计系统的状态.具体过程可参照文献[23,30].下面讨论估计一般双率系统的未知状态和未知参数的递阶状态空间模型辨识算法.极小化下列目标函数:

$$J_3 = \sum_{i=1}^k [\hat{x}(i+1) - \theta_x^T \hat{\varphi}_x(i)]^T [\hat{x}(i+1) - \theta_x^T \hat{\varphi}_x(i)] + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^k [\underline{y}_j(i) - \theta_j^T \hat{\varphi}_j(i)]^T [\underline{y}_j(i) - \theta_j^T \hat{\varphi}_j(i)] \quad (19)$$

$$J = \text{tr}\{E[(\hat{x}(k) - x(k))(\hat{x}(k) - x(k))^T]\} \quad (20)$$

不难得到一般双率系统状态空间模型的递阶辨识算法如下:

$$\hat{\theta}_x(k+1) = \hat{\theta}_x(k) + L_x(k) [\hat{x}^T(k+1) - \hat{\varphi}_x^T(k) \hat{\theta}_x(k)] \quad (21)$$

$$L_x(k) = P_x(k) \hat{\varphi}_x(k) = \frac{P_x(k) \hat{\varphi}_x(k)}{1 + \hat{\varphi}_x^T(k) P_x(k) \hat{\varphi}_x(k)} \quad (22)$$

$$P_x(k+1) = P_x(k) - \frac{P_x(k) \hat{\varphi}_x(k) \hat{\varphi}_x^T(k) P_x(k)}{1 + \hat{\varphi}_x^T(k) P_x(k) \hat{\varphi}_x(k)} = [I - L_x(k) \hat{\varphi}_x^T(k)] P_x(k) \quad (23)$$

$$\hat{\theta}_i(k+1) = \hat{\theta}_i(k) + L_i(k) [\underline{y}_i^T(k) - \hat{\varphi}_i^T(k) \hat{\theta}_i(k)] \quad (24)$$

$$L_i(k) = P_i(k) \hat{\varphi}_i(k) = \frac{P_i(k) \hat{\varphi}_i(k)}{1 + \hat{\varphi}_i^T(k) P_i(k) \hat{\varphi}_i(k)} \quad (25)$$

$$P_i(k+1) = P_i(k) - \frac{P_i(k) \hat{\varphi}_i(k) \hat{\varphi}_i^T(k) P_i(k)}{1 + \hat{\varphi}_i^T(k) P_i(k) \hat{\varphi}_i(k)} = [I - L_i(k) \hat{\varphi}_i^T(k)] P_i(k) \quad (26)$$

$$\hat{\varphi}_x(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \underline{u}_i(k) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\hat{\theta}_x^T(k) = [\hat{A}_T(k), \hat{B}_T(k)], \quad \hat{\theta}_i^T(k) = [\hat{C}_i(k), \hat{D}_i(k)], \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (28)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}_T(k) \hat{x}(k) + \hat{B}_T(k) \underline{u}(k) + L(k) [\underline{y}(k) - \hat{C}_T(k) \hat{x}(k) - \hat{D}_T(k) \underline{u}(k)] \quad (29)$$

$$L(k) = \hat{A}_T(k) P(k) \hat{C}_T^T(k) (\hat{R}_v(k) + \hat{C}_T(k) P(k) \hat{C}_T^T(k))^{-1} \quad (30)$$

$$P(k+1) = \hat{A}_T(k) P(k) \hat{A}_T^T(k) + \hat{R}_w(k) - \hat{A}_T(k) P(k) \hat{C}_T^T(k) (\hat{R}_v(k) + \hat{C}_T(k) P(k) \hat{C}_T^T(k))^{-1} \hat{C}_T(k) P(k) \hat{A}_T^T(k) \quad (31)$$

基于状态估计和参数估计的 $\underline{w}(k)$ 和 $\underline{v}(k)$ 的协方差阵 R_w, R_v 可以通过下式估算

$$\begin{cases} \hat{R}_w(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\hat{\mathbf{x}}(i+1) - \hat{A}_T(k)\hat{\mathbf{x}}(i) - \hat{B}_T(k)\underline{\mathbf{u}}(i)][\hat{\mathbf{x}}(i+1) - \hat{A}_T(k)\hat{\mathbf{x}}(i) - \hat{B}_T(k)\underline{\mathbf{u}}(i)]^T \\ \hat{R}_v(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\underline{\mathbf{y}}(i) - \hat{C}_T(k)\hat{\mathbf{x}}(i) - \hat{D}_T(k)\underline{\mathbf{u}}(i)][\underline{\mathbf{y}}(i) - \hat{C}_T(k)\hat{\mathbf{x}}(i) - \hat{D}_T(k)\underline{\mathbf{u}}(i)]^T \end{cases} \quad (32)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 是状态 $\mathbf{x}(k)$ 的估计, $[\hat{A}_T(k), \hat{B}_T(k), \hat{C}_T(k), \hat{D}_T(k)]$ 是 $[A_T, B_T, C_T, D_T]$ 的估计,它们是估计值 $\hat{\theta}_x(k)$ 和 $\hat{\theta}_i(k) (i=1, 2, \dots, p)$ 的分量构成的.

式(21)~(32)构成了双率采样系统的状态和参数递阶状态空间模型辨识算法. 上述算法中,基于卡尔曼滤波原理的状态估计算法(29)~(31)太复杂,且增益向量 $L(k)$ 和状态估计误差协方差阵 $P(k)$ 中还包括了噪声协方差阵,实现这个算法较为困难.为此,可以借助于随机逼近原理和梯度迭代思想,把式(29)~(31)用下面一个简单递归计算式代替:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{A}_T(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{B}_T(k)\underline{\mathbf{u}}(k) + \rho(k)\hat{C}_T^T(k)[\underline{\mathbf{y}}(k) - \hat{C}_T(k)\hat{\mathbf{x}}(k) - \hat{D}_T(k)\underline{\mathbf{u}}(k)]$$

其中,收敛因子满足 $\rho(k) \geq 0, \sum \rho(k) = \infty, \sum \rho^2(k) < \infty$.

5 结语

针对双率采样数据系统,本文考虑了状态可测和不可测两种情况,基于双率采样输入输出数据,提出了估计提升双率系统状态空间模型参数和状态的递阶辨识方法.虽然,文中的算法是针对状态和观测中含白噪声干扰的双率采样系统给出的,但所使用的方法,可以推广用于辨识卡尔曼新息模型描述的双率采样系统,以及输出和状态中含彩色噪声干扰的双率系统的辨识问题.提出的双率系统递阶辨识算法的性能分析仍需进行深入的研究.

References

- 1 Ohshima M, Hashimoto I, Takeda M, Yoneyama T, Goto F. Multirate multivariable model predictive control and its application to a semi-commercial polymerization reactor. In: Proceedings of the 1992 ACC, 2. Chicago, USA, 1992, 1576~1581
- 2 Gudi R D, Shah S L, Gray M R. Multirate state and parameter estimation in an antibiotic fermentation with delayed measurements. *Biotechnology and Bioengineering*, 1994, **44**(12): 1271~1278
- 3 Li D, Shah S L, Chen T. Analysis of dual-rate inferential control systems. *Automatica*, 2002, **38**(6): 1053~1059
- 4 Li D, Shah S L, Chen T, Qi K Z. Application of dual-rate modeling to CCR octane quality inferential control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2003, **11**(1): 43~51
- 5 Kreisselmeier G. On sampling without loss of observability/controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(5): 1021~1025
- 6 Al-Rahmani H M, Franklin G F. A new optimal multirate control of linear periodic and time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(4): 406~415
- 7 Al-Rahmani H M, Franklin G F. Multirate control: A new approach. *Automatica*, 1992, **28**(1): 35~44
- 8 Chen T. On stability robustness of a dual-rate control system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(1): 164~167

- 9 Chen T, Qiu L. \mathcal{H}_∞ design of general multirate sampled-data control systems. *Automatica*, 1994, **30**(7): 1139~1152
- 10 Qiu L, Chen T. \mathcal{H}_2 optimal design of multirate sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(12): 2506~2511
- 11 Qiu L, Chen T. Multirate sampled-data systems: All \mathcal{H}_∞ suboptimal controllers and the minimum entropy controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(3): 537~550
- 12 Sagförs M F, Toivonen H T, Lennartson B. State-space solution to the periodic multirate H_∞ control problem: A lifting approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(12): 2345~2350
- 13 Tangirala A K, Li D, Patwardhan R S, Shah S L, Chen T. Ripple-free conditions for lifted multirate control systems. *Automatica*, 2001, **37**(10): 1637~1645
- 14 Scattolini R. Self-tuning control of systems with infrequent and delayed output sampling. *IEE Proceedings, Part D, Control Theory and Applications*, 1988, **135**(4): 213~221
- 15 Zhang C, Middleton R H, Evans R J. An algorithm for multirate sampling adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(7): 792~795
- 16 Albertos P, Salt J, Tornero J. Dual-rate adaptive control. *Automatica*, 1996, **32**(7): 1027~1030
- 17 Lee J H, Gelormino M S, Morari M. Model predictive control of multirate sampling-data systems: A state-space approach. *International Journal of Control*, 1992, **55**(1): 153~191
- 18 Scattolini R, Schiavoni N. A multirate model-based predictive controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(6): 1093~1097
- 19 Ling K V, Lim K W. A state-space GPC with extensions to multirate control. *Automatica*, 1996, **32**(7): 1067~1071
- 20 Sheng J, Chen T, Shah S L. On stability robustness of dual-rate generalized predictive control systems. In: Proceedings of American Conference, Virginia, USA: Arlington, 2001, 3415~3420
- 21 Sheng J, Chen T, Shah S L. Generalized predictive control for non-uniformly sampled systems. *Journal of Process Control*, 2002, **12**(8): 875~885
- 22 Li D, Shah S L, Chen T. Identification of fast-rate models from multirate data. *International Journal of Control*, 2001, **74**(7): 680~689
- 23 Ding Feng, Yang Jia-Ben. Hierarchical identification for large-scale systems. *Acta Automatica Sinica*, 1999, **25**(5): 647~654(in Chinese)
- 24 Kranc G M. Input-output analysis of multirate feedback systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1957, **3**(1): 21~28
- 25 Khargonekar P P, Poolla K, Tannenbaum A. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(11): 1088~1096
- 26 Chen T, Francis B. Optimal Sampled-data Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995
- 27 Fang Chong-Zhi, Xiao De-Yun. Process Identification. Beijing: Tsinghua University Press, 1998(in Chinese)
- 28 Xie Xin-Ming, Ding Fang. Adaptive Control Systems. Beijing: Tsinghua University Press, 2002(in Chinese)
- 29 Chen T, Miller D. Reconstruction of continuous-time systems from their discretizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(10): 1914~1917
- 30 Ding Feng, Yang Jia-Ben, Xu Yong-Mao. Convergence of hierarchical stochastic gradient identification for transfer function matrix model. *Control Theory and Application*, 2001, **18**(6): 949~953

丁 锋 1984 年湖北工业大学信息工程学院获得学士学位,之后在湖北制药厂工作 4 年,1990 年和 1994 年在清华大学自动化系分别获得硕士学位和博士学位(优秀博士论文),1994 年任教于清华大学自动

化系,现在是加拿大艾尔伯塔(Alberta)大学访问教授.研究兴趣为辨识与自适应控制.

(**DING Feng** Received his bachelor degree in Electrical Engineering from the Information Engineering College, Hubei Technological University in 1984, and master and Ph. D. degrees in automatic control both from the Department of Automation, Tsinghua University in 1990 and 1994, respectively. From 1984 to 1988, he was an electrical engineer at Hubei Pharmaceutical Factory. Since 1994 he is with Department of Automation, Tsinghua University. He is now a Visiting Professor at the University of Alberta, Edmonton, Canada. His current research interests include identification and adaptive control.

陈通文 1984年在清华大学获得学士学位,1988年和1991年在加拿大多伦多大学电气工程系获得硕士学位和博士学位.1991至1997年任教于加拿大卡尔加里大学电气与计算机工程系.现任加拿大艾尔伯塔大学电气与计算机工程系教授.研究兴趣包括过程控制、多率系统、鲁棒控制、网络控制、数字信号处理及其在工业中的应用.

(**CHEN Tong-Wen** Received his bachelor degree from Tsinghua University in 1984, and master and Ph. D. degrees from the University of Toronto in 1988 and 1991, respectively, both in Electrical Engineering. From 1991 to 1997, he was on faculty in the Department of Electrical and Computer Engineering at the University of Calgary, Canada. He is presently a Professor of Electrical and Computer Engineering at the University of Alberta, Edmonton, Canada. His current research interests include process control, multirate systems, robust control, network based control, digital signal processing, and their applications to industrial problems.)

萧德云 1970年毕业于清华大学,现任清华大学自动化系教授、博士生导师.长期从事辨识建模、故障诊断、传感器信号融合、计算机应用和大型连续过程工业 CIMS 等领域的教学和科研.

(**XIAO De-Yun** Received his bachelor degree from the Department of Automation, Tsinghua University in 1970. He is currently a Professor at the Tsinghua University, Beijing, China. His research interests include identification, modeling, fault diagnosis, sensor technique, computer applications, and continuous industrial process CIMS.)